

Российская академия наук  
Институт вычислительной математики

Марчук Г.И.  
Избранные труды

**Том 2**

**Сопряженные уравнения  
и анализ сложных систем**

Москва 2018

УДК 519.6

ББК 22.19

С56

Редакторы-составители тома: В. Б. Залесный, В. И. Агошков, В. П. Шутяев.

Марчук Г.И. Избранные труды: в 5 т. / Российская академия наук, Институт вычислительной математики. – М.: РАН, 2018.

Т.2.: Сопряженные уравнения и анализ сложных систем / [отв. ред. В. Б. Залесный, В. И. Агошков, В. П. Шутяев]. – 500 с.

В настоящем томе представлены основные работы Г. И. Марчука в области теории сопряженных уравнений и их приложений к решению задач математической физики. Развитие метода сопряженных уравнений в значительной степени основано на трудах Г. И. Марчука в течение его 65-летней научной деятельности. В книге изложена развиваемая им и его научной школой методология решения задач математической физики с помощью теории сопряженных уравнений. Методология применяется к требующим глубокого анализа сложным системам, с помощью которых изучаются проблемы глобальных изменений климата, охраны окружающей среды, атомной энергетики, иммунологии, сохранения биосферы с учетом интенсивного развития промышленности и многие другие. В рамках единого подхода формулируются новые постановки задач, стимулируемые развитием новых технологий. Они включают совместный анализ модельных решений и данных измерений, например спутниковых; поиск решения обратных задач; оценку функционалов от решения прямых и обратных задач.

Для специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-906906-28-1

© Институт вычислительной  
математики, 2018

© Марчук Г.И., 2018

# Оглавление

Введение .....	8
<b>I. СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ .....</b>	<b>12</b>
<b>1. Основные и сопряженные уравнения. Теория возмущений .....</b>	<b>13</b>
1.1. Основные и сопряженные операторы в линейных задачах. Элементы теории .....	13
1.2. Сопряженные операторы в спектральных задачах. Метод Фурье .....	26
1.3. Сопряженные уравнения и функционалы. Элементы теории .....	33
1.4. Сопряженные уравнения и ценность информации .....	42
1.5. Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов .....	48
1.6. Простейшие нелинейные задачи .....	55
1.7. Сопряженные уравнения для нестационарных задач .....	65
1.8. Сопряженные уравнения и простейшие обратные задачи .....	74
1.9. Теория возмущений .....	83
1.10. Сопряженные уравнения. Алгоритмы возмущений .....	92
1.11. Алгоритмы возмущений для задач на собственные значения .....	95
<b>2. Простейшие основные и сопряженные задачи математической физики .....</b>	<b>103</b>
2.1. Уравнение диффузии .....	103

2.2. Уравнение теплопроводности.....	113
2.3. Уравнение колебаний.....	123
<b>3. Нелинейные уравнения .....</b>	<b>135</b>
3.1. Нелинейные уравнения и сопряженные задачи.....	136
3.2. Общая формулировка сопряженной задачи.....	141
3.3. Теория малых возмущений.....	143
3.4. Случай возмущения оператора задачи .....	150
3.5. О теории возмущений высшего порядка .....	157
3.6. О других подходах к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах.....	163
<b>4. Обратные задачи и сопряженные уравнения .....</b>	<b>174</b>
4.1. Основные определения и примеры.....	177
4.2. Решение обратных эволюционных задач с постоянным оператором.....	185
4.3. Обратная эволюционная задача с оператором, зависящим от времени .....	192
4.4. Постановка обратных задач на основе методов сопряженных уравнений и теории возмущений.....	199
4.5. Формулировка теории возмущений для сложных нелинейных моделей .....	213
 <b>II. ГЛОБАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ .....</b>	 <b>218</b>
<b>5. Анализ математических моделей в проблеме окружающей среды.....</b>	<b>222</b>
5.1. Уравнение переноса примесей в атмосфере. Единственность решения .....	223
5.2. Стационарное уравнение распространения субстанций .....	227
5.3. Диффузионное приближение. Единственность решения .....	232



5.4. Простейшее диффузионное уравнение.....	241
5.5. Перенос и диффузия тяжелых аэрозолей .....	246
5.6. О структуре и моделировании турбулентных дви- жений в атмосфере .....	248
5.7. Сопряженное уравнение для простейшего урав- нения диффузии .....	254
5.8. Общий случай сопряженной задачи для трехмер- ной области.....	267
5.9. Единственность решения сопряженной задачи .....	276
5.10. Сопряженное уравнение и тождество Лагранжа .....	279
<b>6. Сопряженные уравнения, оптимизация и про- блема минимакса.....</b>	<b>284</b>
6.1. Постановка задачи .....	285
6.2. Сопряженные уравнения и проблема оптими- зации.....	291
6.3. Многокритериальная задача оптимизации.....	293
6.4. Проблема минимакса.....	296
6.5. Обобщенная задача оптимизации размещения промышленного предприятия .....	297
6.6. Некоторые общие замечания .....	298
6.7. Стоимость потерь продуктов биосферы при за- грязнении окружающей среды промышленными выбросами.....	302
6.8. Экономика природных ресурсов.....	307
6.9. Общий экономический критерий .....	310
6.10. Математические проблемы оптимизации выбро- сов действующих промышленных предприятий .....	316
6.11. Теория возмущений.....	322
<b>7. Сопряженные уравнения и модели общей цирку- ляции атмосферы и океана .....</b>	<b>326</b>
7.1. Температурные аномалии атмосферы.....	329
7.2. Температурные аномалии в атмосфере и океане.....	344
7.3. Сопряженные функции в задаче формирования среднемесячных аномалий температуры воздуха ....	348

7.4. Сопряженные уравнения динамики атмосферы.....	353
7.5. Сопряженные уравнения для бароклиной атмосферы .....	360
7.6. Задачи чувствительности климатической изменчивости для различных регионов мира.....	363
7.7 Применение теории чувствительности к сравнению математических моделей .....	383
<b>8. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач .....</b>	<b>391</b>
8.1. Постановка обратных задач.....	392
8.2. Обратные задачи атмосферной оптики .....	394
8.3. Обратные задачи длинноволнового излучения.....	402
8.4. Уравнение для ценности информации для метеорологических спутников .....	410
<b>9. Сопряженные уравнения в задачах обработки данных .....</b>	<b>414</b>
9.1. Задача ассимиляции данных для эволюционного уравнения.....	415
9.2. Численный алгоритм решения задачи ассимиляции данных .....	419
9.3. Численный алгоритм решения задачи ассимиляции геофизических данных на основе метода расщепления.....	426
9.4. Моделирование циркуляции Мирового океана с 4-мерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солености .....	433
9.4.1. Постановка задачи моделирования динамики Мирового океана с вариационной ассимиляцией данных наблюдений.....	435
9.4.2. Решение тестовой задачи 4-мерной вариационной ассимиляции полей температуры и солености с восстановлением начальных условий и потоков .....	446

---

9.4.3. 4-мерная вариационная ассимиляция кли- матических полей температуры и солености Левитуса .....	450
9.4.4. 4-мерная вариационная ассимиляция климати- ческих полей температуры и солености и данных буев Арго.....	454
<b>Комментарии к книге «Сопряженные уравнения и анализ сложных систем» Агошков В.И., Залесный В.В., Шутяев В.П. ....</b>	<b>458</b>
<b>Литература.....</b>	<b>472</b>

## Введение

Сопряженные уравнения все более активно начинают проникать в различные области математики и ее приложений. Первоначально определенные Лагранжем сопряженные операторы нашли глубокое теоретическое обоснование и широкое применение при решении многих задач математической физики. Но истинное значение теории сопряженных уравнений, пожалуй, было впервые оценено физиками при развитии квантовой механики. Уравнение Шредингера потребовало развития аппарата сопряженных уравнений и функций по крайней мере для задач на собственные значения [275]. Здесь впервые сопряженные уравнения становятся необходимым математическим аппаратом для формулирования теории малых возмущений в спектральных проблемах.

В дальнейшем теория возмущений привлекала внимание многих исследователей. Первая математически строгая теория возмущений, по-видимому, начинается с работ Ф. Реллиха [264, 265]. Дальнейшее развитие математическая теория возмущений получила в работах К. О. Фридрихса, Т. Като [212], Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [14], А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова [24], М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [26–28], Б. Секефальви-Надя, С. А. Ломова [71], Н. Н. Моисеева [131], В. П. Маслова [125], В. А. Треногина [157], Р. Беллмана [187], М. Д. ван Дейка [285], А. Н. Филатова и многих других. Эти работы продолжили развитие теории возмущений в применении к широким классам задач математической физики. Однако объединяющей идеей всех этих работ, как правило, являлась возможность разложения решения по малому параметру и обоснования сходимости полученного ряда к точному решению задачи.

Следующий этап активного интереса к сопряженным уравнениям и теории малых возмущений следует отнести к теории ядерных реакторов, где сложные задачи теории переноса нейтронов с замедлением их в средах потребовали формулирования соответствующих сопряженных уравнений и решения основных и сопряженных уравнений применительно к оценке первого собственного числа спектральной задачи, связанной с реализацией стационарной цепной реакции. Эти работы начались с исследований А. Вайнберга и Е. Вигнера для простейших так называемых диффузионно-возрастных моделей переноса и замедления нейтронов и были в дальнейшем обобщены на кинетические уравнения реактора в работах Л. Н. Усачева [159], Г. И. Мар-

чука и В. В. Орлова [116], А. И. Могильнера и В. Я. Пупко (см. [148]) и др. Созданная на базе основных и сопряженных уравнений теория малых возмущений сыграла большую роль в развитии физики реакторов и в реализации проектов атомных электростанций.

Новый подход к сопряженным задачам сформулирован в работе Б. Б. Кадомцева [55] для точечного источника в задаче переноса нейтронов. В работе Г. И. Марчука и В. В. Орлова [116] дана общая формулировка сопряженных задач, по отношению к линейным функционалам, которыми, в частности, могут быть измерения физических процессов, свойственных теории переноса излучения. Это уже не спектральные задачи, а задачи математической физики с заданными источниками в самих уравнениях, начальных данных или в граничных условиях.

В дальнейшем в работах автора было дано развитие теории сопряженных задач по отношению к заданным функционалам для некоторых классов задач математической физики. Оно оказалось плодотворным и для многих других направлений науки. В результате появились более или менее общие подходы к исследованию сложных систем и математических моделей. Эти подходы явились основным содержанием многолетних исследований автора в различных областях математики и ее приложениях к проблемам диффузии, моделям охраны окружающей среды, теории климата и его изменений, математическим проблемам обработки информации со спутников, математическим моделям в иммунологии и др. Вместе с развитием методов сопряженных уравнений формировался рациональный подход к решению обратных задач и к планированию математического эксперимента. Вопросы планирования были исследованы автором в сотрудничестве с С. М. Ермаковым [106].

Теперь несколько слов о нелинейных задачах математической физики. Как известно, математический аппарат сопряженных уравнений в своей классической форме развит только для линейных задач и основан на тождестве Лагранжа. При рассмотрении уравнений гидротермодинамики процессов в атмосфере и океане автор столкнулся с нелинейными задачами, которые требовали развития специального аппарата сопряженных уравнений. Эта задача нашла неожиданное решение на основе построения обычных сопряженных в смысле Лагранжа уравнений, которые в своих коэффициентах требовали использования решения основных уравнений. В результате последовательное решение основных и затем сопряженных уравнений позволило раз-

вить теорию малых возмущений.

В последние годы нелинейные задачи становятся объектом широкого фронта исследований. И, естественно, при этом возникают те или иные обобщения теории сопряженных уравнений, имеющие оригинальное значение для классов задач. Большой интерес здесь вызывают подходы, сформулированные в работах В. П. Маслова [124], а также В. С. Владимирова и И. В. Воловича [34, 35]. По-видимому, плодотворной окажется также теория нелинейных сопряженных уравнений, предложенных М.М. Вайнбергом [20]. Исследованию данных вопросов посвящены также работы автора совместно с В. И. Агошковым [97, 243, 244].

Естественно, что столь широкий набор проблем, связанных с применением сопряженных уравнений, нуждался в математическом обосновании. Этому посвящена специальная монография, написанная автором совместно с В. И. Агошковым и В. П. Шутяевым [100]. В ней не только рассмотрены вопросы сопряженных уравнений и задач, но и исследована теория возмущений в довольно общем виде со строгим математическим обоснованием новых проблем.

Так как теоретическое обоснование сопряженных уравнений и их применение к решению задач математической физики продвинуто в специальной литературе достаточно глубоко, автор в настоящем издании делает попытку привлечь внимание к этим новым подходам более или менее широкого круга научных сотрудников, инженеров-исследователей и студентов старших курсов, которые, возможно, получат некоторый импульс к созданию технологии проектирования или планирования экспериментов при решении прикладных задач. Эти подходы позволяют во многих случаях получить необходимые сведения о физических процессах и неизвестных параметрах сложных систем. Имея в виду этот круг читателей, автор будет стремиться к простой форме изложения. Обобщение обсуждаемых методов и их строгое математическое обоснование могут быть проведены на основе специальной литературы, список которой читатель найдет в конце книги.

И в заключение хотелось бы отметить еще одну важную особенность рассматриваемой теории сопряженных задач. Именно с их помощью удастся вплотную подойти к проблемам оптимального управления, широко продвинутому в трудах Р. Беллмана [187], Л. С. Понтрягина [146], Н. Н. Красовского [59], Ж.-Л. Лионса [229], Р. Гловинского [208] и многих других исследователей, и проблеме чувстви-

тельности решения основных задач или функционалов от их решений по отношению к входным данным. А это, в свою очередь, позволит глубже проникнуть в природу моделируемых процессов и уточнить математические постановки задач. Особенно это важно в случае нелинейных задач, которые обычно чрезвычайно трудны для анализа и интерпретаций. И здесь значение теории сопряженных задач трудно переоценить.

# **Часть I**

## **Сопряженные уравнения и теория возмущений**

В этой части книги излагаются основы теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений и их применение для решения задач математической физики. Рассмотрены вопросы, связанные с использованием сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений для решения неоднородных стационарных и нестационарных задач, задач на собственные значения, вычисления линейных функционалов (гл. 1, 2). Отдельная глава посвящена изложению материала по теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений в нелинейных задачах (гл. 3). В главе 4 рассматриваются постановки обратных задач математической физики на основе методов сопряженных уравнений и теории возмущений. Излагаемый материал иллюстрирован конкретными примерами, которые также могут быть полезными при рассмотрении более сложных практических задач.



# Глава 1

## Основные и сопряженные уравнения. Теория возмущений

В настоящей главе будут рассмотрены простейшие задачи математической физики, даны элементы теории самосопряженных и сопряженных задач в применении к дифференциальным уравнениям и сформулированы основные принципы теории возмущений. Основным математическим аппаратом для построения сопряженных уравнений будет являться тождество Лагранжа. В настоящей главе будут рассмотрены простейшие задачи математической физики, даны элементы теории самосопряженных и сопряженных задач в применении к дифференциальным уравнениям и сформулированы основные принципы теории возмущений. Основным математическим аппаратом для построения сопряженных уравнений будет являться тождество Лагранжа.

### 1.1. Основные и сопряженные операторы в линейных задачах. Элементы теории

Рассмотрим пример простейшего дифференциального оператора второго порядка

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad (1.1.1)$$

действующего на вещественные функции  $v$ , которые обладают следующими свойствами:

а)  $v(x)$  определены в области  $\Omega = (0, 1)$ , они непрерывны и дважды дифференцируемы во всех внутренних точках этой области;

б)  $v(x)$  квадратично суммируемы на  $\Omega$  вместе со своими производными  $dv/dx$  и  $d^2v/dx^2$ , т. е.

$$\int_0^1 \left\{ \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + v^2(x) \right\} dx < \infty. \quad (1.1.2)$$

Известно, что вещественные функции  $v(x)$ , обладающие свойством  $\int_0^1 v^2(x) dx < \infty$ , образуют гильбертово пространство функций  $H = L_2(\Omega)$ . Далее предположим, что функции  $v(x)$  принимают заданные значения на границе области  $\Omega$  при  $x = 0$  и  $x = 1$ , например

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (1.1.3)$$

Обозначим множество функций  $v(x)$ , удовлетворяющих условиям а), б) и (1.1.3), через  $D(A)$ . Будем называть это множество областью определения оператора  $A$ .

Для функций  $v(x)$  и  $\omega(x)$  в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $\Omega = (0, 1)$  введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(v, \omega) = \int_0^1 v \omega dx. \quad (1.1.4)$$

Поддействуем теперь оператором  $A$  на функцию  $v(x) \in D(A)$ . В результате будем иметь новую функцию  $Av$ , также определенную в  $\Omega = (0, 1)$  и принадлежащую  $H$ . Рассмотрим скалярное произведение функции  $Av$  и  $\omega$ :

$$(Av, \omega) = - \int_0^1 \omega \frac{d^2v}{dx^2} dx \quad (1.1.5)$$

и проинтегрируем полученное выражение (1.1.5) по частям, тогда

$$(Av, \omega) = -\omega \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.1.6)$$

Внеинтегральный член в правой части (1.1.6) обращается в нуль, в силу того что  $v \in D(A)$ , а каждая функция этого множества по предположению (1.1.3) равна нулю на границах интервалов. В результате соотношение (1.1.6) перейдет в следующее:

$$(Av, \omega) = \int_0^1 \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.1.7)$$

Интеграл в (1.1.7) еще раз возьмем по частям. Получим

$$(Av, \omega) = \left. \frac{d\omega}{dx} v \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v \frac{d^2\omega}{dx^2} dx. \quad (1.1.8)$$

Внеинтегральный член в этом соотношении в силу условия (1.1.3) также обратится в нуль. И в результате мы будем иметь

$$(Av, \omega) = - \int_0^1 v \frac{d^2\omega}{dx^2} dx. \quad (1.1.9)$$

Сравнивая соотношения (1.1.5) и (1.1.9), мы приходим к выводу, что

$$(Av, \omega) = (v, A\omega). \quad (1.1.10)$$

Выражение (1.1.10) является тождеством Лагранжа для симметричных операторов. Иначе говоря, если для функций  $v, \omega \in D(A)$  имеет место равенство (1.1.10), то оператор  $A$  является симметричным. Оператор  $A$  можно назвать также формально самосопряженным.

Напомним далее некоторые положения из теории спектральных задач для самосопряженных операторов. Пусть мы имеем спектральную задачу

$$Av = \lambda v, \quad (1.1.11)$$

где оператор  $A$  по-прежнему определен в виде (1.1.1), а функция  $v \in D(A)$  и, следовательно, удовлетворяет однородным граничным условиям (1.1.3). В случае рассматриваемой простейшей задачи операторная запись (1.1.11) может быть заменена дифференциальной:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(1) = 0. \quad (1.1.12)$$

Требуется найти все ненулевые решения задачи (1.1.12). Известно, что такими решениями являются функции

$$v_k(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1.13)$$

при этом

$$\lambda_k = k^2\pi^2.$$

Нетрудно показать, что система собственных функций (1.1.13) ортогональна, т. е.

$$\int_0^1 v_k(x)v_n(x) dx = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Известно, что функции (1.1.13) образуют полную систему, которая позволяет представить в виде ряда любую функцию из  $H = L_2(\Omega)$ .

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$Av = f, \quad (1.1.15)$$

где  $A$  по-прежнему определен в виде (1.1.1), а  $f$  – функция источника, принадлежащая гильбертову пространству  $H$ , с областью определения  $\Omega = (0, 1)$ . В дифференциальной форме мы будем иметь задачу

$$-\frac{d^2v}{dx^2} = f, \quad v(0) = v(1) = 0. \quad (1.1.16)$$

Уравнение из (1.1.16) умножим на функцию  $v_k(x)$  из (1.1.13) и результаты проинтегрируем по всей области определения решения  $\Omega$ . Получим

$$-\int_0^1 v_k \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int_0^1 f v_k dx. \quad (1.1.17)$$

Введем обозначение

$$\int_0^1 f v_k dx = f_k$$

и функцию  $v(x)$  представим в виде ряда Фурье

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n. \quad (1.1.18)$$

Подставим (1.1.18) в соотношение (1.1.17) и воспользуемся тем, что любая функция  $v_k(x)$  удовлетворяет задаче

$$Av_n = \lambda_n v_n. \quad (1.1.19)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \int_0^1 v_n(x) v_k(x) dx = f_k.$$

Используя условие ортогональности (1.1.14), получаем выражение для коэффициентов Фурье

$$\frac{\lambda_k \alpha_k}{2} = f_k,$$

или

$$\alpha_k = \frac{2f_k}{\lambda_k}.$$

Таким образом, решение задачи (1.1.16) будет иметь вид

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n(x)}{\lambda_n}. \quad (1.1.20)$$

Приведем конкретный пример. Пусть  $f(x) = \sin \pi x$ . В этом случае задача (1.1.15) имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 v}{dx^2} &= \sin \pi x, & x \in (0, 1), \\ v(0) &= v(1) = 0. \end{aligned}$$

Используя функции  $v_k(x)$  из (1.1.13), вычисляем  $f_k$ :

$$f_k = \int_0^1 f v_k dx = \int_0^1 \sin \pi x \sin \pi k x dx = \frac{1}{2} \delta_{1k},$$

где

$$\delta_{1k} = \begin{cases} 0, & k \neq 1, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Теперь, зная  $f_k$  и  $\lambda_k = k^2 \pi^2$ , по формуле (1.1.20) определяем решение  $v$ . Оно имеет вид

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n(x)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{1n} v_n(x)}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi^2} v_1(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x,$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Переходим теперь к рассмотрению частного примера несамосопряженного оператора. Предположим, что

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}.$$

Так же как и раньше, предположим, что  $A$  действует на функции  $v$ , принадлежащие множеству  $D(A)$ , определенному выше свойствами а) и б) и условием (1.1.3).

Составим скалярное произведение функции  $Av$ , где  $v \in D(A)$ , и  $\omega \in D(A^*)$  с областью определения  $\Omega = (0, 1)$ . Заметим, что множество  $D(A^*)$ , которому принадлежат элементы  $\omega$ , пока не определено. Свойства этого множества будут уточнены в процессе дальнейших преобразований, которые должны привести нас к тождеству Лагранжа. Итак, рассмотрим соотношение

$$(Av, \omega) = - \int_0^1 \omega \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^1 \omega \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.1.21)$$

Выполним двукратное интегрирование по частям первого из выражений в правой части (1.1.21) и однократное интегрирование по частям второго с учетом условий (1.1.3):

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (1.1.22)$$

Потребуем далее, чтобы для  $\omega(x)$  также выполнялись аналогичные условия

$$\omega(0) = \omega(1) = 0. \quad (1.1.23)$$

Тогда внеинтегральные члены обратятся в нуль и мы получим выражение (1.1.21) в виде

$$(Av, \omega) = - \int_0^1 v \frac{d^2 \omega}{dx^2} dx - \int_0^1 v \frac{d\omega}{dx} dx. \quad (1.1.24)$$

Итак, в процессе получения соотношения (1.1.24) мы выполнили ряд преобразований, которые требуют не только квадратичной суммируемости на  $\Omega = (0, 1)$  функции  $\omega(x)$ , но и ее производных  $d\omega/dx$ ,  $d^2\omega/dx^2$ , т. е.

$$\int_0^1 \left\{ \left( \frac{d^2\omega}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2 + \omega^2(x) \right\} dx < \infty.$$

Если к этим свойствам еще добавить условие на границе (1.1.23) для функции  $\omega(x)$ , т. е.

$$\omega(0) = \omega(1) = 0,$$

то мы приходим к множеству  $D(A^*)$ . Если далее ввести обозначение

$$A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx},$$

то соотношение (1.1.24) окончательно запишем в виде

$$(Av, \omega) = (v, A^*\omega), \quad v \in D(A), \quad \omega \in D(A^*). \quad (1.1.25)$$

Соотношение (1.1.25) является тождеством Лагранжа. В этом случае мы уже имеем два оператора: основной  $A$  и сопряженный к нему  $A^*$ .

Уравнение вида

$$Av = f$$

с оператором  $A$  и некоторой правой частью  $f \in H$  будем называть *основным уравнением*, а неоднородное уравнение с оператором  $A^*$  вида

$$A^*\omega = p$$

будем называть *сопряженным уравнением*. Здесь  $p$  – пока произвольная функция, вид и свойства которой будут определяться в зависимости от решаемой задачи. Уравнения  $Av = f$  и  $A^*\omega = p$  в дифференциальной форме имеют вид

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$v(0) = v(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = p(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$\omega(0) = \omega(1) = 0$$

и называются основной и сопряженной задачами соответственно.

Приведем численный пример. Рассмотрим  $f(x) = x(1-x)$ ,  $p(x) = 1$ . Тогда задачи  $Av = f$  и  $A^*\omega = p$  принимают вид

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = x(1-x), \quad x \in (0, 1),$$

$$v(0) = v(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = 1, \quad x \in (0, 1),$$

$$\omega(0) = \omega(1) = 0.$$

Для численного решения этих задач был применен метод конечных разностей на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ , и построены схемы второго порядка аппроксимации по  $h$ . Полученные при этом трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений были решены методом факторизации, или прогонки (см., например, [79]). Графики решений основной и сопряженной задач приведены на рисунке 1.1.

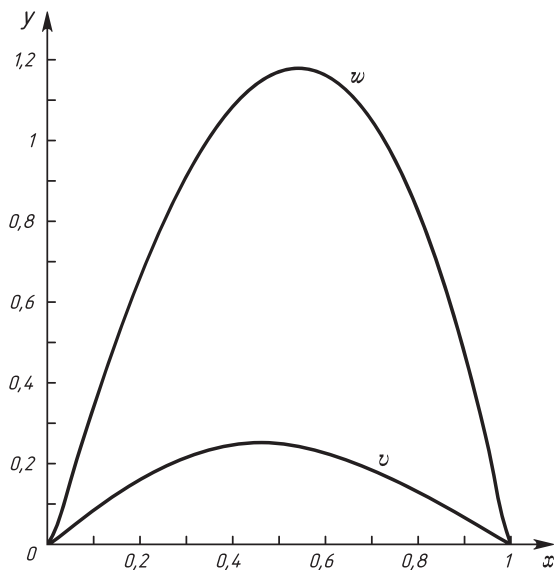


Рис. 1.1

В случае несамосопряженного оператора видоизменяется и формулировка спектральной задачи. В самом деле, для вещественных  $v$  и  $\omega$  рассматриваются теперь две задачи: основная

$$Av = \lambda v \tag{1.1.26}$$



и сопряженная

$$A^*\omega = \lambda\omega. \quad (1.1.27)$$

В дифференциальном представлении имеем основную задачу

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = \lambda v, \quad v(0) = v(1) = 0, \quad (1.1.28)$$

и сопряженную к ней

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = \lambda\omega, \quad \omega(0) = \omega(1) = 0. \quad (1.1.29)$$

Нетрудно найти все решения задач (1.1.28), (1.1.29):

$$v_k(x) = e^{x/2} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1.30)$$

$$\omega_n(x) = e^{-x/2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.1.31)$$

они отвечают собственным значениям  $\lambda_k = 1/4 + \pi^2 k^2$ . Очевидно, что  $v_k(x)$  не ортогональны друг другу, так же как не ортогональны друг другу  $\omega_n(x)$ . Однако имеет место биортогональность функций  $v_k(x)$  и  $\omega_n(x)$ , т. е.

$$(v_k, \omega_n) = 0 \quad \text{при } k \neq n, \quad (1.1.32)$$

и отличным от нуля это скалярное произведение будет только при  $k = n$ . Для простейшего нашего случая оно равно

$$(v_n, \omega_n) = 1/2. \quad (1.1.33)$$

Итак, мы пришли к условию биортогональности. Биортогональность и полнота функций  $\{v_k\}$  и  $\{\omega_n\}$  потребуются нам при разложении функций из  $H$  в ряды Фурье.

Обратим внимание на метод определения множества  $D(A^*)$  по заданному основному оператору  $A$ . Указанные свойства  $D(A^*)$  будем определять всякий раз, имея в виду конкретную постановку задачи в дифференциальной или интегро-дифференциальной постановке. Метод проиллюстрируем на простейшем примере оператора

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}. \quad (1.1.34)$$

На этот раз предположим, что оператор  $A$  действует на функции  $v \in D(A) \subset H$ , которые удовлетворяют только свойствам а) и б). Что касается граничных условий, то мы их выберем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + \beta v &= 0 & x &= 0, \\ v &= 0 & x &= 1, \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

где  $\beta$  – некоторая заданная константа. Пусть функции  $\omega \in D(A^*)$  (свойства которых нам пока неизвестны). Будем определять их последовательно, предположив, что все дальнейшие преобразования с функциями  $\omega$  обоснованны. А в заключение сформулируем апостериори те свойства, которые обеспечивают такое предположение.

Итак, рассмотрим, как и прежде, выражение (1.1.21):

$$(Av, \omega) = - \int_0^1 \omega \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^1 \omega \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.1.36)$$

Выражение справа в (1.1.36) проинтегрируем по частям: первый член – дважды, а второй – один раз. Тогда

$$\begin{aligned} (Av, \omega) &= - \omega(1) \frac{dv}{dx} \Big|_{x=1} + \omega(0) \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=1} v(1) - \\ &- \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0} v(0) + \omega(1)v(1) - \omega(0)v(0) + (v, A^*\omega), \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

где

$$A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}.$$

Для того чтобы имело место строгое тождество Лагранжа (1.1.24):  $(Av, \omega) = (\omega, A^*\omega)$ , необходимо, чтобы внеинтегральные члены в (1.1.37) обратились в нуль, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} -\omega(1) \frac{dv}{dx} \Big|_{x=1} + \omega(0) \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=1} v(1) - \\ - \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0} v(0) + \omega(1)v(1) - \omega(0)v(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

Выражение (1.1.38) несколько упростим, используя условия (1.1.35) на функции  $v \in D(A)$ , т. е.

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} + \beta v(0) = 0, \quad v(1) = 0. \quad (1.1.39)$$

Исключим  $\frac{dv}{dx}(0)$  в (1.1.38), приняв  $\frac{dv}{dx}(0) = -\beta v(0)$ . И, положив  $v(1) = 0$ , соотношение (1.1.38) запишем в виде

$$-\omega(1) \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} - \beta \omega(0) v(0) - \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} v(0) - \omega(0) v(0) = 0. \quad (1.1.40)$$

Приведя подобные члены при  $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1}$  и  $v(0)$ , получим

$$-\omega(1) \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} - \left[ (\beta + 1) \omega(0) + \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} \right] v(0) = 0. \quad (1.1.41)$$

Равенство (1.1.41) должно выполняться при произвольных  $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1}$  и  $v(0)$ . В этом случае необходимо положить

$$\omega(1) = 0, \quad (\beta + 1) \omega(0) + \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

В результате приходим к граничным условиям для всех функций  $\omega \in D(A^*)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} + (\beta + 1) \omega &= 0 & x = 0, \\ \omega &= 0 & x = 1. \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

Теперь подведем итог и сформулируем все требования к функциям  $\omega \in D(A^*)$ . При получении тождества Лагранжа мы выполнили ряд преобразований, которые требуют квадратичной суммируемости на  $\Omega = (0, 1)$  функции  $\omega(x)$  вместе с ее производными  $d\omega/dx$ ,  $d^2\omega/dx^2$ . Кроме того, каждая функция  $\omega \in D(A^*)$  должна удовлетворять граничным условиям (1.1.42). При выполнении этих условий имеет место тождество Лагранжа и оператор  $A^*$  на  $\omega \in D(A^*)$  является сопряженным к  $A$ .

В этом случае неоднородное уравнение

$$Av = f \quad (1.1.43)$$

с оператором  $A$  из (1.1.34) представляет собой краевую задачу вида

$$\begin{aligned} -\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} &= f(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{dv}{dx} + \beta v &= 0 & x = 0, \\ v &= 0 & x = 1, \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

а сопряженное уравнение

$$A^*\omega = p \quad (1.1.45)$$

с некоторой правой частью  $p(x)$  имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} &= p(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{d\omega}{dx} + (\beta + 1)\omega &= 0 & x = 0, \\ \omega &= 0 & x = 1. \end{aligned} \quad (1.1.46)$$

Для иллюстрации приведем два численных примера. Рассмотрим

$$\beta = -5, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 0, 3], \\ 0, & x \notin [0; 0, 3]; \end{cases} \quad p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 8; 1], \\ 0, & x \notin [0, 8; 1]. \end{cases}$$

Тогда задачи (1.1.44) и (1.1.46) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} &= f(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{dv}{dx} - 5v &= 0 & x = 0, \\ v &= 0 & x = 1, \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} &= p(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{d\omega}{dx} - 4\omega &= 0 & x = 0, \\ \omega &= 0 & x = 1. \end{aligned} \quad (1.1.48)$$

Для численного решения этих задач были использованы простейшие конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ . Полученные при этом трехдиагональные системы линейных уравнений были решены методом факторизации [79]. Графики решений основной и сопряженной задач (1.1.47) и (1.1.48) приведены на рисунке 1.2.

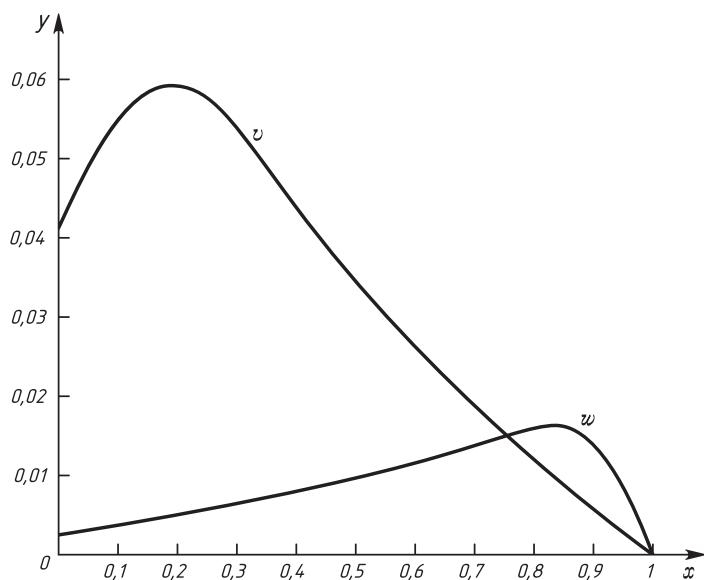


Рис. 1.2

Пусть теперь

$$\beta = -1, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 7; 1], \\ 0, & x \notin [0, 7; 1]; \end{cases} \quad p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 0, 3], \\ 0, & x \notin [0; 0, 3]. \end{cases}$$

Тогда задачи (1.1.44) и (1.1.46) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} &= f(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{dv}{dx} - v &= 0 & x = 0, \\ v &= 0 & x = 1, \end{aligned} \tag{1.1.49}$$

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} &= p(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{d\omega}{dx} &= 0 & x = 0, \\ \omega &= 0 & x = 1. \end{aligned} \tag{1.1.50}$$

На рисунке 1.3 приведены для сравнения графики численного решения основной и сопряженной задач (1.1.49) и (1.1.50).

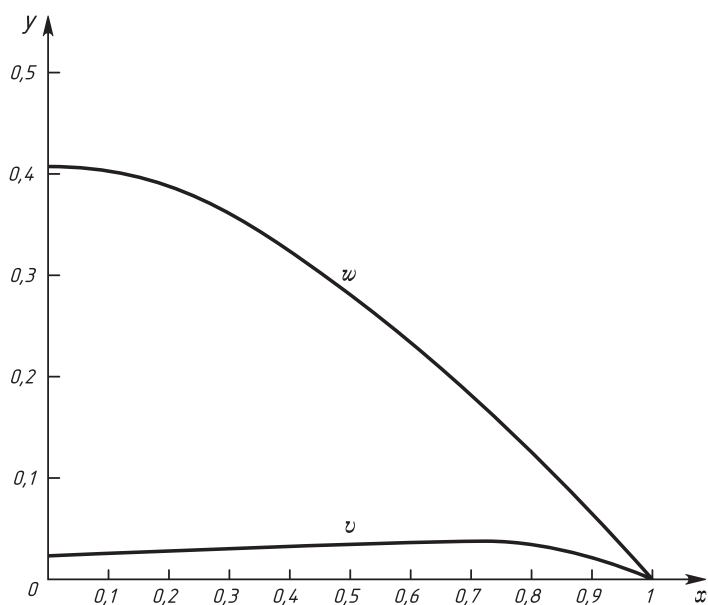


Рис. 1.3

## 1.2. Сопряженные операторы в спектральных задачах. Метод Фурье

Сформулируем некоторые общие положения теории сопряженных операторов, которыми будем пользоваться при анализе прикладных задач. С этой целью введем в рассмотрение вещественные функции, квадратично суммируемые в некоторой области определения  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , ( $n \geq 1$ ), т. е.

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c < \infty, \quad (1.2.1)$$

где  $x$  – обобщенная координата. Как известно, класс таких функций образует гильбертово пространство  $H = L_2(\Omega)$ . В этом пространстве определим скалярное произведение

$$(u, \omega) = \int_{\Omega} u \omega dx. \quad (1.2.2)$$

Рассмотрим далее линейный оператор  $A$ , действующий на функции  $v$ , принадлежащие множеству  $D(A)$ , каждый элемент которого наряду

с условием (1.2.1) удовлетворяет таким условиям гладкости, что оператор  $A$ , действующий на функции  $v$ , имеет смысл и  $Av$  принадлежит гильбертову пространству  $H = L_2(\Omega)$ . Кроме того, предположим, что функции  $v$  удовлетворяют определенным граничным условиям и  $D(A)$  плотно в  $H$ .

Введем теперь в рассмотрение функции  $\omega$ , принадлежащие новому множеству  $D(A^*)$ , свойства которого будут установлены в дальнейшем.

Наряду с основным оператором  $A$  введем в рассмотрение сопряженный оператор  $A^*$ , удовлетворяющий следующему тождеству Лагранжа:

$$(Av, \omega) = (v, A^*\omega), \quad (1.2.3)$$

где  $v \in D(A)$ ,  $\omega \in D(A^*)$ . Здесь и всюду в дальнейшем ради простоты предполагается, что оператор  $A$  и функции  $v, \omega$  вещественны. Алгоритмически левую часть выражения (1.2.3) обычно удается преобразовать в выражение, стоящее в правой части, на основе интегродифференциальных преобразований типа формулы Грина, интегрирования по частям и т. д. При этих преобразованиях появляются некоторые дополнительные члены, не входящие в структуру выражения  $(v, A^*\omega)$  и зависящие от функций  $u$  и  $\omega$  на границе области  $\Omega$ . Совокупность этих дополнительных членов необходимо положить равной нулю. Используя граничные условия для функции  $v$ , можно получить те граничные условия для  $\omega$ , которые позволяют выполнить тождество (1.2.3). В процессе преобразования  $(Av, \omega)$  в  $(v, A^*\omega)$  требуется наложение определенных условий гладкости на функцию  $\omega$ , чтобы выражение  $A^*\omega$  имело смысл и являлось функцией пространства  $H = L_2(\Omega)$ .

Таким образом, квадратичная суммируемость функции  $\omega$  вместе с соответствующими требованиями к гладкости и граничные условия позволяют определить апостериори множество  $D(A^*)$ . Такова общая схема определения сопряженного оператора  $A^*$  и его области определения  $D(A^*)$ .

В том случае, когда  $A^* = A$  и  $D(A^*) = D(A)$ , оператор  $A$  является самосопряженным. Класс таких операторов достаточно широк и имеет большой самостоятельный интерес.

До сих пор мы изучали свойства основных и сопряженных операторов и классов функций. Теперь мы рассмотрим спектральную задачу. Для несамосопряженных операторов необходимо рассматривать два однородных уравнения:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, & v &\in D(A), \\ A^* \omega &= \lambda \omega, & \omega &\in D(A^*). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Предположим, что обе спектральные задачи (1.2.4) допускают существование двух полных в  $H$  вещественных систем собственных функций: основных  $\{v_k\}$  и сопряженных  $\{\omega_k\}$ , соответствующих собственным значениям  $\{\lambda_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ )<sup>1</sup>. Полнота собственных функций в дальнейшем потребуется нам для разложения функций в ряды Фурье. А пока мы покажем, что имеет место условие биортогональности. С этой целью рассмотрим две собственные функции  $v_k$  и  $\omega_n$ , удовлетворяющие соответственно задачам

$$\begin{aligned} Av_k &= \lambda_k v_k, \\ A^* \omega_n &= \lambda_n \omega_n. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Умножим скалярно первое из уравнений (1.2.5) на  $\omega_n$ , а второе на  $v_k$  и результаты вычтем один из другого. Получим

$$\begin{aligned} (Av_k, \omega_n) - (v_k, A^* \omega_n) &= (\lambda_k - \lambda_n)(v_k, \omega_n), \\ n &= 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Поскольку операторы  $A$  и  $A^*$  сопряженные, то левая часть соотношения (1.2.6) обращается в нуль вследствие тождества Лагранжа, и мы будем иметь

$$(\lambda_k - \lambda_n)(v_k, \omega_n) = 0. \quad (1.2.7)$$

Если  $k \neq n$  и  $\lambda_k \neq \lambda_n$ , то для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы

$$(v_k, \omega_n) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ (v_n, \omega_n), & k = n. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Условия (1.2.8) называют соотношением биортогональности. Оно необходимо для разложения функции в ряд Фурье по собственным функциям основной или сопряженной спектральной задачи.

---

<sup>1</sup>Этому условию удовлетворяет оператор  $A$ , имеющий вполне непрерывный обратный оператор со счетным множеством собственных значений, в частности все линейные дифференциальные операторы в граничных задачах теории дифференциальных уравнений и в задачах математической физики, имеющие обратные операторы, представляющие собой операторы Гильберта – Шмидта.



В самом деле, предположим, что нам необходимо функцию  $f$  из  $H$  представить в виде ряда Фурье

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n, \quad (1.2.9)$$

где  $f_n$  – искомые коэффициенты Фурье. Эти коэффициенты получим следующим образом. Умножим ряд (1.2.9) почленно на функцию  $\omega_k$ . Тогда

$$(f, \omega_k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (v_n, \omega_k). \quad (1.2.10)$$

С учетом соотношения биортогональности (1.2.8) все члены ряда, кроме  $n = k$ , обратятся в нуль, и в результате получим

$$(f, \omega_k) = f_k (v_k, \omega_k). \quad (1.2.11)$$

Отсюда следует, что

$$f_k = (f, \omega_k) / (v_k, \omega_k). \quad (1.2.12)$$

Естественно, что при разложении функции  $f$  в ряд необходимо доказать, что ряд (1.2.9) сходится к этой функции.

Аналогичным образом можно осуществить разложение любой функции  $g \in H$  в ряд по собственным функциям  $\omega_n$  сопряженного оператора:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \omega_n. \quad (1.2.13)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы приходим к выражению для коэффициента Фурье  $g_n$ :

$$g_n = (v_n, g) / (v_n, \omega_n). \quad (1.2.14)$$

Наконец, мы переходим к уравнению с источниками. Пусть рассматривается задача

$$A\varphi = f, \quad (1.2.15)$$

где  $\varphi \in D(A)$ , а  $f \in H$ .

Решим задачу (1.2.15) с помощью ряда Фурье, имея в виду, что в нашем распоряжении уже имеются функции  $\{v_n\}$  и  $\{\omega_n\}$ , являющиеся решениями спектральных задач (1.2.5). Решение  $\varphi$  и функцию  $f$  представим в виде рядов Фурье:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n. \quad (1.2.16)$$

Умножим скалярно уравнение (1.2.15) на  $\omega_k$  и получим

$$(A\varphi, \omega_k) = (f, \omega_k). \quad (1.2.17)$$

В это соотношение подставим ряды (1.2.16). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (Av_n, \omega_k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (v_n, \omega_k). \quad (1.2.18)$$

В соответствии с (1.2.5) имеем

$$Av_n = \lambda_n v_n,$$

а используя биортогональность функции  $v_n$  и  $\omega_n$ , получаем

$$\lambda_k \varphi_k (v_k, \omega_k) = f_k (v_k, \omega_k). \quad (1.2.19)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_k = f_k / \lambda_k.$$

Таким образом, решение задачи найдется в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n}{\lambda_n}. \quad (1.2.20)$$

Далее, исходя из свойств оператора  $A$ , необходимо доказать сходимость ряда к решению задачи (1.2.15). Это каждый раз делается конкретно, на основе общих или частных результатов функционального анализа.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим следующую задачу:

$$-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = e^{x/2} \sin 2\pi x, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (1.2.21)$$

Эту задачу можно записать в операторном виде (1.2.15), где  $f(x) = e^{x/2} \sin 2\pi x$ , а оператор  $A = -d^2/dx^2 + d/dx$  определен в лекции 1 (см. (1.1.34)).

Решение задачи (1.2.21) можно найти методом Фурье по формуле (1.2.20):

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n}{\lambda_n}, \quad (1.2.22)$$

где  $f_n = (f, \omega_n)/(v_n, \omega_n)$ . Здесь  $v_k$  и  $\omega_k$  – собственные функции задач (1.2.5), которые в данном случае имеют вид

$$-\frac{d^2 v_k}{dx^2} + \frac{dv_k}{dx} = \lambda_k v_k, \quad x \in (0, 1), \quad v_k(0) = v_k(1) = 0; \quad (1.2.23)$$

$$-\frac{d^2 \omega_n}{dx^2} - \frac{d\omega_n}{dx} = \lambda_n \omega_n, \quad x \in (0, 1), \quad \omega_n(0) = \omega_n(1) = 0. \quad (1.2.24)$$

При этом, как следует из § 1.1 (см. (1.1.30), (1.1.31)),

$$\lambda_k = 1/4 + \pi^2 k^2, \quad v_k(x) = e^{x/2} \sin \pi k x, \quad \omega_n(x) = e^{-x/2} \sin \pi n x,$$

$$(v_k, \omega_n) = \frac{1}{2} \delta_{kn}, \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Используя эти равенства, вычислим  $f_n$ :

$$f_n = \frac{(f, \omega_n)}{(v_n, \omega_n)} = 2 \int_0^1 f(x) \omega_n(x) dx = 2 \int_0^1 \sin 2\pi x \sin \pi n x dx = \delta_{2n}.$$

Тогда по формуле (1.2.22) определяем решение  $\varphi$  задачи (1.2.21):

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{2n} v_n}{\lambda_n} = \frac{v_2(x)}{\lambda_2} = \frac{e^{x/2} \sin 2\pi x}{1/4 + 4\pi^2} = \\ &= \frac{4}{1 + 16\pi^2} e^{x/2} \sin 2\pi x, \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

что можно проверить непосредственной подстановкой  $\varphi$  в (1.2.21).

Пусть теперь рассматривается сопряженная задача с оператором  $A^*$ :

$$A^* \varphi^* = p, \quad (1.2.26)$$

где  $\varphi^* \in D(A^*)$ ,  $p \in H$ . Эту задачу также можно решить с помощью метода Фурье. Решение  $\varphi^*$  и функцию  $p$  представим в виде рядов Фурье по собственным функциям  $\{\omega_n\}$  сопряженного оператора  $A^*$ :

$$\varphi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \omega_n, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \omega_n, \quad (1.2.27)$$

где  $\varphi_n$  – неизвестные коэффициенты, а  $p_n = (v_n, p)/(v_n, \omega_n)$  (см. (1.2.14)).

Умножив уравнение (1.2.26) скалярно на  $v_k$ , получим

$$(v_k, A^* \varphi^*) = (v_k, p). \quad (1.2.28)$$

Подставив в это соотношение ряды (1.2.27), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (v_k, A^* \omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (v_k, \omega_n). \quad (1.2.29)$$

Поскольку (см. (1.2.5))

$$A^* \omega_n = \lambda_n \omega_n$$

и выполнено условие биортогональности (1.2.8), то из (1.2.29) следует, что

$$\lambda_k \varphi_k (v_k, \omega_k) = p_k (v_k, \omega_k).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_k = \frac{p_k}{\lambda_k}, \quad (1.2.30)$$

и согласно (1.2.27) решение сопряженной задачи будет иметь вид

$$\varphi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \omega_n}{\lambda_n}. \quad (1.2.31)$$

Далее, как и в случае основной задачи, необходимо доказать сходимость ряда (1.2.31) к решению задачи (1.2.26), что делается в каждом конкретном случае на основе теорем функционального анализа, исходя из свойств оператора  $A^*$ . В случае, если  $\lambda_n$  – комплексные числа, то в сопряженной спектральной задаче для  $\omega_n$ , как известно, вместо  $\lambda_n$  будут присутствовать комплексно сопряженные числа  $\bar{\lambda}_n$ .

### 1.3. Сопряженные уравнения и функционалы. Элементы теории

Переходим к рассмотрению основных и сопряженных уравнений с источниками. Начнем с простейших примеров. Рассмотрим задачу

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (1.3.1)$$

Пусть решение задачи (1.3.1)  $\varphi(x)$  принадлежит множеству  $D(A)$ , введенному в § 1.1, а  $f(x)$  принадлежит  $H = L_2(0, 1)$  – пространству вещественных интегрируемых с квадратом функций. Оператор  $A = -d^2/dx^2$  на функциях из  $D(A)$  является симметричным. Решение задачи нетрудно получить в явном виде:

$$\varphi(x) = x \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''. \quad (1.3.2)$$

Предположим, что нам требуется знание не самого решения  $u(x)$  в  $\Omega = (0, 1)$ , а лишь конкретного функционала от этого решения. Пусть это будет

$$J = \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx, \quad (1.3.3)$$

где  $p(x)$  – характеристика прибора или измерения. Например, если

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq 1, \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

то это означает, что прибор интегрирует значение решения лишь в интервале  $\alpha \leq x \leq \beta$  и не реагирует на решение в оставшейся части интервала.

Теперь покажем, что тот же функционал  $J$  можно получить на основе специальным образом сформулированной сопряженной задачи. Рассмотрим сопряженную задачу

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p(x), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0, \quad (1.3.5)$$

где  $p(x)$  определено в функционале (1.3.3). Будем считать, что  $\varphi^*(x)$  принадлежит тому же множеству  $D(A)$ , что и решение основной задачи. Тогда умножим уравнение из (1.3.1) на  $\varphi^*$ , уравнение из (1.3.5)

на  $\varphi$ , результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по всей области определения решения:

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx + \int_0^1 \varphi \frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} dx = \int_0^1 f \varphi^* dx - \int_0^1 p \varphi dx. \quad (1.3.6)$$

Интегрированием по частям дважды одного из членов в левой части (1.3.6) с учетом граничных условий легко показать, что левая часть равна нулю. Это получаем и непосредственно, имея в виду тождество Лагранжа. Тогда (1.3.6) переходит в следующее соотношение:

$$\int_0^1 f \varphi^* dx - \int_0^1 p \varphi dx = 0. \quad (1.3.7)$$

Но второй член в (1.3.7) является искомым функционалом. Тогда две эквивалентные формулы для его определения имеют вид

$$J = \int_0^1 p \varphi dx, \quad J = \int_0^1 f \varphi^* dx. \quad (1.3.8)$$

Таким образом, мы получили двойственную формулу для определения одного и того же функционала. Во многих сложных задачах оказывается более предпочтительно пользоваться второй формулой из (1.3.8), особенно в тех случаях, когда функция источника  $f(x)$  в вариациях задачи меняется, а оператор и граничные условия остаются прежними.

Приведем численный пример. Пусть основная задача имеет вид

$$\begin{aligned} -d^2 \varphi / dx^2 &= f(x), & f(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0; 0,4], \\ 0, & x \notin [0; 0,4], \end{cases} \\ \varphi(0) = \varphi(1) &= 0; \end{aligned}$$

и нам требуется вычислить функционал (1.3.3), где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,7; 1], \\ 0, & x \notin [0,7; 1]. \end{cases}$$

Этот же функционал мы можем вычислить и по формуле

$$J = \int_0^1 f(x) \varphi^*(x) dx = \int_0^{0,4} \varphi^*(x) dx,$$

где  $\varphi^*(x)$  – решение сопряженной задачи:

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0.$$

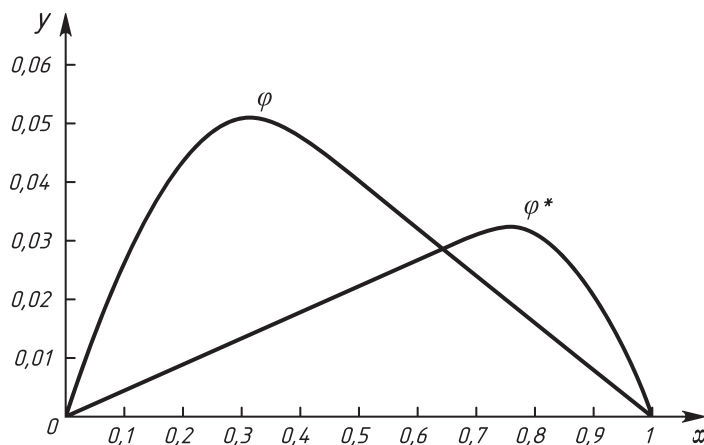


Рис. 1.4

Основная и сопряженная задачи были решены численно методом конечных элементов на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ . Графики решений этих задач приведены на рисунке 1.4. С помощью квадратурной формулы Симпсона были вычислены значения функционалов

$$J^{(1)} = \int_{0,7}^1 \varphi(x) dx, \quad J^{(2)} = \int_0^{0,4} \varphi^*(x) dx$$

и установлено, что

$$J^{(1)} = 0,003\,599\,722\,9, \quad J^{(2)} = 0,003\,599\,722\,1.$$

Таким образом, в данном случае значения функционалов  $J^{(1)}$  и  $J^{(2)}$  различаются лишь в десятом знаке после запятой (здесь  $h = 10^{-2}$ ).

Если теперь меняется физическое измерение, то меняется и функционал, и, следовательно, требуется решать новую задачу (1.3.5), т. е. с другой характеристикой прибора  $p(x)$ .

Рассмотрим теперь на нашем простейшем примере проблему чувствительности функционала  $J$  к источнику  $f(x)$ . С этой целью пред-

положим, что вместо задачи (1.3.1), которую будем называть невозмущенной, рассмотрим новую возмущенную задачу

$$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} = f'(x), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \quad (1.3.9)$$

Здесь предположено, что  $f'(x) = f(x) + \delta f$ . Поскольку задача (1.3.9) линейна, то ее решение имеет вид

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x),$$

где штрихом обозначается возмущенная функция. Тогда для вариаций функционала в формуле

$$J' = J + \delta J$$

получим два эквивалентных соотношения:

$$\delta J = \int_0^1 p \delta\varphi(x) dx, \quad \delta J = \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx. \quad (1.3.10)$$

Вторая из формул (1.3.10) замечательна тем, что позволяет непосредственно связать вариацию источника в основной задаче с вариацией исследуемого функционала. Кроме того, для этого не нужно решать возмущенную задачу (1.3.9) и находить  $\delta\varphi$ . Здесь  $\varphi^*(x)$  играет роль весовой функции, которая ответственна за чувствительность функционала. В связи с этим сопряженную функцию  $\varphi^*(x)$  иногда называют *функцией ценности информации*, или просто *ценностью*.

Важно отметить, что при введенных функционалах исходные задачи даже с самосопряженными операторами порождают задачи просто сопряженные. Такие задачи удобно называть сопряженными по отношению к выбранным функционалам.

Приведем численный пример. Пусть  $f(x) = x$  и  $p(x) \equiv 1$ . Тогда основная задача (1.3.1) примет вид

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = x, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

и нам требуется вычислить функционал (1.3.3)

$$J = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$



Пусть далее  $f'(x) = f(x) + \delta f$ , где  $\delta f = \varepsilon \sin \pi x$ , тогда возмущенная задача (1.3.9) примет вид

$$-\frac{d^2 \varphi'}{dx^2} = x + \varepsilon \sin \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Для вычисления поправки  $\delta J = J' - J$  воспользуемся формулами

$$\delta J^{(1)} = \int_0^1 \delta \varphi dx, \quad \delta J^{(2)} = \varepsilon \int_0^1 \sin \pi x \varphi^*(x) dx,$$

где  $\varphi^*(x)$  – решение сопряженной задачи (1.3.5), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} = 1, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0.$$

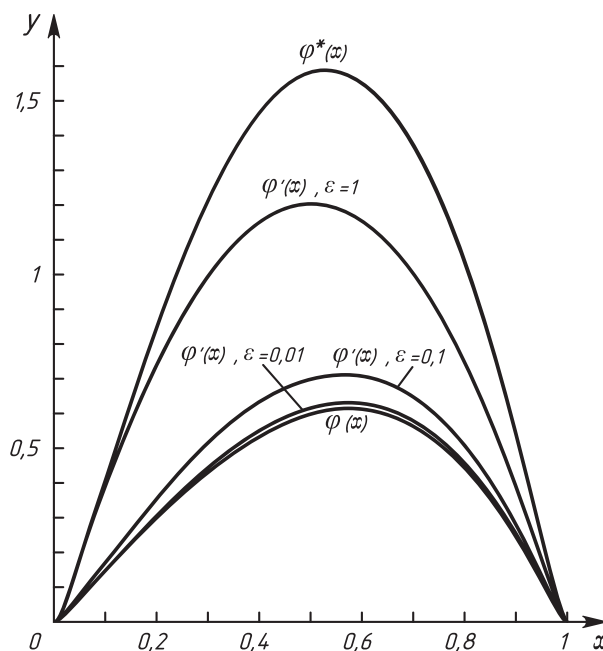


Рис. 1.5

Методом конечных разностей были решены все три задачи (основная, возмущенная и сопряженная) и найдены значения решений  $\varphi, \varphi', \varphi^*$  в узлах сетки  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 1/N$  с шагом

$h = 0,01$ . Рассматривались значения  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$  и  $\varepsilon = 0,01$ . Графики функций  $\varphi$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi^*$  приведены на рисунке 1.5. Как показали численные расчеты,  $\varphi' \rightarrow \varphi$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Сравнение значений функционалов  $\delta J^{(1)}$  и  $\delta J^{(2)}$  при различных  $\varepsilon$  приведено в таблице 1. Отметим, что различия в значениях функционалов  $\delta J^{(1)}$  и  $\delta J^{(2)}$  обусловлены ошибками аппроксимации, допущенными при реализации вычислительного алгоритма<sup>2</sup>.

**Таблица 1. Сравнение значений функционалов  $\delta J^{(1)}$  и  $\delta J^{(2)}$  при различных  $\varepsilon$**

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0$
$\delta J^{(1)}$	$5,590\,95 \cdot 10^{-2}$	$5,59\,096 \cdot 10^{-3}$	$5,590\,94 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta J^{(2)}$	$5,594\,17 \cdot 10^{-2}$	$5,594\,17 \cdot 10^{-3}$	$5,594\,18 \cdot 10^{-4}$	0

Рассмотрим теперь пример несамосопряженного оператора. Пусть

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \quad (1.3.11)$$

есть оператор, введенный в § 1.1, действующий в  $H$  на функции, принадлежащие  $D(A)$ . Рассмотрим основную задачу в виде

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = f(x), \quad x \in (0,1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (1.3.12)$$

Пусть нам требуется найти значение функционала

$$J = \int_0^1 p(x)\varphi(x) dx, \quad (1.3.13)$$

где  $p(x)$  – заданная функция из  $H$ . Покажем, что этот же функционал  $J$  можно получить и по другой формуле, используя решение соответствующей сопряженной задачи.

В § 1.1 было показано, что сопряженный по отношению к  $A$  оператор  $A^*$  имеет вид

$$A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}; \quad (1.3.14)$$

<sup>2</sup>Здесь и в дальнейшем в численных примерах под  $\varphi, \varphi', \varphi^*$  понимаются приближенные решения соответствующих задач.

он определен на функциях  $\varphi^*$  множества  $D(A^*)$ , удовлетворяющих условию на границе  $\varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0$ .

Рассмотрим сопряженную (по отношению к (1.3.12)) задачу

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} - \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0 \quad (1.3.15)$$

с правой частью  $p(x)$ , которая определяет функционал (1.3.13).

Уравнение из (1.3.12) умножим на  $\varphi^*$ , а уравнение из (1.3.15) – на  $\varphi$ , результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по  $x$  на  $[0,1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( -\varphi^* \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} \right) dx + \int_0^1 \left( \varphi \frac{d^2\varphi^*}{dx^2} + \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \right) dx = \\ = \int_0^1 f\varphi^* dx - \int_0^1 p\varphi dx. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Интегрируя дважды по частям один из членов в левой части (1.3.16) с учетом граничных условий, убеждаемся, что левая часть (1.3.16) равна нулю. (Это также следует из тождества Лагранжа, использованного в § 1.1 для отыскания сопряженного оператора  $A^*$ .) Тогда из (1.3.16) получаем, что

$$\int_0^1 f\varphi^* dx = \int_0^1 p\varphi dx,$$

т. е. наряду с (1.3.13) имеет место следующая формула для определения функционала  $J$ :

$$J = \int_0^1 f(x)\varphi^* dx. \quad (1.3.17)$$

Приведем численный пример. Основную задачу рассмотрим в виде

$$-2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + 3\varphi = f(x), \quad x \in (0,1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/2, 2/3], \\ 0, & x \notin [1/2, 2/3]. \end{cases}$$

Пусть требуется вычислить функционал

$$J = \int_{1/4}^{1/3} \varphi(x) dx.$$

Введем сопряженную задачу

$$-2 \frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} - \frac{d\varphi^*}{dx} + 3\varphi^* = p(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0,$$

где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/4, 1/3], \\ 0, & x \notin [1/4, 1/3]. \end{cases}$$

Основная и сопряженная задачи были решены методом конечных разностей на сетке с шагом  $h = 0,01$ . Графики функций  $\varphi$  и  $\varphi^*$  приведены на рисунке 1.6. Функционал  $J$  был вычислен двумя способами – по формуле (1.3.13) и по формуле (1.3.17):

$$J \approx 0,150\,47 \cdot 10^{-2}, \quad J \approx 0,149\,99 \cdot 10^{-2}.$$

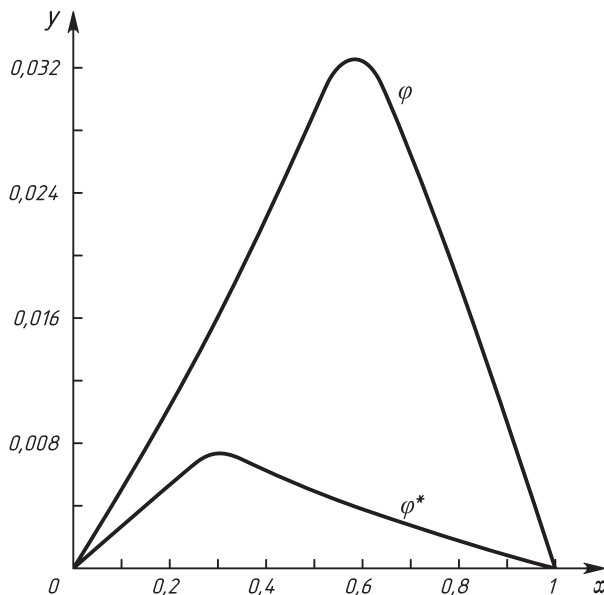


Рис. 1.6

Как мы видим, расхождения в значениях функционалов – порядка  $0(h^2)$ . (Интегралы вычислялись с помощью квадратурной формулы Симпсона с шагом  $h = 0,01$ .)

Рассмотрим теперь чувствительность функционала  $J$  к источнику  $f(x)$ . Пусть вместо задачи (1.3.12), которую будем называть невозмущенной, имеем другую задачу – возмущенную:

$$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d\varphi'}{dx} = f'(x), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0, \quad (1.3.18)$$

где  $f'(x) = f(x) + \delta f(x)$ .

Представим  $\varphi'(x)$  в виде

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  – решение невозмущенной задачи (1.3.12), а  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$ . Тогда для вариации функционала  $\delta J = J' - J$  получим аналогично (1.3.10) две эквивалентные формулы:

$$\delta J = \int_0^1 p(x) \delta\varphi(x) dx, \quad (1.3.19)$$

$$\delta J = \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx. \quad (1.3.20)$$

Приведем численный пример. Пусть

$$f(x) = \sin \pi x, \quad \delta f(x) = \varepsilon \sin 2\pi x,$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Задачи (1.3.12), (1.3.15), (1.3.18) были решены методом конечных элементов на равномерной сетке с шагом  $h = 0,01$ . Были рассчитаны значения функционалов

$$\delta J^{(1)} = \int_0^1 p(x) \delta\varphi(x) dx, \quad \delta J^{(2)} = \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx$$

при  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$  и  $\varepsilon = 0,01$ . Сравнение этих значений приведено в таблице 2.

**Таблица 2. Сравнение значений функционалов при различных  $\varepsilon$**

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0$
$\delta J^{(1)}$	$0,7227 \cdot 10^{-2}$	$0,7229 \cdot 10^{-3}$	$0,7231 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta J^{(2)}$	$0,7241 \cdot 10^{-2}$	$0,7240 \cdot 10^{-3}$	$0,7239 \cdot 10^{-4}$	0

В заключение данной лекции отметим, что формулы вида (1.3.19), (1.3.20) получаются и в общем случае, когда рассматривается произвольный несамосопряженный оператор  $A$ . (На этом мы более подробно остановимся в § 1.5.)

## 1.4. Сопряженные уравнения и ценность информации

Рассмотрим теперь сопряженные уравнения с общих позиций. Сформулируем следующую задачу:

$$A\varphi(x) = f(x), \quad (1.4.1)$$

где  $A$  – линейный оператор;  $\varphi(x)$  принадлежит множеству функций  $D(A)$  с областью определения  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Функции  $A\varphi$ , так же как и  $f(x)$ , предположим квадратично суммируемыми, принадлежащими вещественному гильбертову пространству  $H = L_2(\Omega)$ . При этом под  $x$  будем понимать совокупность всех переменных задачи.

Введем в рассмотрение скалярное произведение функций  $g(x)$  и  $h(x)$  из  $H$ :

$$(g, h) = \int_{\Omega} g(x)h(x) dx. \quad (1.4.2)$$

Как было отмечено выше, при решении многих прикладных задач обычно нужно получить значение величины, являющейся функционалом от  $\varphi(x)$ . Любая величина, являющаяся линейным непрерывным функционалом от  $\varphi(x)$ , может быть выражена в виде скалярного произведения

$$J_p[\varphi] = \int_{\Omega} p(x)\varphi(x) dx = (p, \varphi). \quad (1.4.3)$$

Здесь  $J_p[\varphi]$  – рассматриваемый функционал, а  $p(x)$  – характеристика прибора, измеряющего данный физический процесс.

Таким образом, будем рассматривать физические величины, которые могут быть выражены в виде линейного непрерывного функционала от  $\varphi(x)$ :

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi). \quad (1.4.4)$$

Введем далее, наряду с оператором  $A$ , сопряженный к нему оператор  $A^*$ , определяемый тождеством Лагранжа

$$(Ah, g) = (h, A^*g) \quad (1.4.5)$$

для любых функций  $g$  и  $h$ , которые принадлежат множествам  $D(A)$  и  $D(A^*)$  соответственно. Как уже было отмечено в § 1.2, свойства функций из множества  $D(A)$  дополнительно задаются на основе анализа исходной задачи (1.4.1) условием гладкости и краевыми условиями, а свойства множества  $D(A^*)$  определяются в процессе преобразования левой части соотношения (1.4.5) в правую так, чтобы тождество Лагранжа имело смысл. Отсюда получаются требования и к гладкости, и к краевым условиям для функций из  $D(A^*)$ .

Наряду с уравнением (1.4.1), которое будем называть основным, введем в рассмотрение сопряженное уравнение

$$A^*\varphi^*(x) = p(x), \quad (1.4.6)$$

где  $p(x)$  – та же функция измерительного прибора, которая содержится в функционале (1.4.4).

Умножим скалярно уравнение (1.4.1) на  $\varphi^*$ , а уравнение (1.4.6) – на  $\varphi$  и результаты вычтем один из другого. Тогда

$$(A\varphi, \varphi^*) - (\varphi, A^*\varphi^*) = (f, \varphi^*) - (p, \varphi). \quad (1.4.7)$$

Левая часть соотношения (1.4.7) обращается в нуль, поскольку для  $\varphi$  и  $\varphi^*$ , так же как и для  $g$  и  $h$ , принадлежащих  $D(A)$  и  $D(A^*)$  соответственно, имеет место тождество Лагранжа. Тогда

$$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) = 0. \quad (1.4.8)$$

Или с учетом (1.4.4) из этого соотношения получим две эквивалентные формулы:

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi), \quad J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*), \quad (1.4.9)$$

при этом

$$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*]. \quad (1.4.10)$$

Таким образом, если нам нужно найти значение функционала  $J_p[\varphi]$ , мы можем получить его двумя способами: либо решить уравнение (1.4.1) и определить эту величину по формуле

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi),$$

либо решить уравнение (1.4.6) и найти ту же величину по формуле

$$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*).$$

Поскольку  $J_p = J_f$ , то в дальнейшем эти функционалы будем обозначать  $J_p$ .

Следовательно, каждому линейному функционалу  $J_p[\varphi] = (p, \varphi)$  может быть поставлена в соответствие функция  $\varphi^*(x)$ , удовлетворяющая уравнению (1.4.6), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию  $p(x)$ , характеризующую интересующий нас физический процесс или измерение.

Пусть в среде имеется «источник единичной мощности», помещенный в точку  $x = x_0$ , т. е.

$$f(x) = \delta(x - x_0). \quad (1.4.11)$$

Поскольку<sup>3</sup>

$$(\varphi(x), \delta(x - x_0)) = \varphi(x_0),$$

то в этом случае

$$J_p[\varphi] = J_{f=\delta(x-x_0)}[\varphi^*] = \varphi^*(x_0). \quad (1.4.12)$$

Отсюда следует, что сопряженная функция  $\varphi^*$  описывает зависимость функционала  $J_p[\varphi] = (p, \varphi)$  от точки помещения источника единичной мощности.

Представим себе физическую систему, в которой измеряется некоторая величина  $J_p[\varphi]$ , являющаяся линейным функционалом от решения, связанного, например, с плотностью частиц  $\varphi(x)$  в фазовом пространстве. Если в некоторую точку системы впустить определенное количество частиц или, наоборот, извлечь из нее эти частицы,

---

<sup>3</sup>Строго говоря, соотношение  $(\varphi(x), \delta(x - x_0)) = \varphi(x_0)$  следует понимать в смысле теории обобщенных функций.



то измеряемое значение величины  $J_p[\varphi]$  будет соответственно увеличиваться или уменьшаться, причем это измерение будет зависеть от точки, в которой мы производим изменение числа частиц. Как видно из предыдущего, эта зависимость описывается сопряженной функцией  $\varphi^*(x)$ , удовлетворяющей уравнению (1.4.6). Следовательно, сопряженная функция  $\varphi^*(x)$  дает вклад частиц, находящихся в той или иной точке системы, в интересующий нас функционал  $J_p[\varphi]$ . Поэтому функцию  $\varphi^*$  иногда называют ценностью субстанции в точке  $x_0$  по отношению к функционалу задачи. Естественно, что функционалы могут быть различными. Поэтому для каждого функционала должна быть сформулирована своя собственная задача (1.4.6) с заданной функцией  $p(x)$ .

Рассмотрим иллюстрирующий пример. Пусть основная задача (1.4.1) описывает простейший процесс диффузии и имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (1.4.13)$$

где  $f(x)$  – заданная функция.

Предположим, что имеется прибор, который измеряет некоторую величину

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi) \equiv \int_0^1 p(x)\varphi(x) dx, \quad (1.4.14)$$

являющуюся линейным функционалом от решения  $\varphi$  задачи (1.4.13). Функция  $p(x)$  связана с характеристикой прибора; пусть она задается формулой

$$p(x) = p_0 \sin \pi x, \quad p_0 = \text{const} > 0. \quad (1.4.15)$$

Тогда

$$J_p[\varphi] = p_0 \int_0^1 \sin \pi x \varphi(x) dx. \quad (1.4.16)$$

Значение функционала (1.4.16), как мы видим, можно вычислить и другим способом. Для этого рассмотрим сопряженную задачу (1.4.6) с правой частью  $p(x)$  из (1.4.15). В нашем примере она имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p_0 \sin \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0. \quad (1.4.17)$$

Решение сопряженной задачи (1.4.17) может быть легко найдено в данном случае в явном виде:

$$\varphi^*(x) = \frac{p_0}{\pi^2} \sin \pi x. \quad (1.4.18)$$

Тогда значение функционала  $J_p[\varphi]$  можно найти по второй из формул (1.4.9):

$$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*),$$

или, используя (1.4.18), получим

$$J_p[\varphi] = \frac{p_0}{\pi^2} \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx. \quad (1.4.19)$$

При вычислении  $J_p[\varphi]$  по формуле (1.4.19) нам не нужно решать задачу (1.4.13) и находить  $\varphi$ , нужно лишь подставить заданную функцию  $f(x)$  в (1.4.19).

Пусть в среде имеется «источник единичной мощности», помещенный в точку  $x = x_0$ , т. е.

$$f(x) = \delta(x - x_0).$$

Тогда из (1.4.19) получаем

$$J_p[\varphi] = \frac{p_0}{\pi^2} \sin \pi x_0. \quad (1.4.20)$$

Как следует из (1.4.12), правая часть (1.4.20) есть не что иное, как ценность информации о решении в точке  $x_0$  по отношению к функционалу  $J_p[\varphi] = (p_0 \sin \pi x, \varphi)$ . Из (1.4.20) легко сделать следующий вывод: если мы хотим поместить источник частиц в такую точку  $x_0$ , чтобы вклад их в функционал  $J_p[\varphi]$  (или чтобы число частиц, регистрируемых прибором с заданной характеристикой  $p = p_0 \sin \pi x$ ) был максимальным, то надо поместить этот источник в точку  $x_0 = 1/2$ , поскольку

$$\max_{x_0} J_p[\varphi] = \max_{x_0} \frac{p_0}{\pi^2} \sin \pi x_0 = \frac{p_0}{\pi^2}.$$

Отметим, что, несмотря на тривиальность рассмотренного примера, описанный принцип анализа эффективности размещения источников (или стоков, систем управления и т. п.) в той или иной точке (области и т. д.) на основе изучения поведения решений соответствующих

сопряженных уравнений может быть положен в основу алгоритмов решения многих важных прикладных задач оптимального управления, охраны окружающей среды и др. Об этом подробнее будет рассказано в следующих лекциях.

Толкование сопряженной функции  $\varphi^*(x)$  как ценности субстанции позволяет дать ясную трактовку и теории возмущений для любого функционала  $J_p[\varphi]$ . Действительно, если в элементе объема  $\Delta x$  около точки  $x$  мы изменим число частиц на величину  $\delta N$ , то соответствующее изменение величины  $J_p$  будет выражено следующим уравнением:

$$\delta J_p = \delta N \varphi^*(x). \quad (1.4.21)$$

Если в рассматриваемой системе произведены некоторые малые изменения параметров, так что оператор  $A$  из (1.4.1) переходит в оператор  $A + \delta A$ , то это соответствует изменению числа частиц в каждом элементе  $\Delta x$  на величину  $\delta N = -\Delta x \delta A \varphi$ . Общее изменение функционала  $J_p$  при таком изменении запишем в виде

$$\delta J_p = - \int \varphi^*(x) \delta A \varphi(x) dx. \quad (1.4.22)$$

Вывод этого соотношения будет дан ниже в конкретных приложениях.

Соотношение (1.4.21) позволяет измерять распределение функции ценности в системе, изменяя известным образом число частиц в разных точках  $x$  системы и измеряя при этом соответствующее изменение величины  $J_p$ .

Введенное понятие ценности может быть полезным в теории различных измерительных приборов. Действительно, прибор обычно предназначен для измерения какой-либо одной величины  $J_p$ . Поэтому для каждого прибора может быть введена вполне определенная функция ценности  $\varphi^*(x)$ , которая может быть однажды измерена или рассчитана. Если распределение субстанции и ее ценности известны, то соотношение (1.4.22) может быть использовано для измерений двояким образом. Во-первых, измеряя величины  $\delta J_p$  при различных изменениях параметров среды  $\delta A$ , мы можем при помощи соотношения (1.4.22) определять величины  $\delta A$ , т. е. различные характеристики взаимодействия частиц с веществом. Например, таким образом можно измерить (по существу, так и делается) сечения взаимодействия нейтронов с веществом для различных образцов в теории переноса излучения, помещая эти образцы в прибор и определяя  $\delta \Sigma = \delta A$  по изменению

величины  $J_p$ . Во-вторых, соотношение (1.4.22) позволяет вводить поправки в измеряемую величину  $J_p$  за счет различных возмущающих факторов в приборе. Наконец, определение понятия ценности позволяет получать уравнения для функции  $\varphi^*(x)$ , исходя непосредственно из физического смысла этой величины, точно так же как уравнение для потока нейтронов получается из закона сохранения числа нейтронов.

## 1.5. Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов

В § 1.3 на простейших примерах мы рассмотрели проблему чувствительности функционала  $J_p = (p, \varphi)$  к источнику  $f(x)$ . Здесь мы рассмотрим более общий случай и сформулируем основные формулы теории возмущений для линейных функционалов. Начнем с конкретного примера.

Пусть рассматривается задача вида

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (1.5.1)$$

где решение  $\varphi$  принадлежит множеству  $D(A)$ , введенному в § 1.2, а  $f(x)$  – пространству  $H = L_2(0, 1)$ . Оператор  $A = -d^2/dx^2 + d/dx$  действует в  $H$  и определен на функциях из  $D(A)$ . Задачу (1.5.1) будем называть невозмущенной.

Предположим, что нас интересует значение не самого решения  $\varphi(x)$  задачи (1.5.1), а лишь конкретного функционала от этого решения

$$J_p[\varphi] = \int_0^1 p(x)\varphi(x) dx, \quad (1.5.2)$$

где  $p(x)$  – заданная функция из  $H$ .

Как мы видели в § 1.3, значение функционала (1.5.2) может быть найдено и по другой формуле:

$$J_p[\varphi] = \int_0^1 f(x)\varphi^*(x) dx, \quad (1.5.3)$$

где  $\varphi^*(x)$  – решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} - \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0. \quad (1.5.4)$$

Пусть вместо задачи (1.5.1) мы имеем возмущенную задачу вида

$$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d\varphi'}{dx} + \delta g(x)\varphi'(x) = f'(x), \quad (1.5.5)$$

$$x \in (0, 1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$

где  $f'(x) = f(x) + \delta f$ ;  $\delta g(x)$ ,  $\delta f(x)$  – некоторые заданные возмущения функции.

Представим решение  $\varphi'$  возмущенной задачи (1.5.5) в виде

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi, \quad (1.5.6)$$

где  $\varphi(x)$  – решение невозмущенной задачи (1.5.1);  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$ . При этом изменится и значение функционала, и мы будем иметь

$$J'_p = J_p + \delta J_p, \quad (1.5.7)$$

где

$$\delta J_p = \int_0^1 p(x)\delta\varphi(x) dx.$$

Установим связь между изменением функций  $\delta g(x)$ ,  $\delta f(x)$  и изменением функционала  $\delta J_p$ . Для этого воспользуемся решением сопряженной задачи (1.5.4). Уравнение из (1.5.5) умножим на  $\varphi^*(x)$ , а уравнение (1.5.4) – на  $\varphi'(x)$ , результаты проинтегрируем по  $x$  на  $(0, 1)$  и вычтем один из другого. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( -\frac{d^2\varphi'}{dx^2} \varphi^* + \frac{d\varphi'}{dx} \varphi^* + \delta g(x)\varphi'\varphi^* \right) dx + \\ & + \int_0^1 \left( \frac{d^2\varphi^*}{dx^2} \varphi' + \frac{d\varphi^*}{dx} \varphi' \right) dx = \int_0^1 f'(x)\varphi^*(x) dx - \\ & - \int_0^1 p(x)\varphi'(x) dx. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Предположим, что  $\varphi, \varphi', \varphi^* \in D(A)$ . Интегрированием по частям одного из выражений в левой части (1.5.8) преобразуем эту часть к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( -\frac{d^2 \varphi'}{dx^2} \varphi^* + \frac{d\varphi'}{dx} \varphi^* + \delta g(x) \varphi' \varphi^* \right) dx + \\ & + \int_0^1 \left( \frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} \varphi' + \frac{d\varphi^*}{dx} \varphi' \right) dx = \int_0^1 \delta g \varphi^* \varphi' dx, \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

а в правой части (1.5.8) с учетом (1.5.6), (1.5.7) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f'(x) \varphi^*(x) dx - \int_0^1 p(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi^*(x) dx - \\ & - \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx + \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx - \int_0^1 p(x) \delta \varphi(x) dx = \\ & = \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx - \delta J_p. \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Здесь мы воспользовались полученным в § 1.3 соотношением сопряженности

$$\int_0^1 f(x) \varphi^*(x) dx = \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx. \quad (1.5.11)$$

Из (1.5.8)–(1.5.10) получаем

$$\int_0^1 \delta g(x) \varphi^*(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \delta f(x) \varphi^*(x) dx - \delta J_p. \quad (1.5.12)$$

Отсюда приходим к формуле теории возмущений для отыскания изменения функционала  $\delta J_p$  через  $\delta g, \delta f$ :

$$\delta J_p = \int_0^1 \varphi^*(x) (\delta f(x) - \delta g(x) \varphi'(x)) dx. \quad (1.5.13)$$

Если в данной задаче  $\delta g = 0$ , то формула (1.5.13) переходит в формулу (1.3.20), полученную в § 1.3.

Предположим, что возмущения малые и в формуле (1.5.13) можно приближенно положить  $\varphi'(x) \approx \varphi(x)$ . Тогда приходим к формуле теории малых возмущений

$$\delta J_p \approx \int_0^1 \varphi^*(x)(\delta f(x) - \delta g(x)\varphi(x)) dx. \quad (1.5.14)$$

Приведем численный пример. Пусть в рассмотренной задаче  $f(x) = \sin \pi x$ ,  $\delta f(x) \equiv 0$ ,

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ 2(1-x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

В качестве  $\delta g(x)$  рассмотрим постоянную  $\delta g(x) \equiv \varepsilon$ . Будем менять  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\varepsilon = 1, \quad \varepsilon = 0,1, \quad \varepsilon = 0,01.$$

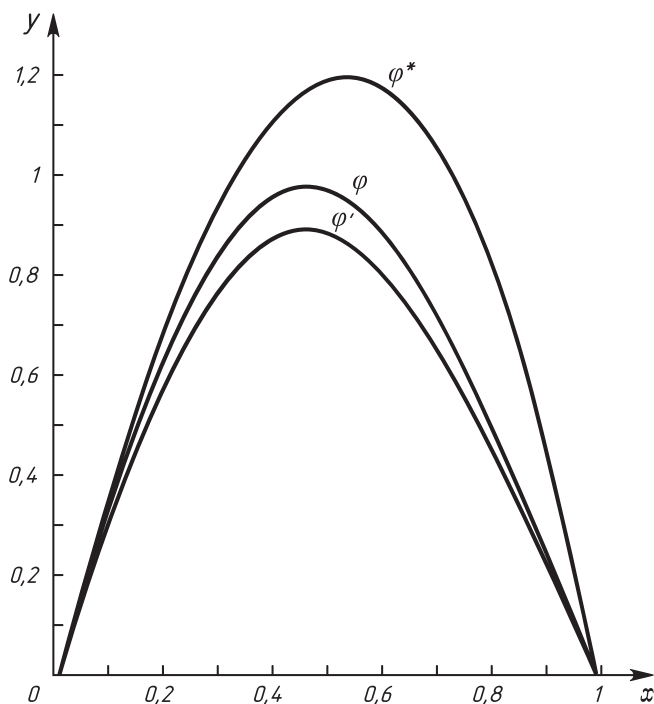


Рис. 1.7

Для каждого из этих случаев численно (методом конечных разностей на равномерной сетке с шагом  $h = 0,01$ ) были решены задачи (1.5.1), (1.5.4) и (1.5.5). Графики функций  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^*(x)$  и  $\varphi(x)'$  при  $\varepsilon = 1$  приведены на рисунке 1.7. Было проведено сравнение значений функционала  $J_p'$  при различных  $\varepsilon$ . Для этой цели использовались эквивалентные формулы для возмущенной задачи:

$$J_p^{(1)} = \int_0^1 p(x)\varphi'(x) dx \equiv J_p',$$

$$J_p^{(2)} = \int_0^1 p(x)\varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi^*(x)\delta g(x)\varphi'(x) dx$$

(см. формулу (1.5.13)).

Если в  $J_p^{(2)}$  приближенно заменить  $\varphi'$  на  $\varphi$ , то с учетом малых возмущений получим

$$J_p^{(3)} = \int_0^1 p(x)\varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi^*(x)\delta g(x)\varphi(x) dx$$

(см. формулу (1.5.14)).

Значения  $J_p^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для различных  $\varepsilon$  приведены в таблице 3.

**Таблица 3. Значения  $J_p^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для различных  $\varepsilon$**

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0$
$J_p^{(1)}$	0,055 075 5	0,059 739 5	0,060 250 4	0,060 316 6
$J_p^{(2)}$	0,055 103 7	0,059 782 9	0,060 294 8	0,060 316 6
$J_p^{(3)}$	0,054 604 7	0,059 777 5	0,060 294 7	0,060 316 6

Из таблицы видно, что численные результаты (для любых  $\varepsilon$ ) подтверждают правильность формулы теории возмущений (1.5.13), полученной теоретически. Кроме того, из таблицы видно, что при малых  $\varepsilon$  эффективно работает формула теории малых возмущений (1.5.14), что и следовало ожидать.

Теперь приступим к получению формулы теории возмущений вида (1.5.13) в общем случае. Пусть рассматривается основная задача в виде (1.4.1):



$$A\varphi(x) = f(x), \quad (1.5.15)$$

которую будем считать невозмущенной.

Если свойства среды, с которой взаимодействует поле функции  $\varphi$ , изменяются, т. е. если оператор уравнения  $A$  переходит в

$$A' = A + \delta A,$$

то изменяется и само решение  $\varphi(x)$ , и значение функционала

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x), \quad J'_p = J_p + \delta J_p.$$

Установим связь между изменением оператора  $\delta A$  и изменением функционала  $\delta J_p$ . Возмущенная задача, соответствующая задаче (1.5.15), имеет вид

$$A'\varphi' = f', \quad (1.5.16)$$

где

$$f' = f + \delta f.$$

К задаче (1.5.16) присоединим сопряженное уравнение, соответствующее невозмущенной задаче

$$A^*\varphi^* = p, \quad (1.5.17)$$

где  $A^*$  – сопряженный оператор, определяемый тождеством Лагранжа (1.4.5). Умножим скалярно уравнение (1.5.16) на  $\varphi^*$ , а уравнение (1.5.17) на  $\varphi'$  и результаты вычтем один из другого. Получим

$$(A'\varphi', \varphi^*) = (\varphi', A^*\varphi^*) = (f', \varphi^*) - (p, \varphi'). \quad (1.5.18)$$

Предположим, что  $D(A) = D(A^*)$  и  $\varphi, \varphi' \in D(A^*)$ ,  $\varphi^* \in D(A)$ . Левую часть соотношения (1.5.18), имея в виду, что  $A' = A + \delta A$ , преобразуем к виду

$$(A\varphi', \varphi^*) - (\varphi', A^*\varphi^*) + (\delta A\varphi', \varphi^*) = (\delta A\varphi', \varphi^*). \quad (1.5.19)$$

Здесь мы воспользовались тождеством Лагранжа

$$(A\varphi', \varphi^*) - (\varphi', A^*\varphi^*) = 0.$$

Правую часть соотношения (1.5.18) приведем к виду

$$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) + (\delta f, \varphi^*) - (p, \delta\varphi) = (\delta f, \varphi^*) - \delta J_p. \quad (1.5.20)$$

При упрощении левой части (1.5.20) было использовано равенство (1.4.8), т. е.

$$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) = 0.$$

Принимая во внимание соотношения (1.5.19) и (1.5.20), выражение (1.5.18) записываем в виде

$$(\delta A \varphi', \varphi^*) = (\delta f, \varphi^*) - \delta J_p. \quad (1.5.21)$$

Отсюда приходим к формуле теории возмущений

$$\delta J_p = (\delta f - \delta A \varphi', \varphi^*). \quad (1.5.22)$$

Если возмущения считать малыми, то, положив приближенно  $\varphi' = \varphi$ , приходим к формуле теории малых возмущений

$$\delta J_p = (\delta f - \delta A \varphi, \varphi^*). \quad (1.5.23)$$

Мы до сих пор использовали метод построения сопряженных уравнений для дифференциальных постановок задач. Но можно сначала основную задачу аппроксимировать и превратить в систему линейных алгебраических уравнений

$$A^h v^h = f^h \quad (1.5.24)$$

и определить функционал

$$J_p^h = (p^h, v^h). \quad (1.5.25)$$

Сопряженную задачу получим в виде

$$(A^h)^* \omega^h = p^h. \quad (1.5.26)$$

Так что  $A^h$  и  $(A^h)^*$  должны удовлетворять тождеству Лагранжа в конечномерном пространстве

$$(A^h v^h, \omega^h) = ((A^h)^* \omega^h, v^h).$$

В результате получим

$$J_f^h = (f^h, \omega^h). \quad (1.5.27)$$

Тогда в численных расчетах мы всегда будем иметь

$$J_p^h = J_f^h. \quad (1.5.28)$$

## 1.6. Простейшие нелинейные задачи

В настоящем параграфе на простейших примерах мы укажем путь к обобщению теории сопряженных уравнений и теории возмущений на нелинейные задачи. Общие формулировки для нелинейных задач будут даны в главе 3.

Пусть в вещественном гильбертовом пространстве  $H = L_2(0, 1)$  рассматривается оператор  $A(v)$ :

$$A(v) = -\frac{d}{dx} v \frac{d}{dx}, \quad (1.6.1)$$

действующий на функции  $v(x)$ , определенные на  $\Omega = (0, 1)$  и принадлежащие множеству  $D(A) \subset H$ . Будем предполагать, что функции  $v \in D(A)$  достаточно гладкие, так что

$$A(v)v = -\frac{d}{dx} v \frac{dv}{dx} \in H, \quad (1.6.2)$$

и  $v$  удовлетворяют некоторым однородным граничным условиям, скажем

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (1.6.3)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Рассмотрим формально скалярное произведение

$$(A(v)v, \omega) = -\int_0^1 \omega \frac{d}{dx} v \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.6.4)$$

Правую часть в (1.6.4) проинтегрируем по частям. Будем иметь

$$(A(v)v, \omega) = -\omega v \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 v \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.6.5)$$

В силу условий (1.6.3) внеинтегральный член в (1.6.5) обращается в нуль. Поэтому

$$(A(v)v, \omega) = \int_0^1 \frac{dv}{dx} \left( v \frac{d\omega}{dx} \right) dx. \quad (1.6.6)$$

Правую часть (1.6.6) снова проинтегрируем по частям. Тогда

$$(A(v)v, \omega) = v \left( v \frac{d\omega}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v \frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} dx. \quad (1.6.7)$$

Теперь введем в рассмотрение множество функций  $D(A^*) \subset H$ . Будем предполагать, что функции  $\omega \in D(A^*)$  достаточно гладкие, так что оператор  $(d/dx)v(d/dx)$  на  $\omega$  имеет смысл, и

$$\frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} \in H, \quad v \in D(A), \quad \omega \in D(A^*).$$

Кроме того, предположим, что функции  $\omega \in D(A^*)$  на границе области  $\Omega = (0, 1)$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} &= 0 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

В том случае, когда  $\omega \in D(A^*)$ , внеинтегральный член в формуле (1.6.7) обратится в нуль, и мы имеем

$$(A(v)v, \omega) = - \int_0^1 v \frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} dx. \quad (1.6.9)$$

Введем теперь в рассмотрение оператор по формуле

$$A^*(v) = - \frac{d}{dx} v \frac{d}{dx}. \quad (1.6.10)$$

Он действует в  $H$  на функции  $\omega \in D(A^*)$ . В этом случае соотношение (1.6.9) превращается в тождество Лагранжа

$$(A(v)v, \omega) = (v, A^*(v)\omega) \quad v \in D(A), \quad \omega \in D(A^*), \quad (1.6.11)$$

а оператор  $A^*(v)$  является сопряженным по отношению к  $A(v)$ . Однако теперь по сравнению с линейным сопряженный оператор зависит и от самой функции  $v$  из множества  $D(A)$ . Тем не менее предлагаемый метод позволяет распространить теорию сопряженных линейных

операторов на класс операторов нелинейных для задач с заданными функционалами

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi),$$

где  $p$  является характеристикой измерения – функцией  $x \in (0, 1)$  или функцией  $x$  и решения  $\varphi$ .

Итак, рассмотрим основную задачу в виде

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} &= f(x), \\ \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \text{ при } x = 1, \end{aligned} \tag{1.6.12}$$

где  $f(x)$  – заданная функция из  $H$ .

Предположим, что решение задачи (1.6.12) существует и является достаточно гладкой функцией  $\varphi \in D(A)$ . Пусть нам требуется найти значение функционала

$$J_p[\varphi] = \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx, \quad p \in H. \tag{1.6.13}$$

Наряду с задачей (1.6.12) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} &= p(x), \\ \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \tag{1.6.14}$$

где  $p$  – функция, определяющая функционал (1.6.13). Будем предполагать, что решение (1.6.14) существует и является достаточно гладкой функцией  $\varphi^* \in D(A^*)$ .

Теперь можно отметить существенное отличие сопряженной задачи для нелинейного уравнения от уравнения линейного. В самом деле, при формулировании линейной сопряженной задачи в нее входят

только величины, входящие в основное уравнение. Это коэффициенты и параметры. Кроме того, правой частью сопряженного уравнения является функция прибора  $p(x)$ . Так что основную и сопряженную задачи можно было решать независимо друг от друга.

В случае нелинейной задачи ситуация меняется. Здесь необходимо сначала найти решение основного уравнения и только после этого перейти к решению задачи сопряженной, поскольку сопряженный оператор теперь зависит от решения  $\varphi(x)$  основной задачи.

Получим теперь представление функционала  $J_p[\varphi]$  через решение сопряженной задачи (1.6.14). Умножим уравнение (1.6.12) на  $\varphi^*$ , а уравнение (1.6.14) на  $\varphi$ , проинтегрируем результаты по  $x$  на  $(0,1)$  и результаты вычтем один из другого. Тогда

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^1 \varphi \frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx - \int_0^1 p(x) \varphi dx.$$

Левая часть последнего соотношения обращается в нуль в силу тождества Лагранжа (1.6.11). Тогда будем иметь соотношение сопряженности

$$\int_0^1 f(x) \varphi^* dx = \int_0^1 p(x) \varphi dx. \quad (1.6.15)$$

Отсюда с учетом (1.6.13) получаем для вычисления функционала  $J_p$  две эквивалентные формулы:

$$J_p = \int_0^1 p(x) \varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx.$$

До сих пор мы считали функцию  $p$  не зависящей от решения  $\varphi$ . Однако такое предположение можно снять. Тогда будем иметь

$$J_p = \int_0^1 p(\varphi, x) \varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx. \quad (1.6.16)$$

В частности, если принять

$$p(\varphi, x) = \varphi,$$

то придем к энергетическому функционалу

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx. \quad (1.6.17)$$

Что касается второй формулы из (1.6.16), то  $J_p$  по-прежнему будет выражаться в виде линейного функционала от решения сопряженной задачи

$$J_p = \int_0^1 f \varphi^* dx.$$

Приведем конкретный пример. Пусть  $f(x) = \cos 2\pi x$ , тогда основная задача (1.6.12) имеет вид

$$-\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \cos 2\pi x, \quad x \in (0, 1),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Эта задача имеет решение  $\varphi = (1/\pi) \cos \pi x$ . Пусть требуется вычислить энергетический функционал (1.6.17). В данном случае это нетрудно сделать:

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{2\pi^2}.$$

Вычислим теперь этот же функционал, используя вторую формулу из (1.6.16). Для этого следует рассмотреть сопряженную задачу (1.6.14) при  $p = \varphi = (1/\pi) \cos \pi x$ :

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \cos \pi x \frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi} \cos \pi x, \quad x \in (0, 1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Эта задача линейна относительно  $\varphi^*$ . Нетрудно видеть, что она имеет решение из  $L_2(0, 1)$ :

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\pi^2} \ln |\cos \pi x|, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

которое является почти всюду дифференцируемой функцией с непрерывным «поток»  $\varphi(d\varphi^*/dx)$ . Из (1.6.16) имеем

$$J_p = \int_0^1 f(x) \varphi^*(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos 2\pi x \ln |\cos \pi x| dx.$$

Интегрированием по частям легко убеждаемся, что

$$J_p = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{1/2} \cos 2\pi x \ln(\cos \pi x) dx = \frac{1}{2\pi^2};$$

это совпадает со значением  $J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx$ .

Заметим, что в рассматриваемом примере решение сопряженной задачи (1.6.14) не является единственным и в формуле (1.6.16) в качестве  $\varphi^*$  можно взять любое из решений (1.6.14).

Теперь перейдем к получению формулы теории возмущений для функционала  $J_p$ . Наряду с задачей (1.6.12), которую будем называть невозмущенной, введем в рассмотрение задачу возмущенную:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \varphi' \frac{d\varphi'}{dx} &= f'(x), \\ \frac{d\varphi'}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{d\varphi'}{dx} &= 0 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \tag{1.6.18}$$

Здесь примем обозначения

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi, \quad f' = f + \delta f, \tag{1.6.19}$$



где  $\delta\varphi$  – вариация возмущенной задачи в зависимости от возмущения источника  $\delta f$ . Будем считать, что решение  $\varphi'$  задачи (1.6.18) существует и является достаточно гладкой функцией.

Рассмотрим далее сопряженную невозмущенную задачу (1.6.14), имея в виду функционал (1.6.13):

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\varphi\frac{d\varphi^*}{dx} &= p(x), \\ \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \tag{1.6.20}$$

Умножим уравнение из (1.6.18) на  $\varphi^*$ , а уравнение из (1.6.20) на  $\varphi'$ , результаты проинтегрируем по  $x$  на отрезке  $(0,1)$  и вычтем один из другого. Тогда

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx}(\varphi + \delta\varphi) \frac{d\varphi'}{dx} dx + \int_0^1 \varphi' \frac{d}{dx}\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} dx &= \\ &= \int_0^1 f'(x)\varphi^* dx - \int_0^1 p(x)\varphi' dx. \end{aligned} \tag{1.6.21}$$

В силу тождества Лагранжа (1.6.11) левая часть соотношения (1.6.21) упростится и примет вид

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} \delta\varphi \frac{d\varphi'}{dx} dx, \tag{1.6.22}$$

а правая часть выражения (1.6.21) с учетом соотношения сопряженности (1.6.15) запишется следующим образом:

$$\int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 p \delta\varphi dx. \tag{1.6.23}$$

Используя (1.6.22) и (1.6.23), соотношение (1.6.21) представим в виде

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} \delta \varphi \frac{d\varphi'}{dx} dx = \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \delta J_p.$$

Здесь мы использовали обозначение

$$\delta J_p = \int_0^1 p \delta \varphi dx.$$

Отсюда получаем выражение

$$\delta J_p = \int_0^1 \delta f \varphi^* dx + \int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} \delta \varphi \frac{d\varphi'}{dx} dx. \quad (1.6.24)$$

Второй из интегралов в правой части (1.6.24) проинтегрируем по частям, учитывая тот факт, что функция  $\varphi'$  удовлетворяет граничным условиям из (1.6.18). Тогда внеинтегральный член обратится в нуль, и мы окончательно получаем

$$\delta J_p = \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta \varphi \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \quad (1.6.25)$$

Если возмущения малые, т. е. можно приближенно положить  $\varphi' \approx \varphi$  с точностью до малых величин первого порядка, получаем формулу теории малых возмущений

$$\delta J_p \cong \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta \varphi \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \quad (1.6.26)$$

Формула (1.6.26) для своего применения требует знания решения кроме невозмущенных задач  $\varphi$  и  $\varphi^*$  еще и возмущенной, поскольку под знаком интеграла присутствует множитель  $\delta \varphi = \varphi' - \varphi$ . В дальнейшем будет показано, что при обработке экспериментальных данных с целью оценки функционала  $\delta J_p$  на фактическом материале наблюдений за сложными физическими процессами эта формула или ее

обобщения будут играть большую роль, поскольку для нее потребуются лишь приближенное знание вариации  $\delta\varphi$ , которое можно получить на основе простейших оценок.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $f(x) = \cos 2\pi x$ . Тогда, как мы видели выше, основная задача (1.6.12) имеет решение  $\varphi(x) = (1/\pi) \cos \pi x$ . Будем рассматривать функционал (1.6.13), где  $p(x) = (1/\pi) \cos \pi x$ . В данном случае

$$J_p = \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx = 1/2\pi^2.$$

В качестве  $f'(x)$  возьмем функцию

$$f'(x) = f(x) + \delta f(x),$$

где  $\delta f(x) = \varepsilon \pi \cos \pi x$ ;  $\varepsilon = \text{const} > 0$ . Тогда возмущенная задача (1.6.18) примет вид

$$-\frac{d}{dx} \varphi' \frac{d\varphi'}{dx} = \cos 2\pi x + \varepsilon \pi \cos \pi x, \quad x \in (0, 1),$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Как изменится при этом функционал  $J_p$ ? Для вычисления  $J'_p$  воспользуемся полученной выше формулой теории малых возмущений

$$J'_p = J_p + \delta J_p,$$

где  $\delta J_p$  определяется по формуле (1.6.26). Для отыскания  $\delta J_p$  из (1.6.26) нам требуется знать решение  $\varphi^*$  сопряженной задачи (1.6.20), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \cos \pi x \frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi} \cos \pi x, \quad x \in (0, 1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Как мы видели в предыдущем примере, решением этой задачи является функция

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\pi^2} \ln |\cos \pi x|, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

почти всюду дифференцируемая, принадлежащая  $L_2(0, 1)$  и почти всюду удовлетворяющая (1.6.20). Кроме того, в формулу (1.6.26) для  $\delta J_p$  входит величина  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$ . Как правило, найти ее в явном виде довольно трудно, но в данном примере это несложно. Возмущенная задача имеет решение  $\varphi' = (1/\pi) \cos \pi x + \varepsilon$ , поэтому  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \varepsilon$ . Отсюда и из (1.6.26) имеем

$$\begin{aligned} \delta J_p &= \int_0^1 \varepsilon \pi \cos \pi x \cdot \frac{1}{\pi^2} \ln |\cos \pi x| dx - \int_0^1 \varepsilon (-\sin \pi x) \times \\ &\times \left( -\frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} \right) dx = \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \int_0^1 \cos \pi x \ln |\cos \pi x| dx - \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi x}{\cos \pi x} dx \right\}. \end{aligned}$$

Интегрированием по частям легко получаем, что

$$\int_0^1 \cos \pi x \ln |\cos \pi x| dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi x}{\cos \pi x} dx,$$

т. е.

$$\delta J_p \equiv 0.$$

Таким образом, независимо от величины параметра  $\varepsilon$  значение функционала  $J_p$  при переходе от основной задачи к возмущенной не меняется.

Этот же результат в данном случае мы могли бы получить сразу, используя другое представление для  $\delta J_p$ :

$$\delta J_p = \int_0^1 p \delta\varphi dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \cos \pi x \cdot \varepsilon dx \equiv 0.$$

Рассмотренные выше простейшие примеры нелинейных задач указывают путь к обобщениям, которые будут даны в главе 3.

## 1.7. Сопряженные уравнения для нестационарных задач

Методы, развитые в предыдущих параграфах для стационарных задач математической физики, можно обобщить и на нестационарные задачи.

Рассмотрим сначала следующую нестационарную задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \quad (1.7.1)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \quad \varphi(0, x) = g(x),$$

где

$$f \in L_2((0, T) \times (0, 1)); \quad g \in L_2(0, 1).$$

Будем предполагать, что решение  $\varphi$  задачи (1.7.1) достаточно гладкое. Пусть оно непрерывно дифференцируемо по  $t$  на  $[0, T]$  и дважды непрерывно дифференцируемо по  $x$  на  $[0, 1]$ . Задачу (1.7.1) будем называть основной или невозмущенной задачей.

Следуя § 1.1, задаче (1.7.1) поставим в соответствие формально сопряженную задачу

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = f^*(t, x), \quad 0 \leq t < T, \quad 0 < x < 1, \quad (1.7.2)$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \quad \varphi^*(T, x) = g^*(x),$$

где функции  $f^*, g^*$  пока не определены. Пусть  $f^* \in L_2((0, T) \times (0, 1))$ ,  $g^* \in L_2(0, 1)$ .

Заметим, что в отличие от основной задачи (1.7.1) в сопряженной задаче (1.7.2) начальное условие ставится при  $t = T > 0$ . Пусть решение  $\varphi^*$  задачи (1.7.2) существует и является достаточно гладкой функцией.

Проведем некоторые преобразования. Уравнение из (1.7.1) умножим на  $\varphi^*$ , а уравнение из (1.7.2) на  $\varphi$ ; полученные результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по  $t$  на  $[0, T]$  и по  $x$  на  $[0, 1]$ .

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^1 \varphi^* \varphi dx \right) dt + \int_0^T \left[ \int_0^1 \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \varphi^* + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} \varphi \right) dx \right] \times \\ & \times dt = \int_0^T \left[ \int_0^1 (f \varphi^* - f^* \varphi) dx \right] dt. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Второе слагаемое в левой части (1.7.3) равно нулю. Это проверяется непосредственно интегрированием по частям с учетом граничных условий из (1.7.1), (1.7.2). Тогда, используя начальные условия, равенство (1.7.3) перепишем в виде

$$\int_0^1 g^*(x) \varphi_T(x) dx - \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx = \int_0^T \left[ \int_0^1 (f \varphi^* - f^* \varphi) dx \right] dt, \quad (1.7.4)$$

где

$$\varphi_T(x) = \varphi(T, x) = 0; \quad \varphi_0^*(x) = \varphi^*(0, x).$$

Теперь предположим, что нам требуется найти значение не самого решения  $\varphi$ , а лишь конкретного функционала от этого решения следующего вида:

$$J = \int_0^1 g^*(x) \varphi_T(x) dx + \int_0^T \left( \int_0^1 f^*(t, x) \varphi(t, x) dx \right) dt, \quad (1.7.5)$$

где  $g^*, \varphi^*$  – заданные функции.

Используя соотношение (1.7.4), мы можем получить другую формулу для вычисления  $J$ . Как и в случае стационарных задач, эта формула будет связывать значение  $J$  с решением  $\varphi^*$  сопряженной задачи. В самом деле, из (1.7.4), (1.7.5) имеем

$$J = \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx + \int_0^T \left( \int_0^1 f(t, x) \varphi^*(t, x) dx \right) dt. \quad (1.7.6)$$

Как и в стационарном случае, формула (1.7.6) оказывается предпочтительнее для вычислений, чем (1.7.5), особенно в тех случаях,

когда приходится вычислять значения  $J$  для большого набора различных  $f$ .

В некоторых случаях, когда, например, функции  $f(t, x)$  и  $g(x)$  имеют сложный вид и трудно найти решение  $\varphi$  задачи (1.7.1), для вычисления функционала  $J$  также проще пользоваться формулой (1.7.6). Приведем конкретный пример. Пусть

$$f(t, x) = \sqrt[4]{1 + t^{2/3}e^{-t}} \sin 2\pi x, \quad g(x) = 2 \sin \pi x + \sin 3\pi x.$$

Тогда основная задача (1.7.1) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sqrt[4]{1 + t^{2/3}e^{-t}} \sin 2\pi x, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \quad (1.7.7)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \quad \varphi(0, x) = 2 \sin \pi x + \sin 3\pi x.$$

Предположим, что нам требуется вычислить значение не самого решения  $\varphi$ , а функционала от этого решения вида

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \varphi(T, x) dx. \quad (1.7.8)$$

Для вычисления  $J$  по формуле (1.7.8) необходимо знать значение решения  $\varphi(t, x)$  задачи (1.7.7) при  $t = T$ , которое трудно найти в силу сложного вида функций  $f$  и  $g$ . Воспользуемся для этого формулой (1.7.6). Прежде всего, запишем (1.7.8) в виде (1.7.5), где нужно положить

$$g^*(x) = \sin \pi x, \quad \varphi^*(t, x) \equiv 0. \quad (1.7.9)$$

Составим сопряженную задачу (1.7.2)

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 < x < 1, \quad (1.7.10)$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \quad \varphi^*(T, x) = \sin \pi x.$$

Нетрудно найти решение сопряженной задачи (1.7.10) (например, методом Фурье). Оно будет иметь вид

$$\varphi^*(t, x) = e^{\pi^2(t-T)} \sin \pi x. \quad (1.7.11)$$

Теперь, зная  $\varphi^*$ , воспользуемся для вычисления функционала  $J$  формулой (1.7.6):

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^1 e^{-\pi^2 T} \sin \pi x (2 \sin \pi x + \sin 3\pi x) dx + \\
 &+ \int_0^T \left( \int_0^1 \sqrt[4]{1 + t^{2/3} e^{-t}} \sin 2\pi x e^{\pi^2(t-T)} \sin \pi x dx \right) dt = \\
 &= 2 \int_0^1 e^{-\pi^2 T} \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{\pi} e^{-\pi^2 T}.
 \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Таким образом, в данном случае значение  $J$  из (1.7.8) найдено с помощью сопряженной функции (1.7.11) в явном виде:

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \varphi(T, x) dx = \frac{1}{\pi} e^{-\pi^2 T}. \tag{1.7.13}$$

Рассмотрим теперь вопрос о чувствительности функционала  $J$  к источнику  $f(t, x)$ . С этой целью предположим, что входные данные в задаче (1.7.1) возмущены, т. е. вместо  $f$  и  $g$  рассматриваются функции

$$f' = f + \delta f, \quad g' = g + \delta g.$$

Мы приходим, таким образом, к возмущенной задаче

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} &= f'(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \\
 \varphi'(t, 0) &= \varphi'(t, 1) = 0, \quad \varphi'(0, x) = g'(x).
 \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

Ее решение можно представить в виде

$$\varphi'(t, x) = \varphi(t, x) + \delta \varphi(t, x).$$

Тогда для вариаций функционала в формуле

$$J' = J + \delta J$$



из (1.7.5) и (1.7.6) получим два эквивалентных соотношения:

$$\delta J = \int_0^1 g^*(x) \delta \varphi_T dx + \int_0^T \left( \int_0^1 f^* \delta \varphi dx \right) dt, \quad (1.7.15)$$

$$\delta J = \int_0^1 \varphi_0^* g dx + \int_0^T \int_0^1 \delta f \varphi^* dx dt. \quad (1.7.16)$$

Формула (1.7.16) непосредственно связывает вариацию функционала с вариациями входных данных  $\delta \varphi$  и  $\delta g$ . Она позволяет вычислить  $\delta J$  сразу, не решая дополнительно возмущенной задачи (1.7.14). Аналогичные формулы были получены нами и в случае стационарной задачи.

Приведем пример. Пусть

$$f(t, x) = (1 + 4\pi^2 t) \sin 2\pi x, \quad g(x) = 0.$$

Тогда основная задача примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2 t) \sin 2\pi x, \quad (1.7.17)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \quad \varphi(0, x) = 0.$$

В качестве функционала  $J$  из (1.7.5) выберем следующий:

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \varphi(T, x) dx; \quad (1.7.18)$$

здесь

$$g^*(x) = \sin \pi x, \quad f^*(t, x) \equiv 0.$$

В данном случае нетрудно найти решение задачи (1.7.17); оно имеет вид

$$\varphi(t, x) = t \sin 2\pi x. \quad (1.7.19)$$

Поэтому из (1.7.18) получаем

$$J = T \int_0^1 \sin \pi x \sin 2\pi x dx = 0. \quad (1.7.20)$$

Предположим, что начальное условие в задаче (1.7.17) изменилось и вместо (1.7.17) мы имеем возмущенную задачу

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2 t) \sin 2\pi x, \quad (1.7.21)$$

$$\varphi'(t, 0) = \varphi'(t, 1) = 0, \quad \varphi'(0, x) = e^{\pi^2 T} \sin^2 \pi x.$$

Как изменится при этом функционал  $J$ ? Воспользуемся формулой (1.7.16). Нам следует положить  $\delta f \equiv 0$ ,  $\delta g = e^{\pi^2 T} \sin \pi x$ . Тогда из (1.7.18) и (1.7.16) получаем

$$J' = J + \delta J = \delta J = \int_0^1 \varphi_0^* \delta g \, dx = \int_0^1 \varphi_0^*(x) e^{\pi^2 T} \sin \pi x \, dx, \quad (1.7.22)$$

где  $\varphi_0^*(x) = \varphi^*(0, x)$ , а  $\varphi^*(t, x)$  – решение сопряженной задачи

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, \quad (1.7.23)$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \quad \varphi^*(T, x) = \sin \pi x.$$

Эта задача, как мы уже видели выше, имеет решение

$$\varphi^*(t, x) = e^{\pi^2(t-T)} \sin \pi x. \quad (1.7.24)$$

Поэтому из (1.7.22) получаем

$$J' = \int_0^1 e^{-\pi^2 T} \sin \pi x e^{\pi^2 T} \sin \pi x \, dx = \int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}. \quad (1.7.25)$$

Таким образом, мы вычислили значение возмущенного функционала  $J'$ , не решая возмущенной задачи (1.7.21).

В заключение обратимся к более общему случаю. Рассмотрим нестационарную задачу вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в } (0, T] \times \Omega, \quad (1.7.26)$$

$$\varphi = g, \quad \text{при } t = 0,$$

где  $A$  – линейный оператор;  $\varphi(t, x)$  для каждого  $t$  принадлежит некоторому множеству функций  $D(A)$  с областью определения  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Функции  $f(t, x), g(x)$  для каждого  $t \in [0, T]$  предположим квадратично суммируемыми по  $x$  на  $\Omega$  и принадлежащими вещественному гильбертову пространству  $H = L_2(\Omega)$ , в котором задано обычное скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$ .

Задаче (1.7.26), которую будем называть основной (или невозмущенной), поставим в соответствие сопряженную задачу вида

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = f^* \quad \text{в } (0, T] \times \Omega, \quad (1.7.27)$$

$$\varphi^* = g^* \quad \text{при } t = T,$$

где функции  $f^*, g^*$  пока не определены;  $A^*$  – оператор, сопряженный к  $A$ , удовлетворяющий для каждого  $t$  тождеству Лагранжа

$$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^* \varphi^*), \quad \varphi \in D(A), \quad \varphi^* \in D(A^*). \quad (1.7.28)$$

Заметим, что решение задачи (1.7.27) начинается с  $t = T$  в сторону убывания  $t$  вплоть до  $t = 0$ . В этом случае вычисления будут корректными, если оператор  $A^*$  положительно определенный, т. е. если  $(A^* \varphi^*, \varphi^*) \geq \gamma^2 (\varphi^*, \varphi^*)$  для  $\varphi^* \in D(A^*)$ , где  $\gamma > 0$ .

Предположим, что решения  $\varphi$  и  $\varphi^*$  задач (1.7.26), (1.7.27) являются достаточно гладкими функциями. Проведем некоторые преобразования. Уравнение из (1.7.26) умножим на  $\varphi^*$  скалярно в  $L_2(\Omega)$ , а уравнение (1.7.27) – на  $\varphi$ ; полученные результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по  $t$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\varphi^*, \varphi) dt + \int_0^T [(A\varphi, \varphi^*) - (\varphi, A^* \varphi^*)] dt = \\ = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi)] dt. \end{aligned} \quad (1.7.29)$$

В силу (1.7.28) второе слагаемое в левой части выражения (1.7.29) обращается в нуль. Тогда выражение (1.7.29) с учетом начальных условий представляется в виде

$$(g, \varphi_T) - (g, \varphi_0^*) = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi)] dt, \quad (1.7.30)$$

где

$$\varphi_T = \varphi(T, x), \quad \varphi_0^* = \varphi^*(0, x).$$

Теперь предположим, что нам требуется найти линейный функционал от решения  $\varphi$ , имеющий вид

$$J = (g^*, \varphi_T) + \int_0^T (f^*, \varphi) dt, \quad (1.7.31)$$

где  $f^*, g^*$  – некоторые заданные функции. Используя соотношение (1.7.30), мы можем получить другую формулу для вычисления  $J$ . Из (1.7.30), (1.7.31) имеем

$$J = (g, \varphi_0^*) + \int_0^T (f, \varphi^*) dt. \quad (1.7.32)$$

Эта формула связывает значение  $J$  с решением  $\varphi_0^*$  сопряженной задачи (1.7.27). Как мы видели выше, в некоторых случаях эта формула оказывается более предпочтительной для вычислений по сравнению с (1.7.31).

Рассмотрим теперь проблему чувствительности функционала  $J$  к исходным данным  $f$  и  $g$ . Предположим, что входные данные в задаче (1.7.26) возмущены, т. е. вместо  $f$  и  $g$  мы имеем функции

$$f' = f + \delta f, \quad g' = g + \delta g.$$

Возникает следующая возмущенная задача:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + A\varphi' = f' \quad \text{в } (0, T] \times \Omega, \quad (1.7.33)$$

$$\varphi' = g' \quad \text{при } t = 0.$$

Как изменится при этом функционал  $J$  из (1.7.31)? Решение задачи (1.7.33) представим в виде

$$\varphi'(t, x) = \varphi(t, x) + \delta\varphi(t, x).$$

Тогда, учитывая выражение (1.7.32), будем искать

$$J' = J + \delta J, \quad (1.7.34)$$

где

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt, \quad (1.7.35)$$

или, с другой стороны,

$$\delta J = (g^*, \delta \varphi_T) + \int_0^T (f^*, \delta \varphi) dt. \quad (1.7.36)$$

Формулы (1.7.35), (1.7.36) дают нам два эквивалентных соотношения для определения вариации функционала  $\delta J$ . Однако формула (1.7.35) оказывается более предпочтительной для вычислений, поскольку она непосредственно связывает вариацию функционала с вариациями входных данных  $\delta f, \delta g$  и не использует значение  $\delta \varphi$ . Таким образом, для вычисления отклонения функционала  $J$ , соответствующего различным изменениям во входных данных, как и в случае стационарных задач, не нужно решать большого числа возмущенных задач вида (1.7.33) с различными  $f'$  и  $g'$ . Достаточно решить одну сопряженную задачу (1.7.27) и воспользоваться формулой (1.7.35).

Если в возмущенной задаче (1.7.33) изменяется оператор задачи, т. е.  $A$  заменяется на  $A' = A + \delta A$ , то формула (1.7.35) для вариации  $\delta J$  перейдет в следующую:

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt - \int_0^T (\delta A \varphi', \varphi^*) dt. \quad (1.7.37)$$

Это доказывается аналогично соотношению (1.5.22), полученному в § 1.5 для стационарной задачи.

Когда возмущения являются малыми и можно положить приближенно  $\varphi' = \varphi$ , мы приходим из (1.7.37) к формуле теории малых возмущений:

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt - \int_0^T (\delta A \varphi, \varphi^*) dt. \quad (1.7.38)$$

## 1.8. Сопряженные уравнения и простейшие обратные задачи

Особое значение для приложений имеют сопряженные уравнения при решении обратных задач. Они позволяют наиболее корректно сформулировать алгоритм вычисления неизвестных параметров (например, коэффициентов) дифференциальных операторов.

Рассмотрим сначала одномерную задачу

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} = f, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (1.8.1)$$

где  $f \in L_2(0, 1)$ . Предположим сначала, что  $k = k(x)$  – неизвестная функция, которую необходимо определить. Пусть имеется априорная информация, что  $k(x)$  – кусочно-постоянна, т. е.

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ k_2, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \quad (1.8.2)$$

где  $k_1, k_2$  – пока неизвестные числа. Предположим также, что  $\varphi(x)$  – непрерывная функция, обладающая непрерывным «поток»  $k \frac{d\varphi}{dx}$  и удовлетворяющая почти всюду уравнению (1.8.1) и граничным условиям  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

Пусть далее мы имеем измерения двух функционалов:

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx, \quad J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx, \quad (1.8.3)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – две функции измерения. Введем теперь в рассмотрение две сопряженные задачи, соответствующие функционалам  $J_1$  и  $J_2$ . Так, первая задача имеет вид

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_1^*}{dx} = p_1, \quad \varphi_1^*(0) = \varphi_1^*(1) = 0, \quad (1.8.4)$$

а вторая

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_2^*}{dx} = p_2, \quad \varphi_2^*(0) = \varphi_2^*(1) = 0. \quad (1.8.5)$$

Пусть функции  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$  непрерывны, обладают непрерывными «потоками»  $k \frac{d\varphi_1^*}{dx}, k \frac{d\varphi_2^*}{dx}$  и удовлетворяют почти всюду уравнениям (1.8.4) и (1.8.5) соответственно.

Для определения  $k(x)$  в формуле (1.8.2) поступим следующим образом: умножим (1.8.1) на  $\varphi_1^*$  и результат проинтегрируем по всему интервалу  $0 \leq x \leq 1$ . Будем иметь

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (1.8.6)$$

Левую часть выражения (1.8.6) преобразуем интегрированием по частям:

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = -k \frac{d\varphi}{dx} \varphi_1^* \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx. \quad (1.8.7)$$

Внеинтегральный член в правой части (1.8.7) равен нулю вследствие граничного условия для  $\varphi_1^*$ . Тогда выражение (1.8.6) примет вид

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (1.8.8)$$

Аналогичным образом умножим уравнение (1.8.1) на  $\varphi_2^*$  и произведем те же преобразования. Тогда получим соотношение

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_2^* dx. \quad (1.8.9)$$

Используем теперь соотношения (1.8.8), (1.8.9) для нахождения  $k(x)$ , имея в виду, что функционалы

$$J_1 = \int_0^1 f \varphi_1^* dx, \quad J_2 = \int_0^1 f \varphi_2^* dx \quad (1.8.10)$$

известны из экспериментальных измерений. С учетом (1.8.10) соотношения (1.8.8), (1.8.9) запишутся в виде

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, \quad \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2. \quad (1.8.11)$$

Поскольку вид  $k(x)$  в форме кусочно-постоянной функции задан формулой (1.8.2), то представление (1.8.2) используем в соотношениях (1.8.11). Будем иметь

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx + k_2 \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, \quad (1.8.12)$$

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx + k_2 \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2.$$

Введем обозначения

$$\int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{11}, \quad \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{21}, \quad (1.8.13)$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{12}, \quad \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{22}.$$

Предположим, что функции  $\varphi, \varphi_1^*, \varphi_2^*$  (или хотя бы их производные, фигурирующие в (1.8.12), нам известны заранее. Тогда из (1.8.12) будем иметь систему двух уравнений для определения неизвестных  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 &= J_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 &= J_2. \end{aligned} \quad (1.8.14)$$

Если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то решение задачи (1.8.14) существует. Результат будет тем более точным, чем более превалирующими будут диагональные члены в (1.8.14).

Имея в виду оптимальное планирование эксперимента по нахождению  $k_1$  и  $k_2$ , функции  $p_1$  и  $p_2$  можно выбрать в виде

$$p_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \quad p_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \quad (1.8.15)$$



Таким образом решается простейшая обратная задача по определению коэффициента диффузии.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции  $p_1(x), p_2(x)$  заданы в виде (1.8.15). Предположим, что функции  $\varphi(x), \varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x)$  также заданы и имеют вид (рис. 1.8)

$$\varphi(x) = \sin \pi x,$$

$$\varphi_1^*(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{6}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

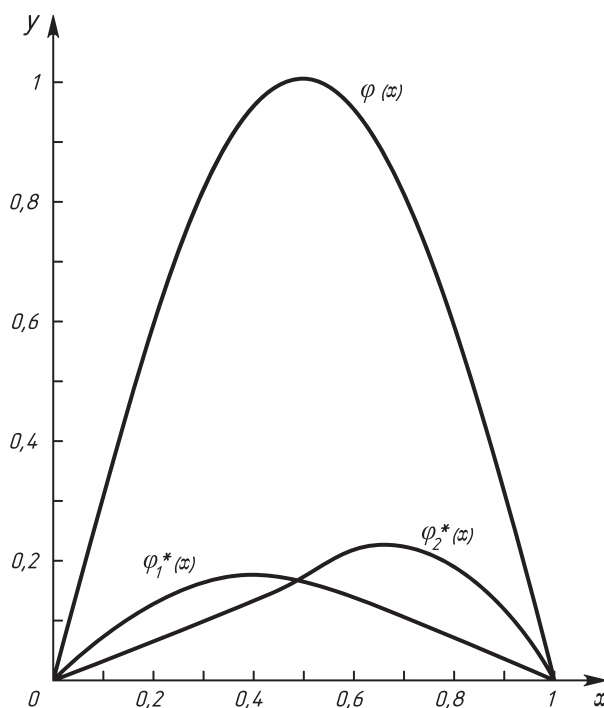


Рис. 1.8

Требуется определить функцию  $k(x)$  в (1.8.2). Найдём значения функционалов  $J_1, J_2$  по формуле (1.8.3):

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx = \int_0^{1/2} \varphi(x) dx = \int_0^{1/2} \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi},$$

$$J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx = \int_{1/2}^1 \varphi(x) dx = \int_{1/2}^1 \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Вычислим  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) из (1.8.13):

$$a_{11} = \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^{1/2} \pi \cos \pi x \left( -2x + \frac{5}{6} \right) dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6},$$

$$a_{12} = \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_{1/2}^1 \pi \cos \pi x \left( -\frac{1}{3} \right) dx = \frac{1}{3},$$

$$a_{21} = \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = \int_0^{1/2} \pi \cos \pi x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3},$$

$$a_{22} = \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = \int_{1/2}^1 \pi \cos \pi x \left( -4x + \frac{8}{3} \right) dx = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3}.$$

Составим систему (1.8.14):

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6} \right) k_1 + \frac{1}{3} k_2 &= \frac{1}{\pi}, \\ \frac{1}{3} k_1 + \left( \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} \right) k_2 &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{1.8.16}$$

Определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} \neq 0,$$

поэтому она имеет единственное решение. Из (1.8.16) легко находим  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/4$ .

Таким образом, обратная задача решена и функция  $k(x)$  найдена. Она имеет вид

$$k(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1/4, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Естественно, что функция  $k(x)$  в других случаях может быть структурно более сложной, чем принята в (1.8.2). Если она непрерывна на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  и имеется некоторая априорная информация о ней, то ее обычно удастся представить в виде

$$k(x) = \sum_{s=1}^m \alpha_s \omega_s(x), \quad (1.8.17)$$

где  $\omega_s(x)$  – заданные аппроксимирующие функции. В этом случае для определения  $\alpha_s$  необходимо предварительно решить  $m$  сопряженных задач вида

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_s^*}{dx} = p_s(x), \quad \varphi_s^*(0) = \varphi_s^*(1) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (1.8.18)$$

где  $p_s(x)$  – функция, связанная с измерением функционала

$$J_s = \int_0^1 p_s \varphi dx. \quad (1.8.19)$$

Зная решения  $m$  сопряженных задач (1.8.18), мы можем перейти к определению  $\alpha_s$ . С этой целью уравнение (1.8.18) умножим на  $\varphi_s^*(x)$  и проинтегрируем по  $x$  на отрезке  $[0,1]$ . Тогда получим

$$-\int_0^1 \varphi_s^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (1.8.20)$$

Имея в виду преобразование левой части выражения (1.8.20) с помощью интегрирования по частям и однородных граничных условий для  $\varphi_s^*$  из (1.8.18), будем иметь

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi_s^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (1.8.21)$$

Нетрудно показать, что одновременно имеет место представление для функционала  $J_s$ :

$$J_s = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (1.8.22)$$

Это проверяется непосредственно следующим образом. Умножим уравнение из (1.8.1) – на  $\varphi_s^*$ , а уравнение из (1.8.18) на  $\varphi$ . Результаты проинтегрируем по  $x$  на отрезке  $[0,1]$  и вычтем один из другого. Тогда получим

$$0 = \int_0^1 f \varphi_s^* dx - \int_0^1 p_s \varphi dx.$$

Отсюда и из (1.8.19) следует наше утверждение.

Вернемся теперь к соотношению (1.8.21). С учетом представления (1.8.17) запишем его в виде

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (1.8.23)$$

где

$$a_{ss'} = \int_0^1 \omega_{s'} \frac{d\varphi_s^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx.$$

Решая  $m$  уравнений (1.8.23), получаем неизвестные  $\alpha_s$  и, следовательно, представление для  $k(x)$ .

Если ошибки измерений достаточно велики, то значение  $m$  функционалов оказывается недостаточным для получения  $\alpha_s$  с нужной точностью. Для повышения точности обычно требуют привлечения большего, чем  $m$ , числа функционалов  $J_s$ . Тогда система уравнений

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, \quad (1.8.24)$$

становится переопределенной, и ее решение находится с помощью метода наименьших квадратов.

Приведем здесь алгоритм метода наименьших квадратов. Согласно этому методу (см., например, [127]), вместо точного решения задачи

(1.8.24) выбираются такие величины  $\alpha'_s$ , для которых сумма квадратов отклонений

$$E = \sum_{s=1}^{m+n} \left( J_s - \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} \right)^2$$

будет наименьшей. Сумма квадратов  $E$  представляет собой квадратичный многочлен относительно переменных  $\alpha'_s$ . Этот многочлен достигает минимума при таких значениях  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , при которых обращаются в нуль все первые частные производные:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_l} = -2 \sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \left( J_s - \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} \right) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда следует, что  $\alpha'_s$  удовлетворяют системе

$$\sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \sum_{s'=1}^m a_{ss'} \alpha_{s'} = \sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} J_s, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Эту систему можно записать в матричном виде, если ввести следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+n,1} & \dots & a_{m+n,n} \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ J_{m+n} \end{bmatrix}.$$

Тогда будем иметь систему

$$A^T A \bar{\alpha} = A^T \bar{\beta},$$

где  $A^T$  – матрица, транспонированная по отношению к  $A$ . Если столбцы матрицы  $A$  являются линейно независимыми, то эта система имеет единственное решение.

Теперь перейдем к рассмотрению общей схемы решения обратных задач с помощью сопряженных уравнений. Пусть имеется задача

$$A\varphi = f, \quad (1.8.25)$$

где  $A$  – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения  $D(A)$ . Пусть в  $H$  задано некоторое

скалярное произведение  $(u, v)$ . Функцию  $f \in H$  будем считать известной. Что касается оператора  $A$ , то априори будем считать его неизвестным, так что

$$A = \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} A_{s'}, \quad (1.8.26)$$

где элементы оператора  $A_s$  известны, а коэффициенты  $\alpha_s$  неизвестны. Задача состоит в нахождении  $\alpha_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) по заданным функционалам от решения, которые определяются на основе измерений

$$J_s = (p_s, \varphi), \quad (1.8.27)$$

где  $p_s$  – характеристика измерений (или прибора).

Введем в рассмотрение набор сопряженных уравнений

$$A^* \varphi_s^* = p_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n. \quad (1.8.28)$$

Умножим скалярно в  $H$  уравнение (1.8.25) – на  $\varphi_s^*$ ; а уравнения (1.8.28) на  $\varphi$ , вычитая одно соотношение из другого, получим

$$(A\varphi, \varphi_s^*) - (\varphi, A^* \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*) - (p_s, \varphi). \quad (1.8.29)$$

Вследствие тождества Лагранжа левая часть этого соотношения обратится в нуль, и мы получим

$$(p_s, \varphi) = (f, \varphi_s^*),$$

или с учетом (1.8.27) имеем двойственное представление

$$J_s = (p_s, \varphi), \quad J_s = (f, \varphi_s^*). \quad (1.8.30)$$

Далее, уравнение (1.8.25) снова скалярно в  $H$  умножим на  $\varphi_s^*$ . Получим

$$(A\varphi, \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*). \quad (1.8.31)$$

Используем представление (1.8.26). Тогда

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, \quad (1.8.32)$$

где  $a_{ss'} = (A_{s'} \varphi, \varphi_s^*)$ .

Система (1.8.32) переопределена. Решая ее методом наименьших квадратов, получаем неизвестные  $\alpha_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ). Так решается обратная задача по восстановлению коэффициентов  $\alpha_s$  в операторе  $A$  из (1.8.26). Отметим, что при ее решении описанным в данном параграфе способом предполагалось, что функции  $\varphi, \varphi_s^*$  известны. Ведь именно они определяют коэффициенты  $a_{ss'}$  в системе (1.8.32). Однако эти функции не всегда можно знать заранее. Оказывается, что в ряде случаев их можно заменить на некоторые «невозмущенные» функции – решения модельных задач, соответствующих задачам (1.8.25), (1.8.28). Это можно сделать на основе методов теории возмущений, о чем будет подробно рассказано в дальнейшем.

Возможны и другие модификации решения обратных задач. Опыт показывает, что во всех случаях применение сопряженных уравнений является весьма эффективным при решении обратных задач.

## 1.9. Теория возмущений

До сих пор мы рассматривали теорию малых возмущений применительно к задачам математической физики. Однако во многих случаях нам требуется получение результата и при возмущениях, которые не являются малыми. Именно эти вопросы будут предметом исследований настоящей и следующей лекций.

Основным математическим аппаратом здесь являются разложения по степеням малого параметра и последовательное решение получающихся при этом задач.

Начнем с рассмотрения общей схемы алгоритмов возмущений. Пусть имеется неоднородное уравнение

$$Au = f, \quad (1.9.1)$$

где  $A$  – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения  $D(A) \subset H$ . Предположим, что задача (1.9.1) разрешима, т. е. существует обратный оператор  $A^{-1}$  на элементах  $f \in H$ . Наряду с задачей (1.9.1), которую назовем *невозмущенной*, введем в рассмотрение задачу *возмущенную*:

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad (1.9.2)$$

где возмущенный оператор имеет ту же область определения  $D(A)$ ,  $f_\varepsilon \in H$ .

Предположим, что

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon \delta A, \quad f_\varepsilon = f + \varepsilon \delta f, \quad (1.9.3)$$

где  $\varepsilon$  – числовой параметр, который в возмущенную задачу вводится формально и лишь в конце всех преобразований может быть положен равным единице. Может случиться, что в той или иной задаче параметр  $\varepsilon$  выделяется численно, и тогда после проведения исследований нужно его положить равным заданному значению.

Приходим к рассмотрению алгоритма теории возмущений. С этой целью решение возмущенной задачи представим в виде ряда

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (1.9.4)$$

Подставим (1.9.4) в (1.9.2). Тогда получим выражение

$$(A + \varepsilon \delta A)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = f + \varepsilon \delta f. \quad (1.9.5)$$

Приравнявая, как это делается обычно, коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} Au_0 &= f, \\ Au_1 &= \delta f - \delta Au_0, \\ Au_i &= -\delta Au_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

Последовательно решая эти уравнения, мы приходим к решению (1.9.4). Если ряд (1.9.4) ограничен некоторым числом членов, например

$$u_\varepsilon^{(N)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^N u_N, \quad (1.9.7)$$

то функцию  $u_\varepsilon^{(N)}$  называют *N-м приближением* к  $u_\varepsilon$ .

Вопросы разрешимости уравнения (1.9.2), представимости решения  $u_\varepsilon$  в виде ряда (1.9.4), разрешимости схемы (1.9.6), сходимости ряда (1.9.4) и решение уравнения (1.9.2) должны рассматриваться исходя из конкретных постановок задач.

Ради простоты изложения алгоритмов будем здесь и в дальнейшем предполагать, что все наши рассуждения и алгоритмические преобразования обоснованны. Это поможет нам сконцентрировать внимание на принципиальных моментах теории и разработки алгоритмов.

Рассмотрим далее общую схему алгоритма возмущения в применении к возмущенному уравнению (1.9.2) в случае, когда  $A_\varepsilon$  и  $f_\varepsilon$  имеют соответственно вид



$$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, \quad A_0 = A, \quad (1.9.8)$$

$$f_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i, \quad f_0 = f,$$

где  $A_i : H \rightarrow H$  – заданные линейные операторы,  $f_i \in H$ .

Будем считать, что возмущенное решение задачи (1.9.2) представимо в виде (1.9.4). Тогда аналогично предыдущему, приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} Au_0 &= f, \\ Au_1 &= f_1 - A_1 u_0, \\ Au_2 &= f_2 - A_1 u_1 - A_2 u_0, \\ &\dots\dots\dots \\ Au_n &= f_n - \sum_{k=1}^n A_k u_{n-k}. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

Последовательно решая эти уравнения, находим  $u_0, u_1, u_2, \dots$ , а следовательно, и  $u_\varepsilon$ , если ряд (1.9.4) сходится.

Рассмотрим теперь простейшую невозмущенную задачу

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} &= f, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

где  $f \in L_2(0, 1)$ .

Рассмотрим далее возмущенную задачу

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon g(x) u_\varepsilon &= f_\varepsilon, \quad x \in (0, 1), \\ u_\varepsilon(0) &= u_\varepsilon(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

где  $f_\varepsilon = f + \varepsilon \delta f$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Здесь  $\delta f \in L_2(0, 1)$ ,  $g$  – кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$g(x) \geq 0. \quad (1.9.12)$$

Нетрудно показать, что при этих условиях возмущенная задача имеет единственное решение на отрезке  $[0,1]$ . Чтобы найти решение этой задачи с помощью алгоритма возмущения, последовательно решим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_0}{dx^2} &= f, & u_0(0) &= u_0(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_1}{dx^2} &= \delta f - g u_0, & u_1(0) &= u_1(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_i}{dx^2} &= -g u_{i-1}, & u_i(0) &= u_i(1) = 0, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

Тогда решение возмущенной задачи найдем в форме

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (1.9.14)$$

Решение невозмущенной задачи (1.9.10) записывается в явном виде:

$$u = x \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''. \quad (1.9.15)$$

Отсюда без труда можно найти все члены ряда (1.9.14) вплоть до  $n = N$ , имея в виду получение решения  $N$ -го порядка точности по  $\varepsilon$ .

Приведем численный пример. Невозмущенную задачу (1.9.10) рассмотрим в виде

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 100x, \quad x \in (0, 1), \quad (1.9.16)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

а в качестве возмущенной задачи (1.9.11) возьмем следующую:

$$-\frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon \sin \pi x u_\varepsilon(x) = 100x + \varepsilon 100 \sin \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad (1.9.17)$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

Таким образом, здесь  $f = 100x$ ,  $\delta f = 100 \sin \pi x$ ,  $g(x) = \sin \pi x$ .

Применим описанный алгоритм возмущений для отыскания решения задачи (1.9.17). Система уравнений (1.9.13) (для  $i = 0, 1, 2$ ) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_0}{dx^2} &= 100x, & u_0(0) &= u_0(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_1}{dx^2} &= 100 \sin \pi x - \sin \pi x \, u_0(x), & u_1(0) &= u_1(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_2}{dx^2} &= -\sin \pi x \, u_1(x), & u_2(0) &= u_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

Задачи (1.9.18) решались методом конечных разностей на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, n$ ,  $h = 1/n$ ,  $n = 100$ . Были рассмотрены простейшие конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации по  $h$ . Полученные системы с трехдиагональными матрицами решались методом факторизации [79]. Рассматривались случаи  $\varepsilon = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , приведенные соответственно на рисунках 1.9–1.11, где, согласно (1.9.7)

$$u_\varepsilon^{(1)} = u_0 + \varepsilon u_1, \quad u_\varepsilon^{(2)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2.$$

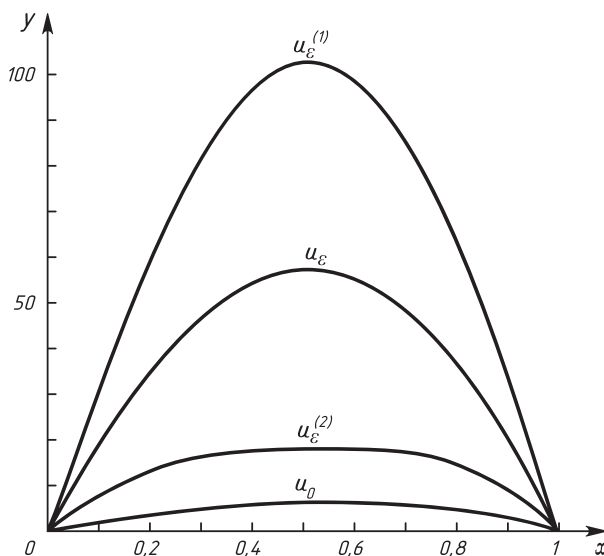


Рис. 1.9

Кроме того, для проверки численно была решена и возмущенная задача (1.9.17) тем же методом конечных разностей. Как видно из рисунков 1.9–1.11, во всех случаях эмпирически имеет место сходимость используемого алгоритма возмущений. На рисунке 1.11 графики  $u_\varepsilon(x)$  и  $u_\varepsilon^1(x)$  практически совпадают. Это означает, что для отыскания решения возмущенной задачи (1.9.17) с точностью  $O(h^2)$  в данном случае достаточно найти  $u_1$  из (1.9.18) и построить функцию  $u_\varepsilon^1(x) = u_0 + \varepsilon u_1$ . При  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 10$  сходимость алгоритма возмущений более медленная (см. рис. 1.9 и 1.10).

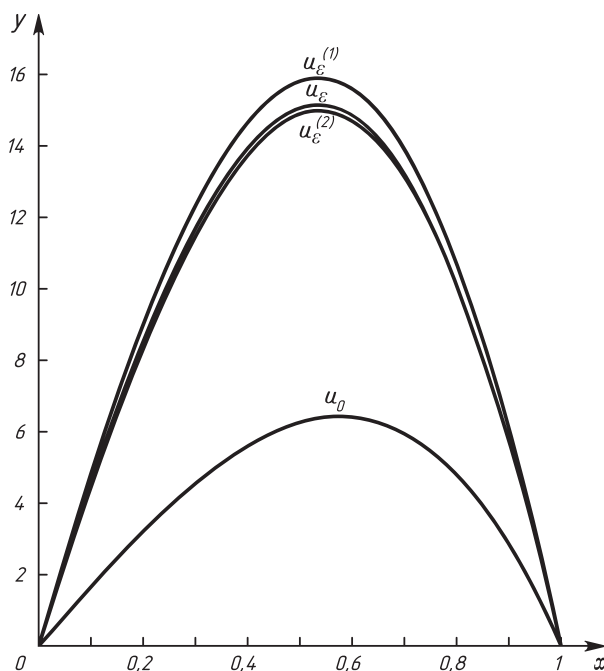


Рис. 1.10

На рисунке 1.12 приведен случай  $\varepsilon = 100$ , где наблюдается уже расходимость метода возмущений, поскольку  $\varepsilon$  очень велико.

В данном простом примере несложно найти условие на параметр  $\varepsilon$ , при котором можно гарантировать сходимость ряда возмущений (1.9.14). Чтобы получить такое условие, оценим нормы функций  $u_i$ , которые определяются из системы (1.9.13). Для  $u_0 \equiv u$  имеет место формула (1.9.15). Докажем, что справедлива оценка

$$\|u\| \leq \frac{1}{c} \|f\|, \quad (1.9.19)$$

где

$$\|u\| = \left( \int_0^1 u^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad c = \sqrt{\frac{189}{43}}.$$

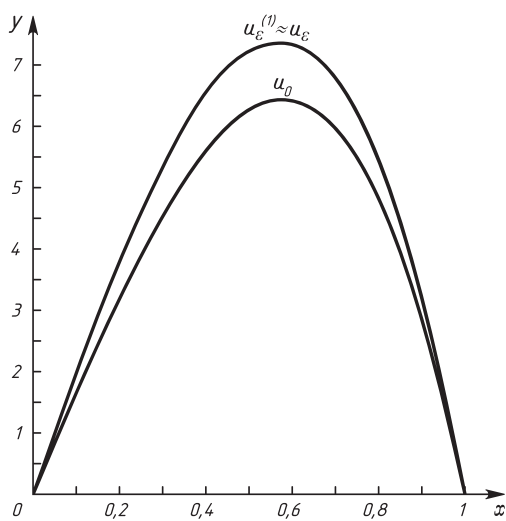


Рис. 1.11

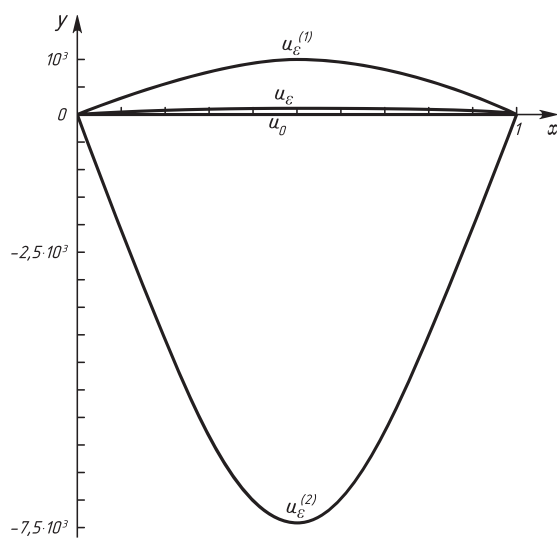


Рис. 1.12

В самом деле, из (1.9.15) получаем равенство

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = \int_0^1 \left\{ x \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right\}^2 \times \\ \times dx = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (1.9.20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x^2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx, \\ I_2 &= \int_0^1 \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx, \\ I_3 &= -2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) \int_0^1 x \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) dx. \end{aligned}$$

Для  $I_1$  имеем

$$I_1 = \frac{1}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2. \quad (1.9.21)$$

Для  $I_2$  справедливо неравенство

$$I_2 \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx \leq \int_0^1 dx \left( \int_0^x \left( \int_0^{x'} dx'' \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left( \int_0^{x'} f^2(x'') dx'' \right)^{1/2} dx' \right)^2 \leq \frac{\|f\|^2}{9}, \end{aligned}$$

то

$$I_2 \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{\|f\|^2}{27}. \quad (1.9.22)$$

Для  $I_3$  интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} I_3 = & -2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) \left( \frac{1}{2} \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left( \int_0^x f(x'') dx'' \right) dx \right) = - \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \\ & + \int_0^1 x^2 \left( \int_0^x f(x'') dx'' \right) dx \cdot \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''. \end{aligned}$$

Поскольку по неравенству Коши – Буняковского для интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \left( \int_0^x f(x'') dx'' \right) dx & \leq \int_0^1 x^2 \left( \int_0^x dx'' \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( \int_0^x f^2(x'') dx'' \right)^{1/2} dx \leq \|f\| \int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7} \|f\|, \\ \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' & \leq \int_0^1 \left( \int_0^{x'} dx'' \right)^{1/2} \left( \int_0^{x'} f^2(x'') dx'' \right)^{1/2} \times \\ & \times dx' \leq \|f\| \int_0^1 (x')^{1/2} dx' = \frac{2}{3} \|f\|, \end{aligned}$$

то

$$I_3 \leq - \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{4}{21} \|f\|^2. \quad (1.9.23)$$

Подставляя оценки (1.9.21)–(1.9.23) в (1.9.20), получаем

$$\|u\|^2 \leq \left( \frac{1}{27} + \frac{4}{21} \right) \|f\|^2 = \frac{43}{189} \|f\|^2,$$

откуда следует неравенство (1.9.19).

Аналогичные оценки получаются и для  $u_1, u_2, \dots$  из (1.9.13):

$$\begin{aligned} \|u_1\| &\leq \frac{1}{c} \|\delta f - gu_0\|, \\ \|u_i\| &\leq \frac{1}{c} \|gu_{i-1}\|, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{1.9.24}$$

Поскольку в нашем примере  $g = \sin \pi x \leq 1$ , то

$$\|u_i\| \leq \frac{1}{c} \|u_{i-1}\|, \quad i = 2, 3, \dots$$

Отсюда последовательно получаем

$$\|u_2\| \leq \frac{1}{c} \|u_1\|, \quad \|u_3\| \leq \frac{1}{c} \|u_2\| \leq \frac{1}{c^2} \|u_1\|, \dots, \|u_n\| \leq \frac{1}{c^{n-1}} \|u_1\|, \dots$$

Тогда ряд (1.9.14) мажорируется сверху числовым рядом

$$\|u_\varepsilon\| \leq \|u_0\| + |\varepsilon| \|u_1\| + c \|u_1\| \sum_{i=2}^{\infty} \left( \frac{|\varepsilon|}{c} \right)^n, \tag{1.9.25}$$

который сходится при  $|\varepsilon| < c$ .

Таким образом, достаточным условием сходимости ряда возмущений (1.9.14) является условие

$$|\varepsilon| < c, \tag{1.9.26}$$

где  $c = \sqrt{189/43}$ .

## 1.10. Сопряженные уравнения. Алгоритмы возмущений

Рассмотрим теперь сопряженную невозмущенную задачу (см. [100])

$$A^* u^* = p, \tag{1.10.1}$$



соответствующую основной задаче (1.9.1). Здесь  $A^*$  – оператор, сопряженный к  $A$ , с областью определения  $D(A^*) \subset H$ ,  $p \in H$ . Задачу (1.10.1) будем считать разрешимой.

Так же как и в случае основной задачи, введем возмущенную сопряженную задачу

$$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon, \quad (1.10.2)$$

где

$$A_\varepsilon^* = A^* + \varepsilon \delta A^*, \quad p_\varepsilon = p + \varepsilon \delta p, \quad (1.10.3)$$

причем  $\delta A^*$  – заданный оператор, действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A^*)$ ,  $\delta p \in H$ . Здесь мы ради общности считаем, что возмущается не только оператор  $A^*$ , но и функция измерения  $p$ . Обычно измерение физической величины (прибора) не меняется, и потому в большинстве практически интересных случаев  $\delta p = 0$ , т. е.  $p_\varepsilon = p$ . Но этого может и не быть.

Решение возмущенной задачи будем искать в виде

$$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \dots \quad (1.10.4)$$

Подставляя (1.10.4), (1.10.3) в (1.10.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему уравнений для определения  $u_i^*$ :

$$\begin{aligned} A^* u_0^* &= p, \\ A^* u_1^* &= \delta p - \delta A^* u_0^*, \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

$$A^* u_i^* = -\delta A^* u_{i-1}^*, \quad i = 2, 3, \dots$$

Если найти лишь функции  $\{u_i^*\}_{i=1}^N$ , то функцию

$$u_\varepsilon^{*(N)} = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \dots + \varepsilon^N u_N^* \quad (1.10.6)$$

можно принять за приближение  $N$ -го порядка к решению возмущенной задачи (1.10.2).

Рассмотрим далее сопряженное возмущенное уравнение в общей форме

$$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon, \quad (1.10.7)$$

где

$$A_\varepsilon^* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i^*, \quad A_0^* = A^*,$$

$$p_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i, \quad p_0 = p.$$
(1.10.8)

Здесь  $A_i^*$  – заданные операторы,  $p_i \rightarrow H$ . Решение задачи (1.10.7) вновь будем искать в виде ряда

$$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \dots$$

Тогда обычным приемом приходим к системе уравнений

$$A^* u_0^* = p,$$

$$A^* u_1^* = p_1 - A_1^* u_0^*,$$

$$A^* u_2^* = p_2 - A_1^* u_1^* - A_2^* u_0^*,$$
(1.10.9)

$$A^* u_n^* = p_n - \sum_{k=1}^n A_k^* u_{n-k}^*.$$

Последовательно решая эти уравнения, можно найти  $u_\varepsilon^{*(N)}$  по формуле (1.10.6).

Вопросы обоснования алгоритмов возмущений для сопряженных задач рассмотрены в работе [100].

В заключение приведем пример. Пусть в пространстве  $H = L_2(0, 1)$  действует оператор  $A$ , определенный дифференциальным выражением

$$Au = -\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx},$$

с областью определения  $D(A)$ , введенной в § 1.1. Тогда задача (1.9.1) будет иметь вид

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = f, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1.10.10)$$

Сопряженная задача (1.10.1), соответствующая (1.10.10), как мы видели в § 1.1, запишется в виде

$$-\frac{d^2 u^*}{dx^2} - \frac{du^*}{dx} = p, \quad x \in (0, 1), \quad u^*(0) = u^*(1) = 0. \quad (1.10.11)$$

Пусть при заданной функции  $p \in H = L_2(0,1)$  решение задачи (1.10.11) нам известно. Наряду с (1.10.11) рассмотрим возмущенную сопряженную задачу (1.10.12) в виде

$$-\frac{d^2 u_\varepsilon^*}{dx^2} - (1 + \varepsilon g(x)) \frac{du_\varepsilon^*}{dx} = p, \quad u_\varepsilon^*(0) = u_\varepsilon^*(1) = 0. \quad (1.10.12)$$

Здесь  $p_\varepsilon = p$ ,  $\delta A^* u_\varepsilon^* = -g(x)(du_\varepsilon^*)/(dx)$ ,  $g(x)$  – достаточно гладкая функция.

Для отыскания решения  $u_\varepsilon^*$  задачи (1.10.12) с точностью  $O(\varepsilon^2)$  воспользуемся описанным выше алгоритмом возмущений. Используя разложение (1.10.4), приходим к системе (1.10.5), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_0^*}{dx^2} - \frac{du_0^*}{dx} &= p, & u_0^*(0) &= u_0^*(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - \frac{du_1^*}{dx} &= g(x) \frac{du_0^*}{dx}, & u_1^*(0) &= u_1^*(1) = 0, \\ -\frac{d^2 u_i^*}{dx^2} - \frac{du_i^*}{dx} &= g(x) \frac{du_{i-1}^*}{dx}, & u_i^*(0) &= u_i^*(1) = 0, i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.10.13)$$

Первое уравнение системы (1.10.13) есть не что иное, как невозмущенная сопряженная задача (1.10.11), решение которой нам известно:  $u_0^* = u^*$ . Решая второе уравнение из (1.10.13), находим  $u^*$ . Тогда согласно (1.10.6) мы можем построить  $u_\varepsilon^{*(1)}$ :

$$u_\varepsilon^{*(1)} = u_0^* + \varepsilon u_1^*.$$

Это и есть приближение первого порядка к  $u_\varepsilon$  – решению возмущенной задачи (1.10.12).

## 1.11. Алгоритмы возмущений для задач на собственные значения

Рассмотрим алгоритмы решения линейных задач на собственные значения. Пусть  $A$  – линейный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения

$D(A) \subset H$ . Предполагается, что функции множества  $D(A)$  удовлетворяют некоторым однородным граничным условиям. Остальные свойства функций  $\varphi \in D(A)$  вытекают из требования, чтобы уравнение

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad (1.11.1)$$

допускало полный набор собственных функций  $\{\varphi_i\}$  (базис в  $H$ ), соответствующих собственным значениям  $\{\lambda_i\}$ .

Если же оператор  $A$  несамосопряженный, то следует ввести в рассмотрение оператор, сопряженный  $A^*$ , согласно тождеству Лагранжа

$$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^*\varphi^*). \quad (1.11.2)$$

Тогда приходим к сопряженной задаче на собственные значения

$$A^*\varphi^* = \lambda\varphi^*. \quad (1.11.3)$$

Здесь считаем, что  $\varphi^*$  принадлежит  $D(A^*)$  – области определения оператора  $A^*$ . Граничные условия для  $\varphi^* \in D(A^*)$  находятся из предположения, что имеет место тождество Лагранжа, и при образовании левой части этого тождества в правую внеинтегральные члены следует полагать равными нулю. Отсюда приходим к граничным условиям для  $\varphi^*$ . Другие свойства функций множества  $D(A^*)$  вытекают из обоснованности упомянутых выше преобразований, связанных с тождеством Лагранжа.

Уравнения (1.11.1) и (1.11.3) будем называть *невозмущенными*. Введем далее в рассмотрение возмущенное уравнение, соответствующее (1.11.1). Будем иметь

$$A_\varepsilon\varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\varphi_\varepsilon, \quad (1.11.4)$$

где  $A_\varepsilon$  – некоторый линейный оператор, действующий в  $H$ . Приведем формальную схему алгоритма нахождения собственных векторов и собственных значений  $\varphi_\varepsilon$  и  $\lambda_\varepsilon$  по заданным возмущениям в операторе задачи  $A_\varepsilon$ .

Рассмотрим сначала неоднородное уравнение, соответствующее однородному невозмущенному уравнению (1.11.1),

$$A\varphi = \lambda\varphi + f \quad (1.11.5)$$

и однородную сопряженную задачу, также соответствующую невозмущенной задаче (1.11.1),

$$A^*\varphi^* = \lambda\varphi^*, \quad (1.11.6)$$

где функции  $\varphi, \varphi^*$ , так же как и  $\lambda$ , будем считать вещественными.

Умножим скалярно уравнение (1.11.5) на  $\varphi^*$ , а уравнение (1.11.6) на  $\varphi$ . Тогда с помощью тождества Лагранжа приходим к условию

$$(f, \varphi^*) = 0. \quad (1.11.7)$$

Это значит, что для решения задачи (1.11.5) требуется ортогональность собственных функций сопряженной задачи к правой части уравнения (1.11.5). Итак, будем считать, что соотношение ортогональности имеет место. Предположим далее, что возмущение оператора  $A$  определяется некоторым параметром и имеет место представление

$$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A^{(i)}, \quad (1.11.8)$$

где  $A^{(0)} = A$ , а  $A^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – некоторые линейные операторы, действующие в  $H$ , с областью определения  $D(A)$ .

Допустим, что  $\varphi_\varepsilon$  и  $\lambda_\varepsilon$  представимы в виде рядов по параметру  $\varepsilon$ :

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda^{(i)}, \quad \lambda^{(0)} = \lambda, \quad (1.11.9)$$

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi^{(i)}, \quad \varphi^{(0)} = \varphi,$$

сходящихся в некоторой области  $\varepsilon = 0$ .

Здесь  $\lambda$  – собственное значение, а  $\varphi$  – соответствующая ему собственная функция невозмущенной задачи (1.11.1).

Подставляя ряды (1.10.12) в уравнение (1.11.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему

$$\begin{aligned} (A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(0)} &= 0, \quad \lambda^{(0)} = \lambda, \quad \varphi^{(0)} = \varphi, \\ (A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(1)} &= \lambda^{(1)} \varphi^{(0)} - A^{(1)} \varphi^{(0)}, \\ (A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(n)} &= \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} \varphi^{(n-i)} - \sum_{i=1}^n A^{(i)} \varphi^{(n-i)}, \end{aligned} \quad (1.11.10)$$

где  $E$  – тождественный оператор, т. е.  $E\varphi = \varphi$ . Систему уравнений (1.11.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned}(A - \lambda^{(0)}E)\varphi^{(0)} &= 0, \\ (A - \lambda^{(0)}E)\varphi^{(1)} &= f_1, \\ (A - \lambda^{(0)}E)\varphi^{(n)} &= f_n.\end{aligned}\tag{1.11.11}$$

Здесь  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) определяется формулой

$$f_n = \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)}\varphi^{(n-i)} - \sum_{i=1}^n A^{(i)}\varphi^{(n-i)}.\tag{1.11.12}$$

Уравнения системы (1.11.10) последовательно умножим скалярно на функцию  $\varphi^*$  – решение сопряженного уравнения (1.11.6) – и из каждого соотношения вычтем выражение, получаемое с помощью скалярного умножения уравнения (1.11.6) соответственно на  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$ . Тогда, используя тождества Лагранжа, получим равенства

$$\begin{aligned}\lambda^{(1)}(\varphi^{(0)}, \varphi^*) - (A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*) &= 0, \\ \lambda^{(2)}(\varphi^{(0)}, \varphi^*) + \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^*) - (A^{(2)}\varphi^{(0)} + A^{(1)}\varphi^{(1)}, \varphi^*) &= 0, \\ \dots\dots\dots\end{aligned}\tag{1.11.13}$$

В результате приходим к следующему алгоритму. Сначала решаются две невозмущенные задачи:

$$A\varphi^{(0)} = \lambda^{(0)}\varphi^{(0)}, \quad A^*\varphi^* = \lambda^{(0)}\varphi^*.\tag{1.11.14}$$

Затем по найденным  $\varphi^{(0)}$  и  $\varphi^*$  с помощью первого из соотношений (1.11.13) находится

$$\lambda^{(1)} = \frac{(A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*)}{(\varphi^{(0)}, \varphi^*)}.\tag{1.11.15}$$

После этого мы имеем возможность рассчитать правую часть второго из уравнений (1.11.10) или (1.11.11):

$$f_1 = \lambda^{(1)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(0)}.\tag{1.11.16}$$

Далее решается второе из уравнений (1.11.11) и находится  $\varphi^{(1)}$ . Теперь известными являются  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^*$  и величины  $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$ . С помощью второго из уравнений (1.11.10) найдем  $\lambda^{(2)}$ :

$$\lambda^{(2)} = \frac{(A^{(2)}\varphi^{(0)} + A^{(1)}\varphi^{(1)}, \varphi^*) - \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^*)}{(\varphi^{(0)}, \varphi^*)}. \quad (1.11.17)$$

Зная  $\lambda^{(2)}$ , мы можем вычислить

$$f_2 = \lambda^{(2)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}\varphi^{(1)} - A^{(2)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(1)} \quad (1.11.18)$$

и решить следующую задачу:

$$(A - \lambda^{(0)}E)\varphi^{(2)} = f_2. \quad (1.11.19)$$

Отсюда найдем  $\varphi^{(2)}$  и т. д. Таким образом, удастся последовательно найти все поправки  $\varphi^{(n)}, \lambda^{(n)}$  и, следовательно,  $\varphi_\varepsilon$  – собственную функцию невозмущенной задачи, соответствующую возмущенному собственному значению  $\lambda_\varepsilon$ . Так можно уточнить любое собственное значение.

Приведем иллюстрирующий пример. Пусть  $H = L_2(0, 1)$  – гильбертово пространство вещественных функций  $u(x)$ , определенных на  $0 \leq x \leq 1$  и интегрируемых с квадратом, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx, \quad u, v \in H. \quad (1.11.20)$$

В качестве  $A$  рассмотрим простейший дифференциальный оператор

$$A\varphi = -2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi, \quad \varphi \in D(A), \quad (1.11.21)$$

с областью определения  $D(A)$ , введенной в § 1.1.

Рассмотрим задачу (1.11.1) для данного оператора  $A$ . Ее можно переписать в виде следующей краевой задачи:

$$-2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = \lambda\varphi, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (1.11.22)$$

Это есть не что иное, как простейшая задача Штурма – Лиувилля. Известно, что оператор  $A$  обладает счетным множеством простых собственных значений  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = 2\pi^2 i^2 + 1, \quad (1.11.23)$$

каждому из которых соответствует собственная функция  $\varphi_i = \sqrt{2} \sin \pi i x$ , причем элементы  $\{\varphi_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) образуют полную ортонормированную систему в  $H = L_2(0, 1)$ .

Вместе с  $A$  рассмотрим возмущенный оператор  $A_\varepsilon$ , действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A)$ , который определяется по формуле

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon A^{(1)}, \quad (1.11.24)$$

где  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $A^{(1)}$  – линейный оператор вида

$$A^{(1)}\varphi = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi(x), \quad \varphi \in D(A), \quad (1.11.25)$$

а функции  $p(x), q(x)$  пусть заданы в виде

$$p(x) = 1 + \sin \pi x, \quad q(x) = -2\pi^2 \sin \pi x.$$

Таким образом, согласно формуле (1.11.3), в нашем случае  $A_i \equiv 0$  ( $i = 2, 3, \dots$ ).

Для возмущенного оператора  $A_\varepsilon$  также рассмотрим задачу на собственные значения (1.11.4), которую можно записать в виде краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(2 + \varepsilon p(x))\frac{d\varphi_\varepsilon}{dx} + (1 + \varepsilon q(x))\varphi_\varepsilon(x) &= \lambda u, \\ x \in (0, 1), \quad \varphi_\varepsilon(0) &= \varphi_\varepsilon(1) = 0. \end{aligned} \quad (1.11.26)$$

Из общей теории для таких уравнений известно, что эта задача имеет счетное число простых собственных значений  $\lambda_\varepsilon^{(1)}, \lambda_\varepsilon^{(2)}, \dots$ . Однако найти эти собственные значения в явном виде не удастся. Оказывается, в данном случае можно воспользоваться описанным выше алгоритмом возмущений. Проиллюстрируем применение этого алгоритма для отыскания первого собственного значения  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(1)}$  с точностью  $O(\varepsilon^3)$ . Предположим, что разложения (1.11.9) имеют место.

Поскольку оператор  $A$  самосопряжен ( $A = A^*$ ), то невозмущенные задачи в (1.11.14) совпадают и имеют вид (1.11.22). Мы имеем

$$\lambda^{(0)} = 2\pi^2 + 1, \quad \varphi^{(0)} = \varphi^* = \sqrt{2} \sin \pi x. \quad (1.11.27)$$



Используя  $\varphi^{(0)}$  и  $\varphi^*$ , находим  $\lambda^{(1)}$  по формуле (1.11.15):

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= (A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*) = \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi^{(0)}}{dx} \right)^2 dx + \\ &+ \int_0^1 q(x)(\varphi^{(0)})^2 dx = 2\pi^2 \int_0^1 (1 + \sin \pi x) \cos^2 \pi x dx + \\ &+ 2 \int_0^1 (-2\pi^2 \sin \pi x) \sin^2 \pi x dx = \pi^2 - 4\pi. \end{aligned} \quad (1.11.28)$$

(Здесь мы учли, что  $(\varphi^{(0)}, \varphi^*) = 1$ .) По формуле (1.11.16) вычислим правую часть  $f_1$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda^{(1)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(0)} = \lambda^{(1)}\sqrt{2}\sin\pi x + \\ &+ \sqrt{2}\pi \frac{d}{dx}(p(x)\cos\pi x) - \sqrt{2}q(x)\sin\pi x = \\ &= \sqrt{2}\pi^2 - 4\sqrt{2}\pi \sin \pi x, \end{aligned} \quad (1.11.29)$$

а затем решим второе из уравнений (1.11.11), которое можно записать в виде краевой задачи

$$-2\frac{d^2\varphi^{(1)}}{dx^2} + \varphi^{(1)} - (2\pi^2 + 1)\varphi^{(1)} = f_1, \quad \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(1)}(1) = 0. \quad (1.11.30)$$

Нетрудно показать, что решением этой задачи будет функция

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^x f_1(\tau) \sin \pi(\tau - x) d\tau = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \pi x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \pi x;$$

она удовлетворяет условию

$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(0)}) = \int_0^1 \varphi^{(1)}(x) \varphi^{(0)}(x) dx = 0. \quad (1.11.31)$$

Используя  $\varphi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$  и условие (1.11.31), по формуле (1.11.17) найдем  $\lambda^{(2)}$ :

$$\lambda^{(2)} = (A^{(1)}\varphi^{(1)}, \varphi^*) = \int_0^1 p(x) \frac{d\varphi^{(1)}}{dx} \frac{d\varphi^{(0)}}{dx} dx + \int_0^1 q(x) \varphi^{(1)}(x) \varphi^{(2)}(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1 + \sin \pi x) \left( \frac{\pi}{2} (2\sqrt{2}x - \sqrt{2}) \sin \pi x \right) (\sqrt{2}\pi \cos \pi x) dx + \\
&+ \int_0^1 (-2\pi^2 \sin \pi x) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \pi x - \left( \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \pi x \right) \times \\
&\quad \times (\sqrt{2} \sin \pi x) dx = -(\pi^2 + 8).
\end{aligned}$$

Итак, с точностью до  $O(\varepsilon^3)$  мы можем написать

$$\lambda_\varepsilon \approx \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} = 2\pi^2 + 1 + \varepsilon(\pi^2 - 4\pi) - \varepsilon^2(\pi^2 + 8). \quad (1.11.32)$$

Далее, зная  $\lambda^{(2)}$ , мы можем вычислить  $f_2$  по формуле (10.31), решить задачу (1.11.18) и найти  $\varphi^{(2)}$ , а затем  $\lambda^{(3)}$  и т. д.

Таким образом, описанный алгоритм возмущений позволяет найти возмущенное собственное значение  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(1)}$  с любой наперед заданной точностью по  $\varepsilon$ . Аналогичным образом можно вычислить любое собственное значение  $\lambda_\varepsilon^{(k)}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) задачи (1.11.26).

## Глава 2

# Простейшие основные и сопряженные задачи математической физики

Спектр возможных применений основных и сопряженных задач достаточно широк. Это прежде всего теория возмущений для функционалов и их чувствительности по отношению к различным вариациям входных параметров задач. Особенно важными эти проблемы оказываются для сложных систем, где прямые и обратные связи процессов особенно завуалированы многочисленными деталями, которые затрудняют оценку связей различных факторов. А между тем оценка чувствительности функционалов к тем или иным вариациям параметров во многих случаях дает ответ на правильную постановку эксперимента или создание оптимального управления процессами.

Этим проблемам посвящена вся монография. Но для простоты восприятия основных идей мы начнем рассмотрения с простейших задач математической физики.

### 2.1. Уравнение диффузии

Задачи диффузии субстанций являются, пожалуй, наиболее распространенными проблемами математической физики и применений. Одновременно они являются достаточно простым объектом для анализа. Поэтому применение сопряженных уравнений мы начнем именно с проблем диффузии – простейших одномерных задач, имея в ви-

ду, что распространение теории на многомерный случай будет дано в дальнейшем в конкретных приложениях.

Рассмотрим задачу диффузии в следующем виде:

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} + q\varphi = f, \quad x \in (0, 1), \quad (2.1.33)$$

где  $k(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  – кусочно-непрерывные функции в  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\varphi \in D(A)$ . Каждый элемент множества  $D(A)$  непрерывен, имеет непрерывную и дифференцируемую производную  $k \frac{d\varphi}{dx}$  так, что производная  $\frac{d}{dx} (k \frac{d\varphi}{dx})$  кусочно-непрерывна в  $\Omega$ . Предположим далее, что все функции множества  $D(A)$  удовлетворяют однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\varphi}{dx} + \beta \varphi &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \gamma \frac{d\varphi}{dx} + \sigma \varphi &= 0 \quad \text{при } x = 1, \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  – заданные числа, причем  $\alpha, \gamma \neq 0$ .

Задачу (2.1.33), (2.1.34) будем рассматривать в вещественном гильбертовом пространстве  $H = L_2(\Omega)$  со скалярным произведением

$$(v, \omega) = \int_0^1 v(x) \omega(x) dx,$$

где  $v, \omega \in H$ . Эту задачу можно записать в операторном виде

$$A\varphi = f, \quad (2.1.35)$$

где  $A$  – линейный оператор, действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A)$  и

$$A\varphi = -\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} + q\varphi.$$

Заметим попутно, что если граничные условия в (2.1.34) неоднородны, то соответствующим линейным преобразованием решения  $\varphi$  их можно сделать однородными, изменив при этом функцию  $f(x)$  на новую.

Имея в виду основную задачу (2.1.33), (2.1.34), сформулируем теперь сопряженную задачу по отношению к функционалу:

$$J_p = \int_0^1 p\varphi dx, \quad (2.1.36)$$

где  $p(x)$  – заданная функция, связанная с измерением поля  $\varphi$ . В некоторых случаях она, как отмечалось выше, называется функцией разрешения прибора. С этой целью введем в рассмотрение сопряженную функцию  $\varphi^*$ , умножим уравнение (2.1.33) на  $\varphi^*$  и результат проинтегрируем по всей области  $\Omega = (0, 1)$ . Получим

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^1 q\varphi^* \varphi dx = \int_0^1 f\varphi^* dx. \quad (2.1.37)$$

Первый из интегралов в (2.1.37) преобразуем так, чтобы множителем оказалась функция  $\varphi$ . Для этого проинтегрируем это выражение по частям дважды. Получим

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx &= -k\varphi^* \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 k \frac{d\varphi^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = \\ &= -k\varphi^* \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + k\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Подставим (2.1.38) в выражение (2.1.37). Тогда получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi \left( -\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi^* \right) dx - \\ &- k\varphi^* \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + k\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 f\varphi^* dx. \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

До сих пор мы не определили множества функций  $\varphi^* \in D(A^*)$ . Теперь мы предположим, что  $\varphi^*$  непрерывна, обладает непрерывным и дифференцируемым «поток»  $k \frac{d\varphi^*}{dx}$ , таким, что  $\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx}$  кусочно

непрерывна. Потребуем, чтобы внеинтегральное выражение в левой части (2.1.39) обратилось в нуль:

$$-k \left( \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \right) \Big|_{x=1} + k \left( \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.1.40)$$

Достаточными условиями для выполнения этого равенства будут

$$\begin{aligned} \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} &= 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

Производные  $d\varphi/dx$  в (2.1.41) исключим, выразив их через  $\varphi$  с помощью граничных условий (2.1.34), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{\beta}{\alpha} \varphi \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{\sigma}{\gamma} \varphi \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Тогда условия (2.1.41) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \varphi \left( -\frac{\beta}{\alpha} \varphi^* - \frac{d\varphi^*}{dx} \right) &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \varphi \left( -\frac{\sigma}{\gamma} \varphi^* - \frac{d\varphi^*}{dx} \right) &= 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Отсюда следует, что (2.1.40) будет иметь место, если наряду с условиями (2.1.34) для функции  $\varphi$  будут иметь место условия для функции  $\varphi^*$  в виде

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\varphi^*}{dx} + \beta \varphi^* &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \gamma \frac{d\varphi^*}{dx} + \sigma \varphi^* &= 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

С учетом условий (2.1.44) внеинтегральные члены в (2.1.39) обратятся в нуль, и мы получим

$$\int_0^1 \varphi \left( -\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi^* \right) dx = \int_0^1 f\varphi^* dx. \quad (2.1.45)$$

Предположим теперь, что функция  $\varphi^*$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi^* = p. \quad (2.1.46)$$

Тогда соотношение (2.1.45) примет вид

$$\int_0^1 p\varphi dx = \int_0^1 f\varphi^* dx,$$

и мы приходим к двойственному представлению функционала  $J_p$ :

$$J_p = \int_0^1 p\varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f\varphi^* dx. \quad (2.1.47)$$

Итак, сопряженная задача, соответствующая основной задаче диффузии (2.1.33), (2.1.34), окончательно примет вид

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi^* = p; \quad (2.1.48)$$

$$\alpha \frac{d\varphi^*}{dx} + \beta\varphi^* = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.1.49)$$

$$\gamma \frac{d\varphi^*}{dx} + \sigma\varphi^* = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Это значит, что искомый функционал  $J_p$  можно получить, решая либо основную задачу (2.1.33), (2.1.34), либо сопряженную задачу (2.1.48), (2.1.49), используя одно из эквивалентных представлений (2.1.47). При этом решение задачи (2.1.48), (2.1.49) ищется среди функций множества  $D(A^*)$ , совпадающего с  $D(A)$ .

Переходим теперь к формулировке теории чувствительности. С этой целью рассмотрим возмущенную задачу диффузии, соответствующую (2.1.33). Имеем

$$-\frac{d}{dx} k' \frac{d\varphi'}{dx} + q'\varphi' = f'; \quad (2.1.50)$$

$$\alpha' \frac{d\varphi'}{dx} + \beta'\varphi' = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.1.51)$$

$$\gamma' \frac{d\varphi'}{dx} + \sigma'\varphi' = 0 \quad \text{при } x = 1,$$

где величины со штрихом могут быть представлены в виде сумм основных значений и вариаций:

$$k' = k + \delta k, \quad \varphi' = \varphi + \delta \varphi,$$

$$q' = q + \delta q, \quad \alpha' = \alpha + \delta \alpha,$$

$$f' = f + \delta f, \quad \beta' = \beta + \delta \beta,$$

$$\sigma' = \sigma + \delta \sigma, \quad \gamma' = \gamma + \delta \gamma,$$

причем  $\alpha' \gamma' \neq 0$ . В качестве исследуемого функционала задачи выберем следующий:

$$J' = \int_0^1 p \varphi' dx = J_p + \delta J, \quad \delta J = \int_0^1 p \delta \varphi dx. \quad (2.1.52)$$

Уравнение (2.1.50) умножим на  $\varphi^*$  – решение сопряженной задачи (2.1.48), (2.1.39), а уравнение (2.1.48) умножим на  $\varphi'$  – решение задачи (2.1.50), (2.1.51); результаты проинтегрируем по  $x$  в пределах от  $x = 0$  до  $x = 1$  и вычтем один из другого. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi^* \left( -\frac{d}{dx} k' \frac{d\varphi'}{dx} + q' \varphi' \right) dx - \\ & - \int_0^1 \varphi' \left( -\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q \varphi^* \right) dx = \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^1 p \varphi' dx. \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

Первый и второй интегралы в левой части выражения (2.1.53) интегрированием по частям преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi^* \left( -\frac{d}{dx} k' \frac{d\varphi'}{dx} + q' \varphi' \right) dx = \\ & = -k' \varphi^* \frac{d\varphi'}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \left( k' \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} + q' \varphi' \varphi^* \right) dx, \end{aligned} \quad (2.1.54)$$



$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \varphi' \left( -\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi^* \right) dx = \\
& = -k\varphi' \frac{d\varphi^*}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \left( k \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} + q\varphi'\varphi^* \right) dx.
\end{aligned}$$

Используя условия (2.1.49) и (2.1.51) и подставляя (2.1.54) в (2.1.53), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \delta k \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} + \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi^* dx + \\
& + \delta \left( \frac{k\sigma}{\gamma} \right) \Big|_{x=1} \varphi'(1)\varphi^*(1) - \delta \left( \frac{k\beta}{\alpha} \right) \Big|_{x=0} \varphi'(0)\varphi^*(0) = \quad (2.1.55) \\
& = \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^1 p \varphi' dx.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\delta \left( \frac{k\sigma}{\gamma} \right) = \frac{k'\sigma'}{\gamma'} - \frac{k\sigma}{\gamma}, \quad \delta \left( \frac{k\beta}{\alpha} \right) = \frac{k'\beta'}{\alpha'} - \frac{k\beta}{\alpha}.$$

Теперь несколько преобразуем правую часть в (2.1.55), имея в виду, что

$$\int_0^1 f' \varphi^* dx = \int_0^1 f \varphi^* dx + \int_0^1 \delta f \varphi^* dx = J_p + \int_0^1 \delta f \varphi^* dx, \quad (2.1.56)$$

$$\int_0^1 p \varphi' dx = \int_0^1 p \varphi dx + \int_0^1 p \delta \varphi dx = J_p + \delta J,$$

где  $\delta J = \int_0^1 p \delta \varphi dx$ . В результате приходим к формуле теории возмущений

$$\begin{aligned} \delta J = & -\delta \left( \frac{k\sigma}{\gamma} \right) \Big|_{x=1} \varphi'(1)\varphi^*(1) + \delta \left( \frac{k\beta}{\alpha} \right) \Big|_{x=0} \varphi'(0)\varphi^*(0) - \\ & - \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi dx + \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta k \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

Если возмущенное решение  $\varphi'$  приближенно заменить на невозмущенное  $\varphi$ , то приходим к формуле теории малых возмущений

$$\begin{aligned} \delta J = & -\delta \left( \frac{k\sigma}{\gamma} \right) \Big|_{x=1} \varphi(1)\varphi^*(1) + \delta \left( \frac{k\beta}{\alpha} \right) \Big|_{x=0} \varphi(0)\varphi^*(0) + \\ & + \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi dx - \int_0^1 \delta k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

Напомним, что здесь

$$\delta \left( \frac{k\sigma}{\gamma} \right) = \frac{k'\sigma'}{\gamma'} - \frac{k\sigma}{\gamma}, \quad \delta \left( \frac{k\beta}{\alpha} \right) = \frac{k'\beta'}{\alpha'} - \frac{k\beta}{\alpha}.$$

Формула (2.1.58) дает оценку чувствительности вариации функционала  $\delta J$  к вариациям входных данных.

Отметим, что если граничные условия в задаче (2.1.50), (2.1.51) не возмущаются, то  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \beta$ ,  $\gamma' = \gamma$ ,  $\sigma' = \sigma$  и формула (2.1.58) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta J = & -\frac{\sigma}{\gamma} \delta k(1) \varphi(1) \varphi^*(1) + \frac{\beta}{\alpha} \delta k(0) \varphi(0) \varphi^*(0) + \\ & + \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi dx - \int_0^1 \delta k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx. \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

Приведем конкретный пример. Невозмущенную задачу (2.1.33), (2.1.34) рассмотрим в виде

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = e^x, \quad x \in (0, 1); \quad (2.1.60)$$

$$-\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.1.61)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Здесь  $k = q = 1$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \gamma = \sigma = 1$ . Решение  $\varphi$  задачи (2.1.60), (2.1.61) легко находится в явном виде:

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^x. \quad (2.1.62)$$

Функционал (2.1.36) будем рассматривать в виде

$$J_p = \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (2.1.63)$$

В данном случае  $p(x) \equiv 1$  и

$$J_p = \int_0^1 \left( \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^x \right) dx = \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}e^{-1} - \frac{3}{2}.$$

Запишем сопряженную задачу (2.1.48), (2.1.49), соответствующую основной задаче (2.1.60), (2.1.61), по отношению к функционалу (2.1.63):

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} + \varphi^* = 1, \quad x \in (0, 1); \quad (2.1.64)$$

$$-\frac{d\varphi^*}{dx} + \varphi^* = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.1.65)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} + \varphi^* = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Эта задача имеет решение

$$\varphi^*(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{x-1} - \frac{1}{2}e^{-x}. \quad (2.1.66)$$

Рассмотрим возмущенную задачу диффузии (2.1.50), (2.1.51), соответствующую задаче (2.1.60), (2.1.61), в виде

$$-\frac{d}{dx}(1 + \varepsilon e^x) \frac{d\varphi'}{dx} + \varphi' = e^x + \varepsilon e^x + \varepsilon(1 + \varepsilon)xe^{2x}, \quad x \in (0, 1); \quad (2.1.67)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{d\varphi'}{dx} + \varphi' &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\
\frac{d\varphi'}{dx} + \varphi' &= 0 \quad \text{при } x = 1.
\end{aligned}
\tag{2.1.68}$$

Здесь мы положили  $k' = 1 + \delta k$ ,  $\delta k = \varepsilon e^x$ ,  $f'(x) = f(x) + \delta f$ ,  $\delta f = \varepsilon e^x + \varepsilon(1 + \varepsilon)xe^{2x}$ ,  $\delta q = 0$ ,  $\delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = \delta\sigma = 0$ . Для отыскания значения функционала (2.1.52) воспользуемся формулой

$$J' = \int_0^1 \varphi'(x) dx = J_p + \delta J$$

теории малых возмущений (2.1.59). Имеем

$$\begin{aligned}
J' \approx J'_{(1)} &\equiv J_p - \delta k(1)\varphi(1)\varphi^*(1) - \delta k(0)\varphi(0)\varphi^*(0) + \\
&+ \int_0^1 \delta f \varphi^* dx - \int_0^1 \delta k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx.
\end{aligned}
\tag{2.1.69}$$

Все функции, входящие в правую часть выражения (2.1.69), известны. Поэтому формула (2.1.69) позволяет при малых  $\varepsilon$  найти приближенное значение  $J'$ , не решая возмущенной задачи (2.1.67), (2.1.68). В данном конкретном случае можно оценить, насколько велика погрешность применения этой формулы, поскольку известно точное решение невозмущенной задачи (2.1.67), (2.1.68); оно имеет вид

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon \varphi_1(x), \tag{2.1.70}$$

где  $\varphi_1(x) = \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^x$ .

Тогда, используя формулы (2.1.57) и (2.1.69), для разности  $J' - J'_{(1)}$  получаем

$$\begin{aligned}
J' - J'_{(1)} &= -\varepsilon^2 k_1(1)\varphi_1(1)\varphi^*(1) - \\
&- \varepsilon^2 k_1(0)\varphi_1(0)\varphi^*(0) - \varepsilon^2 \int_0^1 k_1(x) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi^*}{dx} dx.
\end{aligned}
\tag{2.1.71}$$

Здесь  $k_1(x) = e^x$ .

Таким образом, формула (2.1.69) позволяет вычислять значение функционала  $J'$  с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ . Используя вид функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi^*(x)$ ,  $k_1(x)$ , разность  $J' - J'_{(1)}$  в данном случае легко вычислить по формуле (2.1.71) в явном виде:

$$J' - J'_{(1)} = -\varepsilon^2(10e^2 - 13e^{-1} - 18)/72 \approx -0,71\varepsilon^2.$$

## 2.2. Уравнение теплопроводности

Задача теплопроводности является одной из типичных нестационарных задач математической физики. Исторически сложилось так, что именно благодаря уравнению теплопроводности были поставлены и решены многие принципиальные вопросы теории вычислений и построены первоклассные алгоритмы решения задач математической физики. Мы рассмотрим здесь простейшую задачу о распространении тепла в однородном ограниченном стержне, нагреваемом за счет внутренних источников:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q\varphi = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.2.1)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\varphi(x, 0) = g(x). \quad (2.2.3)$$

Величины  $k(x, t)$ ,  $q(x, t)$ ,  $f(x, t)$  будем, например, считать неотрицательными кусочно-непрерывными функциями координаты  $x$  и времени  $t$ , а  $g(x)$  – координаты  $x$ . Это наиболее распространенная в приложениях постановка задачи<sup>4</sup>.

Примем  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\Omega_t = (0, T)$ . Будем предполагать, что решение  $\varphi$  задачи (2.2.1)–(2.2.3) для каждого  $t$  принадлежит множеству функций  $D(A)$  с областью определения  $\bar{\Omega}$ . Каждый элемент множества  $D(A)$  непрерывен, имеет непрерывно дифференцируемую производную  $k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , такую, что производная  $\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  квадратично суммируема на  $\Omega \times \Omega_t$ <sup>5</sup>. Кроме того, все функции множества  $D(A)$  удовлетворяют

<sup>4</sup>На самом деле в уравнениях распространения тепла, как правило,  $q \equiv 0$ , однако в нестационарных процессах диффузии частиц коэффициент  $q$  играет важную роль – он характеризует поглощение среды.

<sup>5</sup>Здесь и в дальнейшем под  $\Omega \times \Omega_t$  мы понимаем множество таких точек  $(x, t)$ , что  $x \in \Omega$ ,  $t \in \Omega_t$ .

однородным граничным условиям (2.2.2). Предполагается также, что решение  $\varphi$  задачи (2.2.1)–(2.2.3) обладает производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , квадратично суммируемой на  $\Omega \times \Omega_t$ .

Установим условия, при которых решение  $\varphi$  задачи (2.2.1)–(2.2.3) единственно. Пусть эта задача допускает два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Рассмотрим разность

$$\omega = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Тогда для функции  $\omega$  имеем однородную задачу

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \omega}{\partial x} + q\omega = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\omega(0, t) = \omega(1, t) = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\omega(x, 0) = 0. \quad (2.2.6)$$

Умножим далее уравнение (2.2.4) на  $\omega$  и проинтегрируем по  $\Omega \times \Omega_t$ . Тогда будем иметь соотношение

$$\int_0^T dt \int_0^1 \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \omega}{\partial x} + q\omega \right) dx = 0. \quad (2.2.7)$$

С помощью интегрирования по частям и с учетом граничных значений (2.2.5) и начальных данных (2.2.6) соотношение (2.2.7) преобразуем к виду

$$\int_0^T dt \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + k \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + q\omega^2 \right] dx = 0. \quad (2.2.8)$$

Проинтегрируем первый член в (2.2.8) по  $t$ . Тогда окончательно получим

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \omega^2(x, T) dx + \int_0^T dt \int_0^1 \left[ k \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + q\omega^2 \right] dx = 0. \quad (2.2.9)$$

Поскольку по предположению  $k \geq 0$ ,  $q \geq 0$ , то выполнение соотношения (2.2.9) возможно только при условии

$$\omega \equiv 0. \quad (2.2.10)$$

А это значит, что  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , т. е. решение задачи (2.2.1)–(2.2.3) единственно.

Переходим теперь к формулировке сопряженной задачи. С этой целью уравнение (2.2.1) умножим на функцию  $\varphi^*$ , которую будем называть сопряженной, и результат проинтегрируем по  $\Omega \times \Omega_t$ . Тогда

$$\int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q\varphi \right) dx = \int_0^T dt \int_0^1 f\varphi^* dx. \quad (2.2.11)$$

Используя преобразования

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx &= \int_0^1 \varphi^*(x, T)\varphi(x, T)dx - \\ &- \int_0^1 \varphi^*(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dx, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx &= \int_0^T \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi^* - k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \varphi \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dt - \\ &- \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

соотношение (2.2.11) приведем к виду

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + q\varphi^* \right) dx &= \\ &= \int_0^T dt \int_0^1 f\varphi^* dx - \int_0^1 \varphi^*(x, T)\varphi(x, T)dx + \\ &+ \int_0^1 \varphi^*(x, 0)\varphi(x, 0)dx + \int_0^T k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi^* \Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \varphi \Big|_{x=0}^{x=1} dt. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Положим

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + q\varphi^* = p(x, t), \quad (2.2.15)$$

$$\varphi^*(0, t) = \varphi^*(1, t) = 0, \quad (2.2.16)$$

$$\varphi^*(x, T) = h(x), \quad (2.2.17)$$

где  $p(x, t)$ ,  $h(x)$  – пока произвольные функции. Будем предполагать, что решение  $\varphi^*$  задачи (2.2.15)–(2.2.17) для каждого  $t$  принадлежит множеству  $D(A^*)$ , совпадающему с  $D(A)$ . С учетом (2.2.15)–(2.2.17) и граничных начальных данных для функции  $\varphi$  из (2.2.2), (2.2.3) соотношение (2.2.14) приводится к виду

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 p\varphi dx &= \int_0^T dt \int_0^1 f\varphi^* dx - \\ &- \int_0^1 h(x)\varphi(x, T)dx + \int_0^1 g(x)\varphi^*(x, 0)dx, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 p\varphi dx + \int_0^1 h(x)\varphi(x, T)dx &= \\ &= \int_0^T dt \int_0^1 f\varphi^* dx + \int_0^1 g(x)\varphi^*(x, 0)dx. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Введем в рассмотрение исследуемый функционал задачи

$$J = \int_0^T dt \int_0^1 p\varphi dx + \int_0^1 h(x)\varphi(x, T)dx. \quad (2.2.20)$$

Тогда на основе (2.2.19) приходим к тому же значению функционала (2.2.20), но выраженному через решение сопряженной задачи:

$$J = \int_0^T dt \int_0^1 f\varphi^* dx + \int_0^1 g(x)\varphi^*(x, 0)dx. \quad (2.2.21)$$



Заметим, что в функционале  $J$ , определенном соотношением (2.2.20), функции  $p(x, t)$  и  $h(x)$  определяются характеристикой измерения прибора. Важно отметить еще одну особенность двойственности формулы для функционала  $J$ : многократное решение задачи (2.2.1)–(2.2.3) для получения значений функционала  $J$  в виде (2.2.20) при различных  $f(x, t)$  и  $g(x)$  можно заменить однократным решением задачи (2.2.15)–(2.2.17), т. е. получить  $\varphi^*$  и затем использовать выражение функционала  $J$  в виде (2.2.21), изменяя входные функции  $f$  и  $g$ .

Теперь несколько слов о теории возмущений при фиксированных коэффициентах задачи  $k(x, t)$  и  $q(x, t)$ . Предположим, что вместо функций  $f$  и  $g$  мы имеем функции  $f + \delta f$  и  $g + \delta g$ . Тогда значение функционала  $J$  изменится на величину  $\delta J$ , которую легко найти, используя формулы (2.2.20), (2.2.21):

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 p \delta \varphi dx + \int_0^1 h(x) \delta \varphi(x, T) dx, \quad (2.2.22)$$

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 \delta f \varphi^* dx + \int_0^1 \delta g(x) \varphi^*(x, 0) dx,$$

где  $\delta \varphi$  – величина, на которую изменится решение задачи (2.2.1)–(2.2.3). По второй из формул (2.2.22) следует оценка чувствительности функционала  $\delta J$  от вариаций  $\delta f$  и  $\delta g$ . Здесь функции  $\varphi^*(x, t)$  и  $\varphi^*(x, 0)$  выступают как веса в формулах теории возмущений.

Пусть теперь изменяются не только входные данные  $f(x, t)$  и  $g(x)$ , но и коэффициенты уравнения  $k(x, t)$  и  $q(x, t)$ , т. е. мы имеем возмущенную задачу – аналог (2.2.1)–(2.2.3) в виде

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + q' \varphi' = f', \quad (2.2.23)$$

$$\varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) = 0, \quad (2.2.24)$$

$$\varphi'(x, 0) = g', \quad (2.2.25)$$

где  $k' = k + \delta k$ ,  $q' = q + \delta q$ ,  $f' = f + \delta f$  и  $g' = g + \delta g$ .

Найдем формулу  $\delta J$  в этом случае. Как было отмечено ранее, для этой цели следует к системе уравнений (2.2.23)–(2.2.25) присоединить сопряженную невозмущенную задачу (2.2.15)–(2.2.17). Умно-

жим далее уравнение (2.2.23) на  $\varphi^*$  и проинтегрируем по всей области  $\Omega \times \Omega_t$ . Далее умножим сопряженное уравнение (2.2.15) на  $\varphi'$  и также проинтегрируем по области  $\Omega \times \Omega_t$ . Результаты вычтем один из другого. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \varphi' \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) dx - \\
 & - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varphi' \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) dx + \\
 & + \int_0^T dt \int_0^1 (q' \varphi^* \varphi' - -q \varphi^* \varphi') dx = \\
 & = \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx.
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Интегралы в (2.2.26) последовательно преобразуем с учетом граничных условий и начальных данных для функций  $\varphi'$  и  $\varphi^*$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \varphi' \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) dx = \int_0^1 \varphi' \varphi^* dx \Bigg|_{t=0}^{t=T} = \\
 & = \int_0^1 h \varphi'(x, T) dx - \int_0^1 g' \varphi^*(x, 0) dx, \\
 & \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varphi' \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) dx = \\
 & = \int_0^T \left[ \varphi^* \left( k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) - \varphi' \left( k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} dt -
 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

$$- \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx = - \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx. \quad (2.2.28)$$

Подставляя (2.2.27), (2.2.28) в (2.2.26), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 h \varphi'(x, T) dx - \int_0^1 g' \varphi^*(x, 0) dx + \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx + \\ & + \int_0^T dt \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi^* dx = \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx + \int_0^T dt \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi^* dx = \\ & = \left( \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx + \int_0^1 g' \varphi^*(x, 0) dx \right) - \\ & - \left( \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx + \int_0^1 h \varphi'(x, T) dx \right). \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Преобразуем далее выражение в круглых скобках справа в (2.2.30) к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx + \int_0^1 g' \varphi^*(x, 0) dx = \\ & - J + \int_0^T dt \int_0^1 \delta f \varphi^* dx + \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

где  $J$  – исследуемый функционал, определяемый формулой (2.2.21).

Далее,

$$\int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx + \int_0^1 h \varphi'(x, T) dx = J' = J + \delta J, \quad (2.2.32)$$

где  $J$  определено формулой (2.2.20), а

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 p \delta \varphi dx + \int_0^1 h \delta \varphi(x, T) dx.$$

С учетом соотношений (2.2.31) и (2.2.32) выражение (2.2.30) приведем к виду формулы теории возмущений для функционала  $\delta J$ :

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi' \varphi^* - \delta f \varphi^* \right) dx + \\ & + \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

В случае малых возмущений в (2.2.33)  $\varphi'$  можно заменить на  $\varphi$ , и мы получим формулу теории малых возмущений

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi \varphi^* - \delta f \varphi^* \right) dx + \\ & + \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Что касается выбора функционала  $J$ , то он связан с конкретным изменением и фиксируется выбором функций  $p(x, t)$  и  $h(x)$ . Формула (2.2.34) позволяет оценить чувствительность функционала к малым изменениям входных данных задачи.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим конкретный пример. Пусть  $k = 1$ ,  $q = 0$ ,  $f(x, t) = 0$ ,  $g(x) = \sin \pi x$ ; тогда задача (2.2.1)–(2.2.3) имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.2.35)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, \quad (2.2.36)$$

$$\varphi(x, 0) = \sin \pi x. \quad (2.2.37)$$

Эта задача имеет решение

$$\varphi(x, t) = \sin \pi x \cdot e^{-\pi^2 t}. \quad (2.2.38)$$

Функционал (2.2.20) рассмотрим в виде

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi(x, T) dx; \quad (2.2.39)$$

здесь  $p(x, t) \equiv 0$ ,  $h(x) = \sin \pi x$ . Из (2.2.38), (2.2.39) имеем

$$J = e^{-\pi^2 T} \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2} e^{-\pi^2 T}. \quad (2.2.40)$$

Этот же функционал можно вычислить и по формуле (2.2.21) при  $f(x, t) \equiv 0$ ,  $g(x) = \sin \pi x$ :

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi^*(x, 0) dx, \quad (2.2.41)$$

где  $\varphi^*(x, t)$  – решение сопряженной задачи (2.2.15)–(2.2.17), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.2.42)$$

$$\varphi^*(0, t) = \varphi^*(1, t) = 0, \quad (2.2.43)$$

$$\varphi^*(x, T) = \sin \pi x. \quad (2.2.44)$$

В самом деле, задача (2.2.42)–(2.2.44) имеет решение

$$\varphi^*(x, t) = \sin \pi x \cdot e^{\pi^2(t-T)}, \quad (2.2.45)$$

поэтому из (2.2.41) получаем

$$J = \int_0^1 \sin^2 \pi x \cdot e^{-\pi^2 T} dx = \frac{1}{2} e^{-\pi^2 T}, \quad (2.2.46)$$

что совпадает с (2.2.40).

Предположим теперь, что исходные данные задачи (2.2.35)–(2.2.37) изменились и мы рассматриваем возмущенную задачу (2.2.23)–(2.2.25) при  $k' = k = 1$ ,  $q' = q = 0$ ,  $f' = f + \delta f$ ,  $\delta f = \sin \pi x \cos^2 \pi x$ ,  $g'(x) = g(x) + \delta g = \sin \pi x + \delta g$ ,  $\delta g = x(1 - x)$ . В этом случае возмущенная задача имеет вид

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = \sin \pi x \cos^3 \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.2.47)$$

$$\varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) = 0, \quad (2.2.48)$$

$$\varphi'(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x). \quad (2.2.49)$$

Функционал

$$J' = \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi'(x, T) dx \quad (2.2.50)$$

в явном виде найти здесь трудно, поскольку  $\varphi'(x, t)$  нам не известна, однако мы можем воспользоваться формулой теории возмущений (2.2.33) при  $\delta k = \delta q = 0$ ,  $\delta f = \sin \pi x \cos^3 \pi x$ ,  $\delta g = x(1 - x)$ . Тогда для  $J'$  имеем

$$J' = J + \delta J, \quad (2.2.51)$$

где

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 \delta f \varphi^*(x, t) dx + \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx, \quad (2.2.52)$$

а  $\varphi^*(x, t)$  – решение невозмущенной сопряженной задачи (2.2.42)–(2.2.44). Из (2.2.45), (2.2.52) получаем для  $\delta J$

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^T dt \int_0^1 \sin \pi x \cos^2 \pi x \sin \pi x \cdot e^{\pi^2(t-T)} dx + \\ &+ \int_0^1 x(1-x) \sin \pi x \cdot e^{-\pi^2 T} dx = \left( \int_0^T e^{\pi^2(t-T)} dt \right) \left( \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx \right) + \\ &+ e^{-\pi^2 T} \int_0^1 x(1-x) \sin \pi x dx. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 y \cos^3 y dy = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin^3 y}{3} - \frac{\sin^5 y}{5} \right) \Big|_0^\pi = 0,$$

$$\int_0^1 x(1-x) \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{4}{\pi^2},$$

то

$$\delta J = \frac{4}{\pi^2} e^{-\pi^2 T}, \quad (2.2.53)$$

$$J' = J + \delta J = \frac{1}{2} e^{-\pi^2 T} \frac{4}{\pi^2} e^{-\pi^2 T}. \quad (2.2.54)$$

Таким образом, в данном случае формула теории возмущений (2.2.33) позволяет нам, используя решение невозмущенной сопряженной задачи, сразу найти значение возмущенного функционала  $J'$ .

## 2.3. Уравнение колебаний

В приложениях существенное место занимают уравнения гиперболического типа. Их отличительной чертой является то, что область зависимости решения таких уравнений ограничена характеристическим конусом, так что область пространства  $\Omega \times \Omega_t$ , расположенная вне этого конуса, не влияет на решение в рассматриваемой точке.

Многие задачи механики (колебания струн, стержней) описываются уравнением колебаний вида

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} - qu + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.3.1)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\varphi(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (2.3.3)$$

Здесь  $c = \text{const}$ ; коэффициенты  $k$  и  $q$  определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член  $f(x, t)$  выражает интенсивность внешнего воздействия;  $g(x)$  – начальная скорость смещения. Величины  $k(x, t)$ ,  $q(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $g(x)$  будем считать неотрицательными кусочно-непрерывными функциями.

Одномерная теория колебаний изучена весьма полно. Нашей задачей является обсуждение вопросов, связанных с применением к (2.3.1)–(2.3.3) аппарата сопряженных уравнений и теории возмущений.

Примем  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\Omega_t = (0, T)$ . Будем предполагать, что решение  $\varphi$  задачи (2.3.1)–(2.3.3) для каждого  $t$  принадлежит множеству функций  $D(A)$  с областью определения  $\bar{\Omega}$ . Каждый элемент множества  $D(A)$  непрерывен, имеет непрерывно дифференцируемую производную  $k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , такую, что производная  $\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  квадратично суммируема на  $\Omega \times \Omega_t$ . Кроме того, все функции множества  $D(A)$  удовлетворяют однородным граничным условиям (2.3.2). Предполагается также, что решение  $\varphi$  задачи (2.3.1)–(2.3.3) обладает производными  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ , квадратично суммируемыми на  $\Omega \times \Omega_t$ .

Чтобы сформулировать сопряженную по отношению к (2.3.1)–(2.3.3) задачу, умножим уравнение (2.3.1) на некоторую функцию  $\varphi^*(x, t)$  и результат проинтегрируем по  $\Omega \times \Omega_t$ . Тогда получим

$$\int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q \varphi \right) dx = \int_0^T dt \int_0^1 f \varphi^* dx. \quad (2.3.4)$$

Используя формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx &= \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) \bigg|_{t=0}^{t=T} dx - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} dx, \\ \int_0^T dt \int_0^1 \varphi^* \left( \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx &= \\ &= \int_0^T \left( k \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

соотношение (2.3.4) приведем к виду



$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^1 \varphi \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + q \varphi^* \right) dx = \\
& = \int_0^T dt \int_0^1 f \varphi^* dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \\
& + \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \int_0^T k \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T k \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} dt.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Положим

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - q \varphi^* + p(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in [0, T], \tag{2.3.8}$$

$$\varphi^*(0, t) = \varphi^*(1, t) = 0; \tag{2.3.9}$$

$$\varphi^*(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}(x, T) = h(x), \tag{2.3.10}$$

где  $p(x, t)$  и  $h(x)$  – пока произвольные функции. С учетом (2.3.8)–(2.3.10) и условий (2.3.2), (2.3.3) из (2.3.7) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi dx = \int_0^T dt \int_0^1 f \varphi^* dx + \\
& \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi^*(x, 0) g(x) dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi(x, T) h(x) dx,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi(x, T) h(x) dx = \\
& = \int_0^T dt \int_0^1 f \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi^*(x, 0) g(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Введем в рассмотрение функционал  $J$  от решения задачи (2.3.1)–(2.3.3) в виде

$$J = \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 h(x) \varphi(x, T) dx. \quad (2.3.12)$$

Это же значение функционала можно получить и другим способом, используя решение сопряженной задачи (2.3.8)–(2.3.10). В самом деле, из (2.3.11), (2.3.12) получаем, что

$$J = \int_0^T dt \int_0^1 f \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 g(x) \varphi^*(x, 0) dx. \quad (2.3.13)$$

Здесь  $\varphi^* = \varphi^*(x, t)$  – решение сопряженной задачи (2.3.8)–(2.3.10), которое зависит от функций  $p(x, t)$  и  $h(x)$ , определяющих функционал (2.3.12).

Как мы видели ранее, формула (2.3.13) оказывается в некоторых случаях более предпочтительной для вычислений, нежели (2.3.12) (например, в случае, когда необходимо многократное решение задачи (2.3.1)–(2.3.3) для получения значений функционала  $J$  в виде (2.3.12)).

Рассмотрим теперь вопрос о чувствительности функционала  $J$  к исходным данным  $f$  и  $g$  задачи (2.3.1)–(2.3.3). С этой целью предположим, что  $f$  и  $g$  возмущены и вместо них рассматриваются функции

$$f' = f + \delta f, \quad g' = g + \delta g.$$

Таким образом мы приходим к возмущенной задаче

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - q \varphi' + f', \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.3.14)$$

$$\varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) = 0, \quad (2.3.15)$$

$$\varphi'(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(x, 0) = g'. \quad (2.3.16)$$

Ее решение можно представить в виде

$$\varphi'(x, t) = \varphi(x, t) + \delta \varphi(x, t).$$

Тогда для вариаций функционала в формуле

$$J' = J + \delta J$$

из (2.3.12) и (2.3.13) получим два эквивалентных соотношения:

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 p \delta \varphi dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 h(x) \delta \varphi(x, T) dx, \quad (2.3.17)$$

$$\delta J = \int_0^T dt \int_0^1 \delta f \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 \delta g(x) \varphi^*(x, 0) dx. \quad (2.3.18)$$

Формула (2.3.18) непосредственно связывает вариацию функционала с вариациями входных данных  $\delta f$  и  $\delta g$ . По этой формуле мы можем вычислить вариацию  $\delta J$ , не решая дополнительно возмущенной задачи (2.3.14)–(2.3.16).

Обратимся к более общему случаю возмущения. Пусть теперь изменяются не только входные данные  $f(x, t)$  и  $g(x)$ , но и коэффициенты  $k(x, t)$  и  $q(x)$ , т. е. мы имеем невозмущенную задачу в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - q' \varphi' + f', \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.3.19)$$

$$\varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) = 0, \quad (2.3.20)$$

$$\varphi'(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(x, 0) = g', \quad (2.3.21)$$

где  $k' = k + \delta k$ ,  $q' = q + \delta q$ ,  $f' = f + \delta f$ ,  $g' = g + \delta g$ .

Найдем формулу для  $\delta J$  в данном случае. Для этой цели к системе уравнений (2.3.19)–(2.3.21) присоединим сопряженную невозмущенную задачу (2.3.8)–(2.3.10). Умножим уравнение (2.3.19) на  $\varphi^*$  и проинтегрируем по всей области  $\Omega \times \Omega_t$ . Далее умножим сопряженное уравнение (2.3.8) на  $\varphi'$  и также проинтегрируем по области  $\Omega \times \Omega_t$ . Вычитая результаты один из другого, получаем соотношение

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \varphi' \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} \right) dx - \\
& - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varphi' \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) dx + \\
& + \int_0^T dt \int_0^1 (q' \varphi^* \varphi' - q \varphi^* \varphi') dx = \\
& = \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx.
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Интегралы в (2.3.22) преобразуем с учетом граничных условий и начальных данных для функций  $\varphi'$  и  $\varphi^*$ . Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \varphi' \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} \right) dx = \\
& = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \varphi' \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=T} dx = \\
& = -\frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi^*(x, 0) g'(x) dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 \varphi'(x, T) h(x) dx, \\
& \int_0^T dt \int_0^1 \left( \varphi^* \frac{\partial}{\partial x} k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varphi' \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) dx = \\
& = \int_0^T \left( \varphi^* \left( k' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) - \varphi' \left( k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} dt -
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

$$- \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx = - \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx. \quad (2.3.24)$$

С учетом соотношений (2.3.23) и (2.3.24) выражение (2.3.22) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c^2} \int_0^1 h(x) \varphi'(x, T) dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 g'(x) \varphi^*(x, 0) dx + \\ & + \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx + \int_0^T dt \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi^* dx = \\ & = \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx - \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^1 \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx + \int_0^T dt \int_0^1 \delta q \varphi' \varphi^* dx = \\ & = \left( \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 g'(x) \varphi^*(x, 0) dx \right) - \\ & - \left( \int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx - \frac{1}{c^2} \int_0^1 h(x) \varphi'(x, T) dx \right). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

В силу (2.3.13) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^1 f' \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 g'(x) \varphi^*(x, 0) dx = \\ & = J + \int_0^T dt \int_0^1 \delta f \varphi^* dx + \frac{1}{c^2} \int_0^1 \delta g u^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Далее имеем

$$\int_0^T dt \int_0^1 p \varphi' dx - \int_0^1 h(x) \varphi'(x, T) dx = J' = J + \delta J, \quad (2.3.28)$$

где  $J$  определено формулой (2.3.12), а  $\delta J$  – формулой (2.3.17).

Подставляя соотношения (2.3.27) и (2.3.28) в выражение (2.3.26), получаем формулу теории возмущений

$$\begin{aligned} \delta J &= - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi' \varphi^* - \delta f \varphi^* \right) dx + \\ &= \frac{1}{c^2} \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Если возмущения считать малыми, то, положив приближенно  $\varphi' = \varphi$  в (2.3.29), приходим к формуле теории малых возмущений

$$\begin{aligned} \delta J &= - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi \varphi^* - \delta f \varphi^* \right) dx + \\ &+ \frac{1}{c^2} \int_0^1 \delta g \varphi^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Эта формула позволяет оценивать чувствительность функционала  $J$  к малым изменениям входных данных  $k, q, f$  и  $g$  задачи (2.3.1)–(2.3.3).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $k = 1$ ,  $q = 0$ ,  $f(x, t) = 0$  и  $g(x) = \sin \pi x$ . Тогда задача (2.3.1)–(2.3.3) будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (2.3.31)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, \quad (2.3.32)$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \sin \pi x. \quad (2.3.33)$$

Нетрудно видеть, что решением этой задачи является синусоидальная стоячая волна:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\pi c} \sin \pi c t \sin \pi x. \quad (2.3.34)$$

Введем в рассмотрение функционал от решения  $\varphi(x, t)$  в виде

$$J = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi(x, T) dx. \quad (2.3.35)$$

Этот функционал совпадает с (2.3.12) при  $p \equiv 0$ ,  $h(x) = -\sin \pi x$ . Из (2.3.34), (2.3.35) имеем

$$J = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \frac{1}{\pi c} \sin \pi x \sin \pi c T \sin \pi x dx = \frac{\sin \pi c T}{2\pi c^3}. \quad (2.3.36)$$

Этот же функционал, как мы видели, можно вычислить и другим способом – с использованием решения сопряженной задачи (2.3.8)–(2.3.10), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in [0, T], \quad (2.3.37)$$

$$\varphi^*(0, t) = \varphi^*(1, t) = 0, \quad (2.3.38)$$

$$\varphi^*(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}(x, T) = \sin \pi x. \quad (2.3.39)$$

Решением этой задачи является функция

$$\varphi^*(x, t) = \frac{1}{\pi c} \sin \pi c (T - t) \sin \pi x. \quad (2.3.40)$$

Тогда с учетом  $f \equiv 0$ ,  $g(x) = \sin \pi x$  по формуле (2.3.13) будем иметь

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{c^2} \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi^*(x, 0) dx = \\ &= \frac{1}{c^2} \int_0^1 \frac{1}{\pi c} \sin \pi c T \sin^2 \pi x dx = \frac{\sin \pi c T}{2\pi c^3}, \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

что совпадает с (2.3.36).

Теперь предположим, что вместо задачи (2.3.31)–(2.3.33) рассматривается возмущенная задача вида

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (1 + \varepsilon \cos \pi x) \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varepsilon \sin \pi x \cos \pi x \cdot \varphi'(x, t), \quad (2.3.42)$$

$$\varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) = 0, \quad (2.3.43)$$

$$\varphi'(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(x, 0) = \sin \pi x, \quad (2.3.44)$$

где  $\varepsilon \in [0, 1]$ , и нам требуется определить функционал

$$J' = \int_0^1 \sin \pi x \cdot \varphi'(x, T) dx. \quad (2.3.45)$$

Решить возмущенную задачу (2.3.42)–(2.3.44) в явном виде в данном случае не удастся. Однако мы можем воспользоваться выведенными выше формулами теории возмущений. Задача (2.3.42)–(2.3.44) совпадает с (2.3.19)–(2.3.21) при

$$\begin{aligned} k' &= 1 + \delta k = 1 + \varepsilon \cos \pi x, & f' &= f = 0, \\ q' &= \delta q = \varepsilon \sin \pi x \cos \pi x, & g' &= g = \sin \pi x. \end{aligned}$$

Поскольку входные данные  $f$  и  $g$  не возмущаются, т. е.  $\delta f = \delta g = 0$ , то из формулы теории возмущений (2.3.29) получаем для функционала

$$J' = J + \delta J, \quad (2.3.46)$$

где

$$\delta J = - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi' \varphi^* \right) dx. \quad (2.3.47)$$

Считая, что  $\varepsilon$  мало, мы можем положить в (2.3.47) приближенно  $\varphi' = \varphi$ , получив тем самым формулу теории малых возмущений, в данном случае

$$\delta J = - \int_0^T dt \int_0^1 \left( \delta k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \delta q \varphi \varphi^* \right) dx. \quad (2.3.48)$$



Подставим значения  $\delta k = \varepsilon \cos \pi x$ ,  $\delta q = \varepsilon \sin \pi x \cos \pi x$  в (2.3.48) с учетом вида функций  $\varphi(x, t)$  и  $\varphi^*(x, t)$  из (2.3.34) и (2.3.40). Тогда

$$\begin{aligned} \delta J &= - \int_0^T dt \int_0^1 \left\{ \varepsilon \cos \pi x \left( \frac{1}{c} \sin \pi c t \cos \pi x \right) \left( \frac{1}{c} \sin \pi c (T - t) \cos \pi x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sin \pi x \cos \pi x \left( \frac{1}{\pi c} \sin \pi c t \sin \pi x \right) \left( \frac{1}{\pi c} \sin \pi c (T - t) \sin \pi x \right) \right\} = \\ &= - \frac{\varepsilon}{c^2} \int_0^T \sin \pi c t \sin \pi c (T - t) dt \times \\ &\quad \times \left( \int_0^1 \cos^3 \pi x dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos \pi x dx \right). \end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что

$$\delta J = 0. \quad (2.3.49)$$

Таким образом, с точностью до величины второго порядка малости (относительно  $\varepsilon$ ) из (2.3.46) и (2.2.41) мы получаем

$$J' \approx J = \frac{\sin \pi c T}{2\pi c^3}.$$

Предположим теперь, что решение  $\varphi$  задачи (2.3.42)–(2.3.44) представляется в виде ряда

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad (2.3.50)$$

и построим для функционала  $J'$  формулу возмущений более высокого порядка точности.

Подставляя (2.3.50) в (2.3.46), имеем

$$J' = J + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots, \quad (2.3.51)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= 0, \\ J_k &= \int_0^T dt \int_0^1 \left( \cos \pi x \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \sin \pi x \cos \pi x \cdot \varphi_{k-1} \varphi^* \right) dx, \\ &\quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения для  $\varphi_k$ , следует (2.3.50) подставить в (2.3.42)–(2.3.44), приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда приходим к системе

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \cos \pi x \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \quad (2.3.52)$$

$$- \sin \pi x \cos \pi x \cdot \varphi_{k-1}(x, t),$$

$$\varphi_k(0, t) = \varphi_k(1, t) = 0, \quad (2.3.53)$$

$$\varphi_k(x, 0) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (2.3.54)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\varphi_0 = \varphi$ .

Решая последовательно задачи (2.3.52)–(2.3.54) и подставляя  $\varphi_k$  в (2.3.51), мы будем находить поправки  $J_2, J_3, \dots$  и тем самым определять  $J'$  с более высоким порядком точности.

Легко показать, что, подставляя (2.3.51) непосредственно в (2.3.45), в силу соотношения сопряженности мы получаем для  $J_1, J_2, J_3, \dots$  те же самые формулы.

## Глава 3

# Нелинейные уравнения

Оценка чувствительности моделей по отношению к функционалам задач на основе теории возмущений поставила перед исследователями проблему изучения линейных уравнений, которые все более широко используются в приложениях. Однако на нелинейные операторы невозможно прямо распространить формализм, связанный с тождеством Лагранжа. Этот факт стал решающим в дальнейшем развитии теории, которая пошла по пути линеаризации исходных задач с последующим применением тождества Лагранжа. Если задача корректна и имеется непрерывная зависимость решения от параметров задачи и входных данных, то метод линеаризации во многих случаях становится хорошим инструментом для анализа нелинейных задач.

Однако во многих случаях, особенно когда мы имеем дело с нестационарными нелинейными задачами, дело осложняется, и тогда линеаризация оказывается просто невозможной, поскольку может привести к грубым просчетам. В этом случае необходима теория нелинейных процессов без каких бы то ни было упрощений. Для этой цели мы дадим обобщение теории сопряженных задач и теории возмущений на основе специальным образом обобщенного тождества Лагранжа.

В 1974 г. при изучении гидротермодинамики атмосферных процессов автор ввел в рассмотрение сопряженные уравнения, соответствующие квазилинейным уравнениям [82]. В последнее время автор совместно с В. И. Агошковым рассмотрел общие вопросы теории и методов построения теории возмущений, эти вопросы подробно изложены в монографии [100]. Здесь же мы остановимся на методологической стороне дела. С этой целью начнем исследование с простейшей стационарной задачи.

### 3.1. Нелинейные уравнения и сопряженные задачи

Пусть рассматривается следующая задача:

$$-\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.1.55)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.1.56)$$

Будем предполагать, что решение  $u$  этой задачи непрерывно и дважды дифференцируемо в области  $0 \leq x \leq 1$ , коэффициент  $\nu$  постоянный, а функция  $f(x)$  интегрируема с квадратом в области  $0 \leq x \leq 1$ , т. е.

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq c < \infty,$$

и, следовательно, является элементом вещественного гильбертова пространства  $H = L_2(0, 1)$ . Скалярное произведение для функций  $v, \omega \in H$  введем обычным образом:

$$(v, \omega) = \int_0^1 v\omega dx.$$

Для функций  $u$  введем в рассмотрение множество  $D(A) \subset H$ , каждый элемент которого непрерывен, и дважды дифференцируем, и обращается в нуль на границах области  $0 \leq x \leq 1$ . Задачу (3.1.55), (3.1.56) на функциях из  $D(A)$  формально запишем в виде

$$A(u)u = f, \quad (3.1.57)$$

где  $A(u)$  – оператор, имеющий вид

$$A(u) = -\nu \frac{d^2}{dx^2} + u \frac{d}{dx} \quad (3.1.58)$$

и действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A)$ . Важным отличием оператора  $A(u)$  от линейного случая является то, что он зависит от самого решения задачи (3.1.55), (3.1.56), или, что то же самое, (3.1.57). Поэтому построение сопряженного по Лагранжу оператора,

соответствующего (3.1.57), должно быть видоизменено, поскольку сопряженные операторы, строго говоря, определены лишь для линейных операторов, не зависящих от решения  $u$ .

Однако если предположить, что решение исходной задачи нами определено и функцию  $u$  можно считать известной, то при построении сопряженной задачи оператор становится уже известным, и для него обычным приемом с помощью тождества Лагранжа можно определить оператор сопряженный. А именно, пусть имеются два элемента:  $v \in D(A)$  и  $\omega \in D(A^*)$ , где  $D(A^*)$  – область определения сопряженного оператора, свойства которой можно найти из условия выполнения тождества Лагранжа. Тогда имеем соотношение

$$(A(u)v, \omega) = (v, A^*(u)\omega), \quad v \in D(A), \quad \omega \in D(A^*). \quad (3.1.59)$$

Покажем, при каких условиях тождество (3.1.59) выполняется применительно к оператору (3.1.58). Рассмотрим левую часть тождества (3.1.59). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{d^2v}{dx^2} \right) \omega dx &= uv\omega \Big|_{x=0}^{x=1} - \\ &- v \frac{dv}{dx} \omega \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v \frac{d\omega}{dx} dx + v \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx. \end{aligned} \quad (3.1.60)$$

Здесь мы провели интегрирование по частям. Имея в виду, что  $v \in D(A)$ , а каждый элемент множества  $D(A)$  непрерывен, дважды дифференцируется и обращается в нуль на границе области при  $x = 0$  и  $x = 1$ , первый внеинтегральный член в правой части соотношения (3.1.60) обратится в нуль. Второй внеинтегральный член мы обратим в нуль, положив

$$\omega(0) = \omega(1) = 0. \quad (3.1.61)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left( u \frac{dv}{dx} - \nu \frac{d^2v}{dx^2} \right) \omega dx &= \int_0^1 v \frac{du\omega}{dx} dx + \nu \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx = \\
 &= - \int_0^1 v \frac{du\omega}{dx} dx + \nu v \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \nu \int_0^1 v \frac{d^2\omega}{dx^2} dx = \\
 &= \int_0^1 v \left( -\frac{du\omega}{dx} - \nu \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) dx.
 \end{aligned} \tag{3.1.62}$$

В (3.1.62) внеинтегральные члены при интегрировании по частям обращаются в нуль, поскольку  $v(x) \in D(A)$  и, следовательно,  $v(0) = v(1) = 0$ .

В процессе получения соотношения (3.1.62) мы выполнили ряд преобразований, которые требуют не только квадратичной суммируемости на  $(0,1)$  функции  $\omega(x)$ , но и ее производных  $\frac{d\omega}{dx}$ ,  $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ , т. е.

$$\int_0^1 \left\{ \left( \frac{d^2\omega}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2 + \omega^2(x) \right\} dx < +\infty.$$

Если к этим свойствам еще добавить условие на границе (3.1.61) для функции  $\omega(x)$ , то мы приходим к множеству  $D(A^*)$ .

Введем обозначение

$$A^*(u) \cdot = -\nu \frac{d^2 \cdot}{dx^2} - \frac{d}{dx} u \cdot. \tag{3.1.63}$$

Тогда на основе соотношения (3.1.62) имеем тождество

$$\int_0^1 \left( u \frac{dv}{dx} - \nu \frac{d^2v}{dx^2} \right) \omega dx = \int_0^1 v \left( -\frac{du\omega}{dx} - \nu \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) dx, \tag{3.1.64}$$

или в формальном виде тождество Лагранжа (3.1.59). Теперь следует лишь добавить, что сопряженный оператор  $A^*(u)$ , определенный равенством (3.1.63), действует в  $H$  с областью определения  $D(A^*)$ .

Итак, предполагая  $u(x)$  известной функцией из решения основной задачи, мы имеем возможность построить сопряженный оператор, удовлетворяющий тождеству Лагранжа.

Поскольку теперь можно говорить о существовании сопряженного оператора, подойдем к более важному вопросу – построению сопряженных задач, связанных с заданными функционалами от решения  $u(x)$ . Предположим, что нас интересует не само решение  $u(x)$ , а некоторый функционал от него:

$$J = \int_0^1 p u \, dx = (p, u), \quad (3.1.65)$$

где  $p(x)$  – заданная характеристика измерения поля  $u(x)$ .

Пусть  $p \in H = L_2(0, 1)$ . Введем формально следующую сопряженную задачу:

$$-\nu \frac{d^2 u^*}{dx^2} - \frac{duu^*}{dx} = p(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.1.66)$$

при условиях

$$u^*(0) = 0, \quad u^*(1) = 0. \quad (3.1.67)$$

Будем предполагать, что  $u^* \in D(A^*)$ . Проведем некоторые преобразования. С этой целью уравнение (3.1.55) скалярно умножим на  $u^*$ , а уравнение (3.1.66) – на  $u$  и результаты вычтем один из другого. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^* \left( u \frac{du}{dx} - \nu \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx - \int_0^1 u \left( -\frac{duu^*}{dx} + \frac{d^2 u^*}{dx^2} \right) dx = \\ = \int_0^1 f u^* \, dx - \int_0^1 p u \, dx. \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

Левая часть соотношения (3.1.68) обращается в нуль в связи с тождеством Лагранжа. Это устанавливается легко с помощью (3.1.64), где в качестве  $v$  следует выбрать  $u$ , а в качестве  $\omega$  – решение  $u^*$ . Тогда из (3.1.68) следует, что

$$\int_0^1 f u^* \, dx = \int_0^1 p u \, dx. \quad (3.1.69)$$

Или с учетом (3.1.65) имеем формулы взаимности

$$J = \int_0^1 p u \, dx, \quad (3.1.70)$$

$$J = \int_0^1 f u^* dx. \quad (3.1.71)$$

Итак, искомое значение функционала  $J$  можно найти с помощью решения или основной задачи, или сопряженной. Однако при решении сопряженной задачи нам необходимо также знание решения и основной задачи.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $f(x) = \pi^2 \sin \pi x + \pi/2 \sin 2\pi x$ ,  $\nu = 1$ . Тогда основная задача (3.1.55), (3.1.56) имеет вид

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = \pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x, \quad x \in (0, 1), \quad (3.1.72)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.1.73)$$

Нетрудно видеть, что эта задача имеет решение

$$u(x) = \sin \pi x. \quad (3.1.74)$$

Рассмотрим функционал (3.1.65) при

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/3], \\ 0, & x \notin [0, 1/3]. \end{cases} \quad (3.1.75)$$

Тогда

$$J = \int_0^1 p u dx = \int_0^{1/3} u(x) dx. \quad (3.1.76)$$

В силу (3.1.74) из (3.1.76) имеем

$$J = -\frac{1}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \approx 0,159\,155. \quad (3.1.77)$$

Этот же функционал, как мы видели, можно вычислить и другим способом, используя формулу (3.1.71):

$$J = \int_0^1 f(x) u^*(x) dx, \quad (3.1.78)$$

где  $u^*(x)$  – решение сопряженной задачи (3.1.66), (3.1.67), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2 u^*}{dx^2} - \sin \pi x \frac{du^*}{dx} - \pi \cos \pi x u^* = p(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.1.79)$$



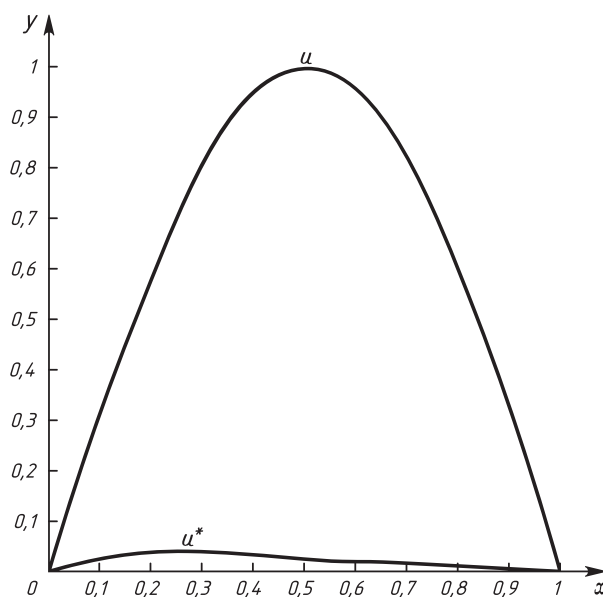


Рис. 3.1

$$u^*(0) = u^*(1) = 0. \quad (3.1.80)$$

Решение этой задачи было найдено численно методом конечного элемента с использованием кусочно-линейных базисных функций на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 10^{-2}$ . График функции  $u^*(x)$  приведен на рисунке 3.1. Вычисляя  $J$  из (3.1.78) с использованием квадратурной формулы Симпсона, получаем

$$J \approx 0,159\,150, \quad (3.1.81)$$

что совпадает с (3.1.77) с точностью до пятого знака после запятой.

## 3.2. Общая формулировка сопряженной задачи

Рассмотрим теперь общую основную нелинейную задачу

$$A(u)u = f, \quad (3.2.1)$$

где  $A(u)$  – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения  $D(A)$ ,  $u \in D(A)$ ,  $f \in H$ . За-

метим, что функции из  $D(A)$  удовлетворяют однородным граничным условиям, свойственной задаче<sup>6</sup>.

Рассмотрим далее некоторый функционал от решения задачи  $u$ . Пусть

$$J = (u, p), \quad (3.2.2)$$

где функция  $p \in H$  – характеристика изменения поля  $u$ ,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение, определенное в  $H$ .

Сопряженную задачу по отношению к основной (3.2.1) с учетом необходимости нахождения функционала (3.2.2) определим следующим образом:

$$A^*(u)u^* = p, \quad (3.2.3)$$

где сопряженный оператор  $A^*(u)$  удовлетворяет тождеству Лагранжа (3.1.59)

$$(A(u)v, \omega) = (v, A^*(u)\omega), \quad v \in D(A), \quad \omega \in D(A^*). \quad (3.2.4)$$

Заметим, что сопряженный оператор в (3.2.3) зависит от решения основной задачи. Необходимо подчеркнуть, что, преобразуя левую часть соотношения (3.2.4) к виду выражения, стоящего в правой части тождества Лагранжа (3.2.4), мы одновременно определяем множество функций  $\omega \in D(A^*)$ , их гладкость и удовлетворение граничным условиям. Это множество будет являться областью определения сопряженного оператора  $A^*(u)$ .

Теперь совершим некоторые преобразования. С этой целью основное уравнение (3.2.1) умножим на  $u^*$  скалярно в  $H$ , сопряженное уравнение (3.2.3) – на  $u$ , а результаты вычтем один из другого. Тогда будем иметь

$$(A(u)u, u^*) - (u, A^*(u)u^*) = (f, u^*) - (u, p). \quad (3.2.5)$$

Левая часть этого соотношения вследствие тождества Лагранжа (3.2.4) обращается в нуль, и мы получаем

$$(f, u^*) = (u, p). \quad (3.2.6)$$

Имея в виду, что в правой части (3.2.6) стоит функционал  $J$ , приходим к формулам взаимности

$$J = (u, p), \quad (3.2.7)$$

$$J = (f, u^*). \quad (3.2.8)$$

---

<sup>6</sup>Если граничные условия в исходной задаче неоднородны, то, как отмечалось выше, их можно привести к однородным соответствующей заменой функции – решения задачи.

### 3.3. Теория малых возмущений

Теперь перейдем к рассмотрению теории малых возмущений для функционалов нелинейных задач. Сначала предположим, что при  $f = f_0 \in H$  исходная задача (3.2.1) имеет решение  $u_0 \in D(A)$ :

$$A(u_0)u_0 = f_0. \quad (3.3.1)$$

Эту задачу мы будем называть невозмущенной. Предположим далее, что задача (3.3.1) заменяется на возмущенную

$$A(u)u = f, \quad (3.3.2)$$

где

$$f = f_0 + \varepsilon f_1, \quad f_1 \in H, \quad (3.3.3)$$

$\varepsilon$  – малый параметр. Будем считать далее, что  $\varepsilon f_1$  предполагается малой по сравнению с  $f_0$ :

$$\varepsilon \|f_1\| \ll \|f_0\|, \quad (3.3.4)$$

где  $\|f_i\| = (f_i, f_i)^{1/2}$ , т. е. возмущения в источниках малые.

Предположим, что решение возмущенной задачи (3.3.2) представимо в виде ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad (3.3.5)$$

и подставим (3.3.3), (3.3.5) в (3.3.2). Тогда будем иметь

$$A(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = f_0 + \varepsilon f_1. \quad (3.3.6)$$

В предположении достаточной гладкости оператора  $A(u)$  проведем его разложение в окрестности элемента  $u = u_0$  и ограничимся членами первого порядка малости. Тогда

$$A(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = A(u_0) + \varepsilon \frac{dA(u_0)}{du_0} u_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.3.7)$$

где  $\frac{dA(u_0)}{du_0} u_1 \equiv F(u_0, u_1)$  – оператор, действующий из  $H$  в  $H$ , линейный по  $u_1$ . Далее, подставляя (3.3.7) в (3.3.6) и приравнявая члены с одинаковыми степенями параметра  $\varepsilon$ , получаем

$$A(u_0)u_0 = f_0, \quad A(u_0)u_1 + F(u_0, u_1)u_0 = f_1, \quad (3.3.8)$$

или

$$A(u_0)u_0 = f_0, \quad A(u_0)u_1 + \left( \frac{dA(u_0)}{du_0} u_1 \right) u_0 = f_1. \quad (3.3.9)$$

Итак, вместе с основным невозмущенным уравнением (3.3.1) мы получили уравнение для первой вариации. Решая это уравнение, с помощью (3.3.5) получаем приближенное решение возмущенной задачи.

Переходим теперь к формулировке теории возмущений для функционала  $J$  исследуемой задачи. С этой целью введем обозначения

$$J_0 = (u_0, p), \quad J_1 = (u_1, p); \quad (3.3.10)$$

тогда

$$J \approx J_0 + \varepsilon J_1. \quad (3.3.11)$$

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$A_1(u_0) \cdot = A(u_0) \cdot + F(u_0, \cdot) u_0 \equiv A(u_0) \cdot + \left( \frac{dA(u_0)}{du_0} \cdot \right) u_0, \quad (3.3.12)$$

действующий из  $H$  в  $H$ . Тогда уравнение для  $u_1$  из (3.3.8) запишется в виде

$$A_1(u_0)u_1 = f_1 \quad (3.3.13)$$

Рассмотрим сопряженное уравнение

$$A_1^*(u_0)u_1^* = p, \quad (3.3.14)$$

где  $A_1^*(u_0)$  – оператор, сопряженный по отношению к  $A_1(u_0)$ ;  $p$  – элемент, определяющий функционал  $J_0$ . Умножим уравнение (3.3.13) на  $u_1^*$  скалярно в  $H$ , а уравнение (3.3.14) – на  $u_1$  и результаты вычтем один из другого. Получим

$$(A_1(u_0)u_1, u_1^*) - (u_1, A_1^*(u_0)u_1^*) = (f_1, u_1^*) - (u_1, p). \quad (3.3.15)$$

В силу сопряженности операторы  $A_1(u_0)$  и  $A_1^*(u_0)$  удовлетворяют тождеству Лагранжа, и поэтому левая часть в соотношении (3.3.15) обратится в нуль. Тогда будем иметь

$$(f_1, u_1^*) - (u_1, p) = 0.$$

Отсюда с учетом второго из выражений (3.3.10) получим две эквивалентные формулы

$$J_1 = (u_1, p), \quad (3.3.16)$$

$$J_1 = (f_1, u^*). \quad (3.3.17)$$

Мы получили формулы теории малых возмущений в виде (3.3.16), (3.3.17). Особенно важна в приложениях формула (3.3.17), поскольку она непосредственно связывает вариации функционалов с вариацией функции  $f$ , т. е.  $\delta f = \varepsilon f_1$ , и может быть многократно использована для оценок, имея в виду, что решение  $u_1^*$  остается неизменным. Конечно, все исследования проводятся в условиях теории малых возмущений.

Итак, при решении нелинейных задач по расчету вариаций функционалов с учетом малых возмущений правой части  $f$  необходимо последовательно решить две задачи. Сначала решается невозмущенная нелинейная задача

$$A(u_0)u_0 = f_0, \quad (3.3.18)$$

затем находится оператор

$$A_1(u_0) \cdot = A(u_0) \cdot + \left( \frac{dA(u_0)}{du_0} \cdot \right) u_0 \quad (3.3.19)$$

и решается сопряженная задача

$$A_1^*(u_0)u_1^* = p. \quad (3.3.20)$$

После этого рассчитывается вариация исследуемого функционала по формуле

$$\delta J = \varepsilon (f_1, u^*). \quad (3.3.21)$$

Если параметр  $\varepsilon$  явно в  $f$  не выделяется, но функция  $f_1$  в некотором смысле мала по сравнению с  $f$ , то всюду можно положить  $\varepsilon = 1$ .

В качестве примера рассмотрим простейшую стационарную задачу (3.1.55), (3.1.56). Пусть при  $f = f_0$  эта задача имеет решение  $u_0 \in D(A)$ :

$$-\nu \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = f_0(x), \quad x \in (0, 1); \quad (3.3.22)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0. \quad (3.3.23)$$

Предположим теперь, что задача (3.3.22), (3.3.23) заменяется на возмущенную

$$-\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = f(x), \quad x \in (0, 1); \quad (3.3.24)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.3.25)$$

где  $f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x)$ ,  $f_1(x)$  – заданная функция,  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Оператор  $A(u)$  из (3.3.1), (3.3.2) в данном случае имеет вид

$$A(u) \cdot = -\nu \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + u \frac{d \cdot}{dx}; \quad (3.3.26)$$

он действует в  $H = L_2(0, 1)$  с областью определения  $D(A)$ , введенной выше.

В предположении, что функция  $\varepsilon f_1$  мала по сравнению с  $f_0$ , решение  $u$  возмущенной задачи (3.3.24), (3.3.25) будем искать в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.3.27)$$

Тогда справедливо равенство (3.3.6), которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} & -\nu \frac{d^2}{dx^2} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \times \\ & \times \frac{d}{dx} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = f_0 + \varepsilon f_1; \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

$$u_i(0) = u_i(1) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.3.29)$$

Раскроем скобки в левой части выражения (3.3.28) и соберем члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда, ограничиваясь членами первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ , приходим к задачам

$$-\nu \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = f_0, \quad u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad (3.3.30)$$

$$-\nu \frac{d^2 u_1}{dx^2} + u_0 \frac{du_1}{dx} + \frac{du_0}{dx} u_1 = f_1, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0.$$

Таким образом, вместе с основной невозмущенной задачей (3.3.22), (3.3.23) мы получили уравнение для первой вариации  $u_1$ . Система уравнений (3.3.30) есть не что иное, как система (3.3.9), где оператор  $F(u_0, u_1) = \frac{dA(u_0)}{du_0} u_1$  имеет вид

$$F(u_0, u_1) = \frac{dA(u_0)}{du_0} u_1 = u_1 \frac{d}{dx}. \quad (3.3.31)$$

Зная решения  $u_0, u_1$  уравнений (3.3.30), найдем приближенное решение возмущенной задачи (3.3.24), (3.3.25) по формуле

$$u \approx u_0 + \varepsilon u_1. \quad (3.3.32)$$

Теперь рассмотрим теорию возмущений для функционала  $J$  рассматриваемой задачи. Пусть, как и ранее, этот функционал имеет вид (см. (3.1.65))

$$J = (u, p) = \int_0^1 up \, dx, \quad (3.3.33)$$

где  $p(x)$  – заданная функция.

Получив решения  $u_0, u_1$  задач (3.3.30), мы можем определить приближенное значение функционала  $J$  по формуле

$$J \approx J_0 + \varepsilon J_1, \quad (3.3.34)$$

где

$$J_0 = \int_0^1 u_0 p \, dx, \quad J_1 = \int_0^1 u_1 p \, dx.$$

Как мы видели выше, чтобы связать вариацию функционала с вариацией функции источника  $f$ , необходимо пользоваться другой формулой для  $J_1$ , а именно формулой (3.3.17):

$$J_1 = \int_0^1 f_1 u_1^* \, dx, \quad (3.3.35)$$

где  $u_1^*$  – решение сопряженной задачи (3.3.14).

В уравнении (3.3.14) фигурирует оператор  $A_1^*(u_0)$ , сопряженный к оператору  $A_1(u_0)$ . Из (3.3.12), (3.3.26) и (3.3.31) получаем, что в данном случае

$$A_1(u_0) = -\nu \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + u_0 \frac{d \cdot}{dx} + \frac{du_0}{dx} \cdot \equiv -\nu \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + \frac{d(u_0 \cdot)}{dx}. \quad (3.3.36)$$

Этот оператор действует в  $H$  с областью определения  $D(A)$ . Нетрудно убедиться в том, что с помощью техники, изложенной в § 3.1, мы получаем

$$A_1^*(u_0) \cdot = -\nu \frac{d^2 \cdot}{dx^2} - u_0 \frac{d \cdot}{dx}. \quad (3.3.37)$$

Сопряженный оператор  $A_1^*(u_0)$  действует в  $H$  с областью определения  $D(A^*)$ , введенной в § 3.1. Тогда задача (3.3.14) принимает вид

$$-\nu \frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - u_0 \frac{du_1^*}{dx} = p, \quad (3.3.38)$$

$$u_1^*(0) = u_1^*(1) = 0. \quad (3.3.39)$$

Зная решение  $u_1^*$  сопряженной задачи (3.3.38), (3.3.39), мы определим вариацию  $J_1$  по формуле (3.3.35), которая непосредственно связывает вариацию функционала с вариацией функции  $f$ .

Рассмотрим численный пример. Пусть  $f_0(x)\pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x$ ,  $\nu = 1$ , тогда невозмущенная задача (3.3.22), (3.3.23) имеет вид

$$-\frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = \pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x, \quad x \in (0, 1); \quad (3.3.40)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0. \quad (3.3.41)$$

Как мы видели в § 3.1, эта задача имеет решение

$$u_0(x) = \sin \pi x.$$

Рассмотрим функционал

$$J_0 = \int_0^1 p u_0 dx, \quad (3.3.42)$$

где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2/3, 1], \\ 0, & x \notin [2/3, 1]. \end{cases} \quad (3.3.43)$$

Из (3.3.20) легко получаем, что

$$J_0 = \int_{2/3}^1 u_0(x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_{2/3}^1 = \frac{1}{2\pi} \approx 0,159\,155. \quad (3.3.44)$$

В качестве возмущенной задачи рассмотрим задачу (3.3.24), (3.3.25) при  $f = f_0 + \varepsilon f_1$ ,  $f_1 \equiv 1$ , т. е. задачу

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = \pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x + \varepsilon, \quad (3.3.45)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.3.46)$$

Предположим, что нам необходимо вычислить функционал (3.3.33):

$$J = \int_0^1 p u dx. \quad (3.3.47)$$



Для этого воспользуемся формулой (3.3.34):

$$J \approx J_0 + \varepsilon J_1, \quad (3.3.48)$$

где  $J_1$  определяется формулой (3.3.35):

$$J_1 = \int_0^1 f_1 u_1^* dx. \quad (3.3.49)$$

Поскольку  $f_1 \equiv 1$ , то

$$J_1 = \int_0^1 u_1^*(x) dx, \quad (3.3.50)$$

т. е. нам необходимо лишь вычислить интеграл от функции  $u_1^*$  – решения сопряженной задачи (3.3.38), (3.3.39). Эта задача в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - \sin \pi x \frac{du_1^*}{dx} = p, \quad (3.3.51)$$

$$u_1^*(0) = u_1^*(1) = 0. \quad (3.3.52)$$

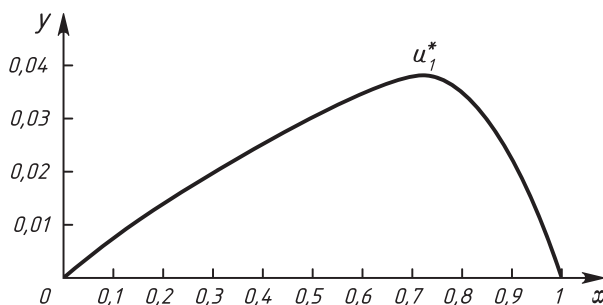


Рис. 3.2

Задача (3.3.51), (3.3.52) была решена численно методом конечного элемента с использованием кусочно-линейных базисных функций на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 10^{-2}$ . График функции  $u_1^*(x)$ , приведен на рисунке 3.2. Зная  $u_1^*(x)$ , мы можем получить  $J_1$  по формуле (3.3.50). Используя квадратурную формулу Симпсона, имеем

$$J_1 \approx 0,022\ 875. \quad (3.3.53)$$

Тогда из (3.3.44) и (3.3.48) окончательно получаем

$$J \approx 0,159\ 155 + \varepsilon 0,022\ 875.$$

### 3.4. Случай возмущения оператора задачи

Переходим теперь к рассмотрению более общего случая, когда варьируется не только функция  $f$ , но и сам оператор  $A$ , где, например, изменяются параметры или другие входные данные. Пусть исходная невозмущенная задача имеет вид

$$A_0(u_0)u_0 = f_0, \quad (3.4.1)$$

где  $A_0(u_0)$  – линейный оператор, действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A_0)$ ,  $u_0 \in D(A_0)$ ,  $f \in H$ .

Рассмотрим далее возмущенную задачу

$$A(u)u = f, \quad (3.4.2)$$

где

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \\ A(u) &= A_0(u) + \varepsilon \delta A(u), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$\delta A(u)$  – заданный оператор, действующий в  $H$ ,  $D(\delta A) = D(A_0)$ .

В предположении достаточной гладкости оператора  $A(u)$  с точностью до величин второго порядка получим

$$A(u) \approx A_0(u_0) + \varepsilon \delta A(u_0) + \varepsilon \frac{dA_0(u_0)}{du_0} u_1. \quad (3.4.4)$$

Пусть

$$A_1(u_0) \cdot = A_0(u_0) \cdot + \left( \frac{dA_0(u_0)}{du_0} \cdot \right) u_0 \equiv A_0(u_0) \cdot + F(u_0, \cdot) u_0. \quad (3.4.5)$$

Подставляя разложения (3.4.4) и (3.4.3) в (3.4.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к следующим уравнениям для  $u_0$  и  $u_1$ :

$$A_0(u_0)u_0 = f_0, \quad A_1(u_0)u_1 + \delta A(u_0)u_0 = f_1.$$

Таким образом, опять вместе с основным невозмущенным уравнением (3.4.1) мы получили уравнение для первой вариации  $u_1$ . Решая это уравнение, мы можем приближенно найти решение возмущенной задачи (3.4.2) по формуле

$$u \approx u_0 + \varepsilon u_1.$$

Теперь перейдем к формулировке теории возмущений для функционала  $J$  рассматриваемой задачи. Пусть по-прежнему

$$J_0 = (u_0, p), \quad J_1 = (u_1, p),$$

тогда

$$J \approx J_0 + \delta J = J_0 + \varepsilon J_1.$$

Рассмотрим теперь две задачи

$$A_1(u_0)u_1 + \delta A(u_0)u_0 = f_1, \quad (3.4.6)$$

$$A_1^*(u_0)u_1^* = p. \quad (3.4.7)$$

Далее умножим уравнение (3.4.6) на  $u_1^*$  скалярно в  $H$ , уравнение (3.4.7) – на  $u_1$ , результаты вычтем один из другого и воспользуемся тождеством Лагранжа. В результате получим

$$(\delta A(u_0)u_0, u_1^*) = (f_1, u_1^*) - (u_1, p). \quad (3.4.8)$$

Отсюда, имея в виду, что  $(u_1, p) = J_1$ , приходим к формуле теории возмущений

$$J_1 = (f_1, u_1^*) - (\delta A(u_0)u_0, u_1^*), \quad (3.4.9)$$

или

$$\delta J = \varepsilon(f_1 - \delta A(u_0)u_0, u_1^*). \quad (3.4.10)$$

Напомним, что

$$\delta J = \varepsilon J_1. \quad (3.4.11)$$

Формула теории малых возмущений (3.4.10) позволяет варьировать не только функцию  $f$ , но и сам оператор  $A$ .

В качестве примера рассмотрим опять стационарную задачу (3.4.1), (3.4.2). Пусть невозмущенная задача имеет вид

$$-\nu_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = f_0(x), \quad x \in (0, 1); \quad (3.4.12)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad (3.4.13)$$

где оператор  $A_0(u_0)$  из (3.4.1) задается следующим образом:

$$A_0(u_0) = -\nu_0 \frac{d^2}{dx^2} + u_0 \frac{d}{dx}, \quad \nu_0 = \text{const} > 0. \quad (3.4.14)$$

Возмущенную задачу (3.4.2) рассмотрим в виде

$$-\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = f(x), \quad x \in (0, 1); \quad (3.4.15)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.4.16)$$

где  $f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x)$ ,  $\nu = \nu_0 + \varepsilon \nu_1$ ,  $\nu = \text{const}$ ,  $f_1(x)$  – заданная функция. Оператор  $\delta A(u)$  из (3.4.3) в данном случае имеет простой вид:

$$\delta A(u) = -\nu_1 \frac{d^2}{dx^2}. \quad (3.4.17)$$

Будем считать, что операторы  $A_0(u)$ ,  $\delta A(u)$ ,  $A(u)$  действуют в вещественном гильбертовом пространстве  $H = L_2(0, 1)$  и имеют область определения  $D(A)$ , введенную в § 3.1. Предположим, что решение  $u$  возмущенной задачи (3.4.15), (3.4.16) представимо в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

Подставляя это разложение в (3.4.15), (3.4.16), используя вид  $f(x)$  и  $\nu$  и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ , мы приходим к задачам для  $u_0$  и  $u_1$ :

$$-\nu_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = f_0, \quad u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad (3.4.18)$$

$$-\nu_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d(u_0 u_1)}{dx} - \nu \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f_1, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0. \quad (3.4.19)$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$A_1(u_0)u_1 + \delta A(u_0)u_0 = f_1, \quad (3.4.20)$$

где оператор  $A_1(u_0)$  определен формулой (3.4.5) и в данном случае записывается следующим образом:

$$A_1(u_0) = -\nu_0 \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + u_0 \frac{d \cdot}{dx} + \frac{du_0}{dx} \cdot = -\nu \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d(u_0 \cdot)}{dx}. \quad (3.4.21)$$

Этот оператор действует в  $H = L_2(0, 1)$  с областью определения  $D(A)$ . Зная решение задач (3.4.18), (3.4.19), можно определить приближенное решение возмущенной задачи (3.4.15), (3.4.16) по формуле

$$u \approx u_0 + \varepsilon u_1. \quad (3.4.22)$$

Предположим теперь, что нас интересует значение функционала  $J$  от решения возмущенной задачи

$$J = (u, p) = \int_0^1 up \, dx, \quad (3.4.23)$$

где  $p(x)$  – известная функция.

С одной стороны, мы можем записать, что

$$J \approx J_0 + \varepsilon J_1, \quad (3.4.24)$$

где

$$J_0 = (u_0, p) = \int_0^1 u_0 p \, dx, \quad J_1 = \int_0^1 u_1 p \, dx; \quad (3.4.25)$$

здесь  $u_0, u_1$  – решения задач (3.4.18), (3.4.19). А с другой стороны, как мы видели выше, поправку  $J_1$  можно найти и другим способом – через решение сопряженной задачи. Для этого воспользуемся формулой (3.4.9), где  $u_1^*$  – решение задачи (3.4.7). Нетрудно видеть, что в нашем случае эта задача имеет вид

$$-\nu_0 \frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - u_0 \frac{du_1^*}{dx} = p, \quad x \in (0, 1); \quad (3.4.26)$$

$$u_1^*(0) = u_1^*(1) = 0. \quad (3.4.27)$$

Зная  $u_1^*$ , мы найдем  $J_1$  по формуле (3.4.9) с учетом (3.4.17):

$$J_1 = (f_1, u_1^*) - (\delta A(u_0)u_0, u_1^*) = \int_0^1 \left( f_1 + \nu_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) u_1^* \, dx. \quad (3.4.28)$$

Приведем еще один пример. Невозмущенную задачу будем по-прежнему рассматривать в виде (3.4.12), (3.4.13) при

$$f_0(x) = \pi^2 \cdot \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x, \quad \nu_0 = 1.$$

Таким образом, задача (3.4.1) в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = \pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x, \quad x \in (0, 1); \quad (3.4.29)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0. \quad (3.4.30)$$

Здесь оператор  $A_0(u_0)$  определяется по формуле (3.4.14):

$$A_0(u_0) = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0 \frac{d}{dx}. \quad (3.4.31)$$

Решение задачи (3.4.29), (3.4.30) имеет вид

$$u_0(x) = \sin \pi x. \quad (3.4.32)$$

Возмущенную задачу рассмотрим в виде (3.4.2) при

$$f = f_0 + \varepsilon f_1, \quad A(u) = A_0(u) + \varepsilon \delta A(u),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 + (1 - 2x) \sin \pi x + 200\pi \cos \pi x + 200\varepsilon(1 - 2x); \\ \delta A(u) &= (x^2 - x + 200) \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

Таким образом, возмущенная задача в данном случае записывается следующим образом:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} + \varepsilon(x^2 - x + 200) \frac{du}{dx} = \pi^2 \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x + \quad (3.4.34)$$

$$+ \varepsilon[2 + (1 - 2x) \sin \pi x + 200\pi \cos \pi x + 200\varepsilon(1 - 2x)];$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.4.35)$$

Предполагая, что решение  $u$  этой задачи представляется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (3.4.36)$$

подставляя (3.4.36) в (3.4.34) и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ , мы придем к задачам для  $u_0, u_1$ . При этом задачей для  $u_0$  будет невозмущенная задача (3.4.29), (3.4.30), а задача для  $u_1$  имеет вид (3.4.20):

$$A_1(u_0)u_1 + \delta A(u_0)u_0 = f_1. \quad (3.4.37)$$

Здесь оператор  $A_1(u_0)$  определяется формулой (3.4.21):

$$A_1(u_0) \cdot = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d(u_0 \cdot)}{dx}, \quad (3.4.38)$$

а оператор  $\delta A(u_0)$  задан в (3.4.33). С учетом этого уравнение (3.4.37) перепишем в виде

$$-\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d(u_0 u_1)}{dx} = f_1 - \delta A(u_0) u_0; \quad u_1(0) = u_1(1) = 0, \quad (3.4.39)$$

или

$$-\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \sin \pi x \frac{du_1}{dx} + \pi \cos \pi x u_1 = \quad (3.4.40)$$

$$= 2 + (1 - 2x) \sin \pi x + x(1 - x) \pi \cos \pi x + 200\varepsilon(1 - 2x);$$

$$u_1(0) = u_1(1) = 0. \quad (3.4.41)$$

Зная решение  $u_1$  этой задачи, мы можем найти решение возмущенной (3.4.34), (3.4.35) по формуле

$$u \approx u^{(1)} = u_0 + \varepsilon u_1. \quad (3.4.42)$$

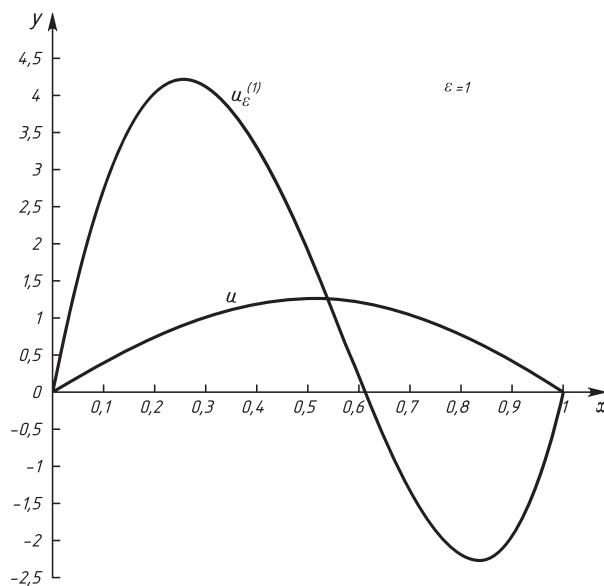


Рис. 3.3

Задача (3.4.40), (3.4.41) была решена численно методом конечного элемента с использованием кусочно-линейных базисных функций на равномерной сетке  $x_i = ih$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = 10^{-2}$ . При различных  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ) были построены значения функции

$u^{(1)} = u_0 + \varepsilon u_1$ . Функция  $u^{(1)}$  сравнивалась с точным решением  $u$  возмущенной задачи (3.4.34), (3.4.35), которое в данном случае известно в явном виде:

$$u(x) = \sin \pi x + \varepsilon x(1 - x).$$

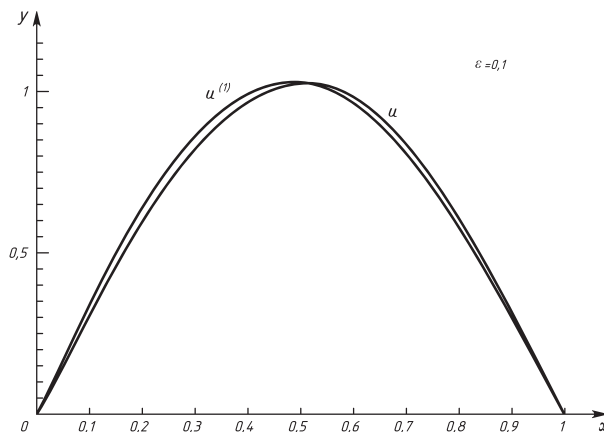


Рис. 3.4

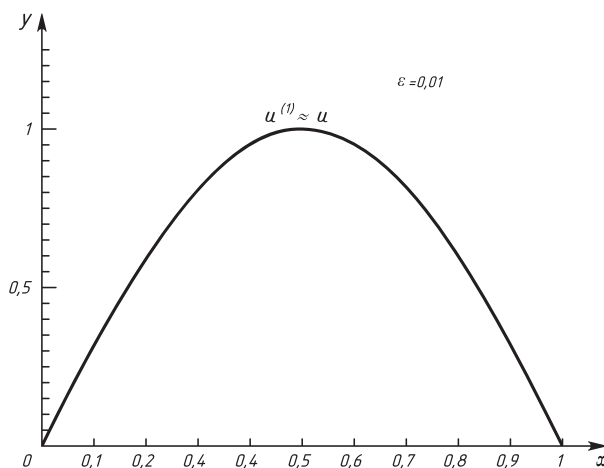


Рис. 3.5

На рисунках 3.3–3.5 приведены графики функций  $u^{(1)}$  и  $u$  при различных  $\varepsilon$ . Как видно из рисунков и показали численные расчеты, в данном случае наблюдается сходимость  $u^{(1)}$  к  $u$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $\varepsilon = 0,001$  графики функций  $u^{(1)}$  и  $u$  почти совпадают (см. рис. 3.5).



### 3.5. О теории возмущений высшего порядка

Теперь несколько слов о теории более высокого порядка, чем первый. В этом случае следует применить алгоритм, суть которого состоит в следующем.

Рассмотрим основное нелинейное уравнение

$$A(u)u = f, \quad (3.5.1)$$

и пусть

$$A(u) = A_0(u) + \varepsilon \delta A(u), \quad f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (3.5.2)$$

где  $f_i \in H$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), а операторы  $A_0(u)$  и  $\delta A(u)$  определены выше. Решение  $u$  также представим в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (3.5.3)$$

где  $\varepsilon$  – формальный параметр. Используя разложение (3.5.2) и (3.5.3), основное уравнение (3.5.1) запишем в виде

$$A(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (3.5.4)$$

Выражение, стоящее слева в этом соотношении, после конкретных преобразований, связанных с видом оператора  $A$ , можно представить в виде разложения по степеням  $\varepsilon$ . Приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  слева и справа в этом соотношении, получаем

$$\begin{aligned} A_0(u_0)u_0 &= f_0, \\ A_1(u_0)u_1 &= f_1 + B_1(u_0), \\ A_1(u_0)u_2 &= f_2 + B_2(u_0, u_1), \\ A_1(u_0)u_3 &= f_3 + B_3(u_0, u_1, u_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

где

$$A_1(u_0) \cdot = A_0(u_0) \cdot + \left( \frac{dA_0(u_0)}{dx} \cdot \right) u_0,$$

а  $B_1(u_0)$ ,  $B_2(u_0, u_1)$ ,  $B_3(u_0, u_1, u_2)$  и т. д. – выражения, не зависящие от соответствующих решений, а зависящие лишь от уже полученных.

Решая последовательно уравнения (3.5.5), мы можем построить решение возмущенной задачи (3.5.1) в виде (3.5.3) (при условии, что ряд (3.5.3) сходится в  $H$ ).

Рассмотрим далее теорию возмущений для функционала

$$J = (u, p),$$

где  $u$  – решение задачи (3.5.1). Используя представление (3.5.3), запишем  $J$  в виде

$$J = J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots,$$

где

$$J_i = (u_i, p), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Зная  $u_0, u_1, u_2, \dots$  (которые определяются из системы (3.5.5)), мы сможем определить и значение функционала  $J$  по формуле

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i, p).$$

Иногда может быть полезным другое представление для поправок  $J_i$  – через решения соответствующих сопряженных задач. В данном случае достаточно рассмотреть лишь одно сопряженное уравнение

$$A_1^*(u_0)u_1^* = p, \tag{3.5.6}$$

где  $A_1^*(u_0)$  – оператор, сопряженный к  $A_1(u_0)$  из (3.5.5). Пусть  $u_1^*$  – решение сопряженной задачи (3.5.6). Каждое из уравнений (3.5.5), начиная со второго, умножим на  $u_1^*$  скалярно в  $H$ , а уравнение (3.5.6) последовательно умножим на  $u_1, u_2, \dots$ ; соответствующие соотношения вычтем одно из другого. Тогда получим

$$\begin{aligned} 0 &= (f_1 + B_1(u_0), u_1^*) - (u_1, p), \\ 0 &= (f_2 + B_2(u_0, u_1), u_1^*) - (u_2, p), \\ 0 &= (f_3 + B_3(u_0, u_1, u_2), u_1^*) - (u_3, p), \\ &\dots \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что  $J_i = (u_i, p)$ , приходим к формулам

$$\begin{aligned} J_0 &= (u_0, p), \\ J_1 &= (f_1 + B_1(u_0), u_1^*), \\ J_2 &= (f_2 + B_2(u_0, u_1), u_1^*), \\ J_3 &= (f_3 + B_3(u_0, u_1, u_2), u_1^*), \\ &\dots \end{aligned}$$

Такие представления для  $J_i$  могут быть полезным тем, что здесь каждая поправка  $J_i$  непосредственно связана с соответствующей поправкой  $f_i$  заданной правой части  $f$ .

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + au^2 &= f(x), \quad x \in (0, 1); \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

где  $a = \text{const}$ ;  $f(x)$  – заданная функция. Пусть  $f = f_0 + \varepsilon f_1$ . Решение задачи (3.5.7) представим в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.5.8)$$

Подставляя выражения для  $f$  и для  $u$  в исходную задачу, получаем

$$\frac{d}{dx}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + a(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2 = f_0 + \varepsilon f_1.$$

Произведем необходимые вычисления и левую часть полученного соотношения представим в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{du_0}{dx} + au_0^2\right) + \varepsilon \left(\frac{du_1}{dx} + 2au_0u_1\right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{du_2}{dx} + 2au_0u_2 + au_1^2\right) + \dots = f_0 + \varepsilon f_1. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему задач

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dx} + au_0^2 &= f_0; & u_0 &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{du_1}{dx} + 2au_0u_1 &= f_1; & u_1 &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{du_2}{dx} + 2au_0u_2 &= -au_1^2; & u_2 &= 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Решая эти уравнения последовательно, получаем

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.5.11)$$

Если этот ряд при заданном в правой части  $f$  параметре  $\varepsilon$  сходится, то это и будет искомым решением задачи.

Заметим, что в данном случае оператор  $A(u)$  задачи (3.5.1) имеет вид

$$A(u) \cdot = A_0(u) \cdot = \frac{d \cdot}{dx} + au \cdot,$$

а оператор  $\delta A(u)$  из (3.5.2) тождественно равен нулевому:

$$\delta A(u) \equiv 0.$$

Оператор  $A_1(u_0)$  из (3.5.5) формально записывается следующим образом:

$$A_1(u_0) \cdot = \frac{d \cdot}{dx} + 2au_0 \cdot.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть это будет задача (3.1.55), (3.1.56), т. е.

$$\begin{aligned} -\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} &= f(x), \quad 0 < x < 1; \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Предположим, что невозмущенная задача имеет вид

$$\begin{aligned} -\nu_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} &= f_0, \quad 0 < x < 1; \\ u_0(0) &= u_0(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Будем считать, что функция  $f$  и параметр  $\nu$  в возмущенной задаче представлены в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad \nu = \nu_0 + \varepsilon \nu_1. \quad (3.5.14)$$

Тогда решение задачи (3.5.12) будем искать в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.5.15)$$

Разложения (3.5.14) и (3.5.15) подставим в (3.5.12). Тогда имеем

$$\begin{aligned} &-(\nu_0 + \varepsilon \nu_1) \frac{d^2}{dx^2} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \\ &+ (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \frac{d}{dx} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = \\ &= f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Раскрывая выражения в скобках и собирая члены в левой части (3.5.16) с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & u_0 \frac{du_0}{dx} - \nu_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon \left( u_0 \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{du_0}{dx} - \nu_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \nu_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right) + \varepsilon^2 \left( u_0 \frac{du_2}{dx} + u_1 \frac{du_1}{dx} + u_2 \frac{du_0}{dx} - \nu_0 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \nu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Приравнявая слева и справа в (3.5.17) члены одного порядка  $\varepsilon$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & -\nu_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 \frac{du_0}{dx} = f_0, & u_0(0) = u_0(1) = 0; \\ & -\nu_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{du_0 u_1}{dx} = f_1 + \nu_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2}, & u_1(0) = u_1(1) = 0; \\ & -\nu_0 \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{du_0 u_2}{dx} = f_2 + \nu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - u_1 \frac{du_1}{dx}, & u_2(0) = u_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Решая эти уравнения, мы последовательно находим  $u_0, u_1, u_2, \dots$ . Подставляя их в (3.5.15), мы определяем решение  $u$  возмущенной задачи (3.5.12). Заметим, что в данном случае, согласно (3.5.16), операторы  $A_0(u)$ ,  $\delta A(u)$  из (3.5.2) имеют вид

$$A_0(u) \cdot = -\nu_0 \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + u \frac{d \cdot}{dx}, \quad \delta A(u) \cdot = -\nu_1 \frac{d^2 \cdot}{dx^2},$$

а оператор  $A_1(u_0)$  из (3.5.5) записывается следующим образом:

$$A_1(u_0) \cdot = -\nu_0 \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + u_0 \frac{d \cdot}{dx} + \frac{du_0}{dx} \cdot = -\nu_0 \frac{d^2 \cdot}{dx^2} + \frac{d(u_0 \cdot)}{dx}.$$

Рассмотрим далее теорию возмущений для функционала

$$\begin{aligned} J = (u, p) &= (u_0, p) + \varepsilon(u_1, p) + \varepsilon^2(u_2, p) + \dots \equiv \\ &\equiv J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Введем сопряженные уравнения, соответствующие уравнениям (3.5.18). Нетрудно убедиться, что с помощью техники, изложенной выше, мы получим

$$\begin{aligned} -\nu_0 \frac{d^2 u_0^*}{dx^2} - \frac{d(u_0 u_0^*)}{dx} &= p, & u_0^*(0) &= u_0^*(1) = 0; \\ -\nu_0 \frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - u_0 \frac{dx}{du_1^*} &= p, & u_1^*(0) &= u_1^*(1) = 0; \\ -\nu_0 \frac{d^2 u_2^*}{dx^2} - u_0 \frac{du_2^*}{dx} &= p, & u_2^*(0) &= u_2^*(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Отсюда видим, что  $u_1^* = u_2^* = u_3^* = \dots$ .

Теперь найдем вариации функционалов через решения сопряженных уравнений. С этой целью каждое уравнение из (3.5.18) скалярно помножим на  $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots$ , а каждое уравнение из (3.5.20) – на  $u_0, u_1, u_2, \dots$ , после чего из каждого из полученных соотношений из (3.5.18) вычтем соответствующие равенства из (3.5.20). Тогда с использованием тождеств Лагранжа получим

$$\begin{aligned} 0 &= (f_0, u_0^*) - (u_0, p), \\ 0 &= \left( f_1 + \nu_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2}, u_1^* \right) - (u_1, p), \\ 0 &= \left( f_2 + \nu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - u_1 \frac{du_1}{dx}, u_2^* \right) - (u_2, p). \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Отсюда, имея в виду обозначения

$$(u_0, p) = J_0, \quad (u_1, p) = J_1, \quad (u_2, p) = J_2, \quad \dots,$$

с учетом  $u_2^* = u_3^* = \dots = u_1^*$  приходим к формулам

$$\begin{aligned} J_0 &= (f_0, u_0^*), \\ J_1 &= \left( f_1 + \nu_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2}, u_1^* \right) = (f_1, u_1^*) - \nu_1 \left( \frac{du_0}{dx}, \frac{du_1^*}{dx} \right), \\ J_2 &= \left( f_2 + \nu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - u_1 \frac{du_1}{dx}, u_1^* \right) = \\ &= (f_2, u_1^*) - \nu_1 \left( \frac{du_1}{dx}, \frac{du_1^*}{dx} \right) - \left( u_1 \frac{du_1}{dx}, u_1^* \right). \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Если все  $J_i$  получены, то

$$J = J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots \quad (3.5.23)$$

На первый взгляд может показаться, что, решая сопряженную задачу, соответствующую основной нелинейной, мы ничего не выигрываем, поскольку, прежде чем решать сопряженную задачу, нам нужно найти решение основной нелинейной задачи. А если решение основной задачи найдено, то могут быть вычислены все интересующие нас функционалы. Формально это верно, но только формально.

На самом деле исследователю очень сложных задач (а именно такими мы и занимаемся) необходимо установить чувствительность функционала по отношению к различным подобластям определения решения, где заданы те или иные входные данные. Вот такую зависимость мы другим способом получить не сможем, а именно исследование чувствительности во многих случаях открывает путь к пониманию сложнейших процессов, происходящих в рассматриваемой системе, и, следовательно, акцентирует наше внимание на самые важные процессы, которые требуют к себе особого внимания. В конечном итоге мы приходим к более полным и обоснованным новым постановкам задач. И именно в этом заключается особая значимость аппарата сопряженных уравнений как для линейных, так и для нелинейных задач.

### **3.6. О других подходах к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах**

В § 3.1–3.5 мы рассмотрели элементы теории операторов и их приложения в алгоритмах возмущений для нелинейных задач. Насколько известно автору, в научной литературе отсутствует систематическое изложение этих вопросов. Более того, даже само определение сопряженного оператора при рассмотрении нелинейных уравнений не является общепринятым. Поэтому в настоящем параграфе мы остановимся на других подходах к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах, предложенных В. С. Владимировым и И. В. Володиным [34, 35], В. П. Масловым [124], М. М. Вайнбергом [20], Г. И. Марчуком и В. И. Агошковым [243].

В работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича [34, 35] при построении различных законов сохранения аналогичным описанному в § 3.2 способом был введен сопряженный линейный дифференциальный опе-

ратор для весьма общей системы нелинейных уравнений с многими неизвестными переменными. В работе [34] рассматривалась нелинейная система уравнений вида

$$\mathcal{P}(u)u = 0, \quad (3.6.1)$$

где  $\mathcal{P}(u)$  – линейный дифференциальный оператор, зависящий от  $u$  (вообще говоря, нелинейно).

При фиксированном  $u$  обычным образом (как это делается для линейных дифференциальных операторов) был построен оператор  $\tilde{\mathcal{P}}(u) = (\mathcal{P}(u))^*$  – (формально) сопряженный по отношению к  $\mathcal{P}(u)$ . Отметим, что  $\tilde{\mathcal{P}}(u)$  – также линейный дифференциальный оператор, зависящий от  $u$ .

Для построения законов сохранения в [34] рассматривалась линейная система дифференциальных уравнений вида

$$(\mathcal{P}(u))^*v = 0, \quad (3.6.2)$$

которая была названа *ассоциированной* к уравнению (3.6.1).

Другими словами, уравнение (3.6.2) является сопряженным уравнением по отношению к основному уравнению (3.6.1).

Проиллюстрируем изложенное на примере уравнения Кортевега – де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in (a, b). \quad (3.6.3)$$

Перепишем его в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - 6u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u = 0$$

или в виде (3.6.1)

$$\mathcal{P}(u)u = 0,$$

где

$$\mathcal{P}(u) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - 6u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right).$$

Формально сопряженный оператор  $\tilde{\mathcal{P}}(u) = (\mathcal{P}(u))^*$  будет, очевидно, иметь вид

$$(\mathcal{P}(u))^* \cdot = -\frac{\partial \cdot}{\partial t} + 6 \frac{\partial(u \cdot)}{\partial x} - \frac{\partial^3 \cdot}{\partial x^3}.$$



Тогда ассоциированная система (3.6.2) запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6 \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \quad (3.6.4)$$

Решение  $v$  ассоциированной задачи (3.6.4) зависит от  $u$  – решения уравнения Кортевега – де Фриза (3.6.3). Так, если  $u$  – решение уравнения (3.6.3), то  $v = \partial u / \partial x$  является решением сопряженной задачи (3.6.4). Этот факт, в частности, использован в [34] для построения законов сохранения для уравнения Кортевега – де Фриза.

Другой подход к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах был предложен В. П. Масловым (см. [1]). Суть этого подхода заключается в сведении нелинейного уравнения к линейному. Дело в том, что некоторые нелинейные уравнения математической физики можно подходящей заменой свести к линейным. Если такой замены не существует, то в ряде случаев можно ввести в рассматриваемых линейных функциональных пространствах новые операции сложения и умножения на число, такие, что нелинейное уравнение превращается в линейное относительно этих операций. Для преобразованных уравнений уже применима линейная теория. В частности, можно ввести сопряженное уравнение, провести соответствующие рассуждения, получить нужные формулы, а после этого, используя замену, вернуться к решению исходной нелинейной задачи. Такой подход к построению сопряженных операторов был использован В. П. Масловым для исследования некоторых нелинейных задач математической физики.

Мы проиллюстрируем здесь этот подход на простом примере. Рассмотрим нелинейную задачу вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.5)$$

$$\omega(t, 0) = \omega(t, 1) = 0, \quad (3.6.6)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x), \quad (3.6.7)$$

$h = \text{const} > 0$ ,  $\omega_0(x)$  – заданная функция. Будем предполагать, что решение задачи (3.6.5)–(3.6.7) существует и является достаточно гладкой функцией из  $H = L_2(G)$ , где  $G = (0, 1) \times (0, T)$ . Пусть нам требуется вычислить функционал  $J(\omega)$  от решения  $\omega$  вида

$$J(\omega) = \int_0^T \int_0^1 p(t, x) \exp \left\{ -\frac{\omega(t, x)}{h} \right\} dx dt, \quad (3.6.8)$$

где  $p \in H$  – заданная функция.

Как можно вычислить этот функционал, не решая нелинейной задачи (3.6.5)–(3.6.7)? Оказывается, что это можно сделать, используя решение некоторой сопряженной задачи, соответствующей (3.6.5)–(3.6.7). Сделаем в уравнении (3.6.5) замену неизвестной функции. Пусть

$$u = e^{-\omega/h}. \quad (3.6.9)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{h} e^{-\omega/h} \frac{\partial \omega}{\partial t}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{h} e^{-\omega/h} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h} e^{-\omega/h} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} e^{-\omega/h} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

то задача (3.6.5)–(3.6.7) заменой (3.6.9) сводится к линейной задаче вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.10)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1, \quad (3.6.11)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.6.12)$$

где  $u_0(x) = \exp\{-\omega_0(x)/h\}$ . При этом функционал  $J(\omega)$  принимает вид

$$J(\omega) = \int_0^T \int_0^1 p(t, x) u(t, x) dx dt. \quad (3.6.13)$$

Теперь для уравнения (3.6.10) можно построить обычным образом сопряженное уравнение и использовать его для вычисления функционала (3.6.13) способом, описанным в главе 1.

Сопряженную по отношению к (3.6.10)–(3.6.12) задачу рассмотрим в виде

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + p(t, x), \quad t \in [0, T), \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.14)$$

$$u^*(t, 0) = u^*(t, 1) = 0, \quad (3.6.15)$$

$$u^*|_{t=T} = 0, \quad (3.6.16)$$

где функция  $p(t, x)$  определяет функционал  $J(\omega)$  из (3.6.8).

Умножим уравнение (3.6.10) на  $u^*$  скалярно в  $H$ , а уравнение (3.6.14) – на  $u$  и результаты вычтем один из другого. Используя интегрирование по частям, а также начальные и граничные условия (3.6.11), (3.6.12), (3.6.15), (3.6.16), получаем формулу для вычисления функционала  $J(\omega)$ :

$$\begin{aligned} J(\omega) = & \int_0^1 u^*(0, x) \exp\{-\omega_0(x)h\} dx - \\ & - \frac{h}{2} \int_0^T \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x}(t, 1) - \frac{\partial u^*}{\partial x}(t, 0) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Таким образом, в данном случае значение  $J(\omega)$  удастся выразить через решение  $u^*$  сопряженной задачи (3.6.14)–(3.6.16), которая является линейной.

Однако таким методом построения сопряженного оператора не всегда можно воспользоваться. Дело в том, что, во-первых, не всегда удастся нелинейную задачу свести к линейной. Во-вторых, часто бывает так, что исходное уравнение нелинейно, а рассматриваемый функционал является линейным, и при соответствующей замене уравнение перейдет в линейное, а функционал окажется нелинейным. Последнее обстоятельство не позволяет нам воспользоваться сопряженным уравнением для вычисления значения функционала.

Тем не менее этот метод построения сопряженного оператора нашел свое применение при исследовании ряда нелинейных задач математической физики (см. [1]). Особое внимание в работе [1] уделяется задачам, для которых в рассматриваемых функциональных пространствах можно ввести новые операции сложения и умножения на число и превратить исследуемое нелинейное уравнение в линейное относительно этих операций.

Сопряженные операторы в нелинейных задачах рассматривались также М. М. Вайнбергом [20]. Он ввел определение сопряженного оператора для некоторого класса нелинейных операторов, обладающих определенными свойствами. Мы приведем здесь это определение и проиллюстрируем его примером.

Для простоты будем работать в гильбертовом пространстве  $X$ . Будем рассматривать нелинейные операторы  $F$ , действующие в  $X$  и удовлетворяющие условию  $F(0) = 0$ . Предположим, что каждый оператор  $F$  дифференцируем в смысле Гато. Это означает, что для всех  $h \in X$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = Th, \quad (3.6.18)$$

где  $x \in X$ ,  $T$  – линейный ограниченный оператор, действующий в  $X$ , с областью определения  $D(T) = X$ . Оператор  $T$  называется производной Гато оператора  $F$  в точке  $u \in X$  и обозначается  $F'(u)$ :

$$T = F'(u).$$

Из множества рассмотренных операторов  $F$  выделим класс  $\mathfrak{U}$ , таких, что для каждого  $F \in \mathfrak{U}$  существует оператор  $G \in \mathfrak{U}$ , для которого выполнено равенство

$$(F'(u)v, \omega) = (v, G'(u)\omega) \quad (3.6.19)$$

для всех  $u, v, \omega \in X$ . Здесь  $F'(u), G'(u)$  – производные Гато от  $F, G$  соответственно, а  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $X$ .

**Определение 1** (М. М. Вайнберг). Оператор  $G \in \mathfrak{U}$ , удовлетворяющий (3.6.19) при любых  $u, v, \omega \in X$ , называется *сопряженным* с  $F$ .

При выполнении (3.6.19) будем писать

$$G = F^*. \quad (3.6.20)$$

Сопряженный оператор в смысле этого определения является единственным. Вайнбергом изучены различные свойства таких сопряженных операторов.

Приведем пример. Пусть  $X = L_2(a, b)$  – пространство вещественных функций, суммируемых с квадратом на отрезке  $[a, b]$ . В качестве  $F(u)$  рассмотрим простейший нелинейный оператор

$$F(u) = \sin u, \quad (3.6.21)$$

действующий в  $X = L_2(a, b)$ , с областью определения  $D(F) = X$ . Нетрудно видеть, что этот оператор дифференцируем в смысле Гато. В самом деле, согласно (3.6.18), имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(u + th) - \sin(u)}{t} = (\cos u)h,$$

то есть производная Гато равна

$$F'(u) = \cos u. \quad (3.6.22)$$

Теперь нам нужно найти такой оператор  $G(u)$ , для которого выполнено равенство (3.6.19). В нашем случае это равенство запишется в виде

$$(F'(u)v, \omega) = (v, G'(u)\omega), \quad (3.6.23)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $X = L_2(a, b)$ , а именно

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx, \quad u, v \in X.$$

Нетрудно видеть, что если

$$G(u) = \sin u,$$

то  $G'(u) = \cos u$  и равенство (3.6.23) будет выполнено:

$$(u \sin u, \omega) = (v, \omega \sin u) = \int_a^b v \omega \sin u dx. \quad (3.6.24)$$

Таким образом, согласно определению 1, оператор  $G(u) = \sin u$  является сопряженным к оператору  $F(u)$ , причем этот оператор единственный. В данном простом примере мы получили, что  $F'(u) = G(u)$ , т. е. оператор  $F$  самосопряжен.

Как видно из определения 1, сопряженные операторы определены только для тех нелинейных операторов, которые составляют класс  $\mathfrak{U}$ . Если же оператор  $F$  не принадлежит классу  $\mathfrak{U}$ , то  $F$  не имеет сопряженного оператора в смысле определения 1. Это обстоятельство затрудняет использование определения 1, так как в целом ряде практических задач возникают как раз такие нелинейные операторы, которые не принадлежат классу  $\mathfrak{U}$  (см. [100]).

В работах Г. И. Марчука, В. И. Агошкова [243] дан обзор способов построения сопряженных операторов в нелинейных задачах и одновременно с этим предложено новое определение сопряженного оператора, которое имеет смысл для достаточно широкого класса нелинейных операторов. Мы также приведем здесь это определение и проиллюстрируем его примером.

Для простоты будем считать, что нелинейный оператор  $F$  действует в гильбертовом пространстве  $X$  с областью определения  $D(F)$ , плотной в  $X$ . Пусть также  $F(0) = 0$ . Будем предполагать, что оператор  $F$  обладает производной Гато  $F'(u)$  в любой точке  $u \in D(F)$ , т. е. в точке  $u \in D(F)$  существует предел (3.6.18) для всякого  $h \in D(F)$  и  $F'(u) = T$ , где  $T$  – линейный ограниченный оператор, действующий в  $X$ , с областью определения  $D(F) = X$ .

При сделанных ограничениях для оператора  $F$  справедлива простейшая формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (см. [158]):

$$F(u) = F(u_0) + \int_0^1 F'(u_0 + t(u - u_0))(u - u_0) dt, \quad u, u_0 \in D(F). \quad (3.6.25)$$

Если в (3.6.25) принять  $u_0 = 0$ , то с учетом  $F(0) = 0$  получаем следующее выражение:

$$F(u) = \int_0^1 F'(tu)u dt, \quad u \in D(F). \quad (3.6.26)$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$F(u) = A(u)u, \quad (3.6.27)$$

где  $A(u) = \int_0^1 F'(tu) dt$  – линейный ограниченный оператор, действующий в  $X$ , с областью определения  $D(A) = D(F')$ .

Формула (3.6.26) была положена в [243] в основу определения сопряженного оператора. Так, фиксируя элемент  $u \in D(F)$  обычным образом (как это мы делали в линейном случае в главе 1), вводим сопряженный оператор  $A^*(u) = (A(u))^*$ , удовлетворяющий тождеству Лагранжа

$$(A(u)v, \omega) = (v, A^*(u)\omega) \quad (3.6.28)$$

для всех  $v, \omega \in X$ .

**Определение 2** (Г. И. Марчук, В. И. Агошков). Оператор  $F^*(u) = A^*(u)u = \left( \int_0^1 F'(tu) dt \right)^* u$  называется *сопряженным* к  $F$ .

Сопряженный оператор, построенный согласно определению 2, является единственным [243]. В работах [243] изучены свойства таких

сопряженных операторов, исследованы вопросы разрешимости соответствующих сопряженных уравнений. Изучена также взаимосвязь определений 1 и 2. Так, в [243] доказано, что если оператор принадлежит классу  $\mathfrak{U}$ , то сопряженные операторы к  $F$ , построенные по определениям 1 и 2, совпадают.

Приведем пример. Пусть  $X = L_2(a, b)$ , а в качестве  $F(u)$  возьмем оператор

$$F(u) = \sin u,$$

рассмотренный в предыдущем примере. В данном случае  $D(F) \equiv X$ . Построим сопряженный оператор  $F^*(u)$  согласно определению 2. Поскольку

$$F'(u) = \cos u,$$

то

$$A(u) = \int_0^1 F'(tu) dt = \int_0^1 \cos tu dt = \frac{\sin u}{u}.$$

Тогда представление (3.6.27) для оператора  $F(u)$  запишется в виде

$$F(u) = A(u)u,$$

где

$$A(u) = \sin u/u.$$

Введем сопряженный оператор  $A^*(u)$ , удовлетворяющий тождеству (3.6.28). Нетрудно видеть, что  $A^*(u) = \sin u/u$ , т. е. оператор  $A(u)$  самосопряжен. Значит, согласно определению 2, сопряженный оператор  $F^*(u)$  будет иметь вид

$$F^*(u) = A^*(u)u = \frac{\sin u}{u}u = \sin u,$$

то есть  $F^*(u)$  снова совпадает с  $F(u)$ . Этого результата и следовало ожидать. Дело в том, что в предыдущем примере мы показали фактически, что оператор  $F(u) = \sin u$  принадлежит классу  $\mathfrak{U}$ , а это означает, что сопряженные операторы к  $F$ , построенные по определениям 1 и 2, совпадают, в чем мы и убедились. Однако, как уже отмечалось выше, нелинейные операторы  $F$  часто не принадлежат классу  $\mathfrak{U}$ , и в этом случае можно воспользоваться лишь определением 2.

Отметим, кроме того, следующее. При формулировке определения 2 предполагалось, что производная Гато  $F'(u)$  оператора  $F$  является линейным ограниченным оператором, действующим в  $X$ , с областью определения  $D(F') = X$ . На самом деле это ограничение можно ослабить. Так, в [243] рассматривается определение 2 сопряженного к  $F$  оператора, когда  $F'(u)$  может быть, вообще говоря, неограниченным оператором в  $X$  с областью определения  $D(F') \supset D(F)$ . В этом случае формула (3.6.25) будет также справедлива в предположении, что производная  $F'(u)$  непрерывна (как функция  $u$ ) при всех  $u \in D(F)$ . Это дает возможность пользоваться определением 2 для более широкого класса нелинейных задач.

В связи с этим приведем следующий пример. Пусть  $(t, x) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $X = L_2(\Omega)$  – пространство вещественных периодических по  $t$  и по  $x$  функций с периодом, равным единице по каждой из переменных. Скалярное произведение в  $X = L_2(a, b)$  имеет обычный вид:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dt dx.$$

Рассмотрим оператор  $F$  в виде

$$F(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + au, \quad a = \text{const} > 0. \quad (3.6.29)$$

Пусть  $F$  действует в  $X$  с областью определения  $D(F) = C^1(\Omega) \subset X$ . Здесь  $C^1(\Omega)$  – множество функций, непрерывно дифференцируемых на  $\Omega$ . Нетрудно убедиться в том (см. [100]), что оператор  $F$  имеет производную Гато в любой точке:

$$F'(u)v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \left( a + \frac{\partial u}{\partial x} \right) v, \quad (3.6.30)$$

причем  $D(F') = D(F) = C^1(\Omega)$ . Отметим, что в данном случае оператор  $F'(u)$  не является ограниченным оператором из  $X$  в  $X$ .

Построим сопряженный оператор  $F^*(u)$ , пользуясь определением 2. Для этого представим  $F(u)$  в виде (3.6.27). Для  $A(u)$  имеем

$$\begin{aligned} A(u)v &= \int_0^1 F'(\tau u)v \, d\tau = \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \tau u \frac{\partial v}{\partial t} + \left( a + \frac{\partial \tau u}{\partial x} \right) v \right) d\tau = \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( a + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) v. \end{aligned}$$



Теперь построим оператор  $A^*(u)$ , удовлетворяющий тождеству Лагранжа (3.6.28). При  $\omega \in C^1(\Omega)$  интегрированием по частям (с учетом периодичности функций из  $X$ ) получаем

$$\begin{aligned} (A(u)v, \omega) &= \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( a + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) v, \omega \right) = \\ &= \left( v, -\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{u}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a\omega \right). \end{aligned}$$

Таким образом, на функциях  $\omega \in C^1(\Omega)$  оператор  $A^*(u)$  имеет вид

$$A^*(u)\omega = -\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{u}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a\omega. \quad (3.6.31)$$

Тогда, согласно определению 2, сопряженный оператор  $F^*(u)$  записывается в виде

$$F^*(u) = A^*(u)u = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + au, \quad u \in C^1(\Omega). \quad (3.6.32)$$

Итак, определение 2 приводит нас к сопряженному оператору  $F^*(u)$  в виде (3.6.32). Отметим, что в данном случае определением 1 воспользоваться нельзя, так как оператор  $F$ , определенный равенством (3.6.29), не принадлежит классу  $\mathfrak{U}$  (см. [100]).

В настоящей лекции мы рассмотрели различные подходы к определению сопряженных операторов в нелинейных задачах. Каждый из этих подходов может быть использован (в условиях его применимости) при исследовании тех или иных нелинейных задач математической физики. Многообразие таких подходов позволяет выбирать тот или иной способ построения сопряженного оператора в зависимости от целей исследования (построение законов сохранения, вычисление функционала, формулировка алгоритма возмущений, исследование разрешимости нелинейной задачи и т. п.).

Автор надеется, что приведенный здесь краткий обзор подходов к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах поможет читателю ориентироваться в научной литературе по этому направлению.

## Глава 4

# Обратные задачи и сопряженные уравнения

Богатейший опыт, который был внесен в науку методами математического моделирования сложных задач, одновременно позволил поставить перед исследователями ряд теоретических проблем, из которых основными являются идентификация процессов и решение обратных задач по определению коэффициентов и других параметров моделей на основе информации о функционалах задач. Эти исследования играют первостепенное значение в сложных моделях, когда причинно-следственные связи проследить особенно трудно.

Автор в своих исследованиях пришел к выводу, что в известном смысле наилучшими здесь оказываются алгоритмы постановок и решения, основанные на формулах теории возмущений для функционалов с использованием сопряженных уравнений. Это связано с тем, что сопряженные задачи обладают большой информативностью о процессе в целом по отношению к тому или иному функционалу. Их решения (сопряженные функции), являясь весовыми множителями при неизвестных параметрах, отражают вклад тех или иных процессов, происходящих в системе с учетом их влияния на исследуемые функционалы задач.

В современной литературе термин «обратные задачи» используется для различных типов задач математической физики.

Мы рассмотрим два типа обратных задач. Первый тип – это задачи определения состояния некоторого процесса в предыдущие моменты времени. Примером может служить задача об определении начального

распределения температуры в теле, если известно поле тепла к данному моменту времени. Другой тип – это задачи, в которых требуется определить оператор с известной структурой, но с неизвестными коэффициентами, подлежащими определению на основе информации о функционалах от решений. Примером может служить обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля, в которой требуется определить коэффициенты в дифференциальном уравнении второго порядка по свойствам спектральной функции некоторой краевой задачи.

Обратным задачи математической физики часто оказываются в классическом смысле поставленными некорректно. Малым изменениям в регистрируемых функционалах могут соответствовать большие изменения в решениях задач. Понятие корректности и пример некорректной задачи математической физики – задачи Коши для уравнения Лапласа – были приведены в начале нашего века Адамаром.

Долгое время так называемые некорректные задачи математической физики считались неинтересными и исследовались мало. Интенсивное исследование этих задач началось в связи с необходимостью решения задач интерпретации геофизических данных. Большой вклад в развитие теории и методов решения задач математической физики, не являющихся корректными в классическом смысле (по Адамару), внесли советские математики С. Г. Крейн [61], М. М. Лаврентьев [62], А. Н. Тихонов [154] и др.

Как было показано, решение некорректных в классическом смысле задач становится устойчивым по отношению к изменениям данных, если наложить на множество допустимых решений некоторые дополнительные ограничения. Поэтому задачи такого типа получили название «условно корректные».

В связи с необходимостью построения приближенных решений условно корректных задач по приближенным данным было введено понятие регуляризирующего семейства по Тихонову, суть которого в следующем. Условно корректной задаче сопоставляется семейство классически корректных задач (регуляризирующее семейство), зависящее от параметра, причем при стремлении параметра к некоторому пределу последовательность решений классически корректных задач должна стремиться к решению интересующей нас условно корректной задачи. Было показано, что при соответствующем выборе параметра (параметра регуляризации), зависящего по приближенным данным будет являться приближенным решением нашей условно корректной задачи.

В работах многих авторов исследован широкий круг условно корректных задач. Мы рассмотрим только некоторые из них. Здесь § 4.1 вводит в круг основных понятий общей теории условно корректных задач. В § 4.2, 4.3 рассмотрена регуляризация задачи определения входных (начальных) данных эволюционных уравнений. В оставшейся части главы методами теории возмущений исследуются задачи восстановления структуры линейных и нелинейных операторов. Эти исследования примыкают к работам А.В. Балакришнана и Ж.-Л. Лионса по теории идентификации [182–184, 229].

## 4.1. Основные определения и примеры

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$A\varphi = f, \quad (4.1.1)$$

где  $A$  – некоторый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве  $F$  и имеющий неограниченный обратный оператор. В этом случае задача (4.1.1) может быть поставлена некорректно, так как, с одной стороны, для произвольного элемента  $f \in F$  решение уравнения (4.1.1) может не существовать, а с другой – малым изменениям правой части  $f$  могут соответствовать сколь угодно большие вариации решения  $\varphi$ . Однако часто бывает так, что на некотором подпространстве  $\Phi \subset F$  задача (4.1.1) является корректной. Это означает, что оператор  $A$  имеет ограниченный на  $\Phi$  обратный оператор, т. е. для всех  $\varphi \in \Phi$  справедлива оценка

$$\|\varphi\| \leq c\|A\varphi\|, \quad \varphi \in \Phi, \quad c = \text{const} > 0. \quad (4.1.2)$$

В этом случае задача (4.1.1) называется *условно корректной*. Применительно к этой ситуации проанализируем простейший пример организации итерационного алгоритма вычислений, который не выводит последовательность приближенных решений из заданного подпространства  $\Phi$ .

Пусть  $F$  – гильбертово пространство, каждый элемент  $f$  которого представим в виде ряда Фурье по некоторой полной биортогональной системе функций  $\{u_n\}, \{u_n^*\}$ . Таким образом,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n, \quad (4.1.3)$$

где

$$f_n = (f, u_n^*).$$

Подпространство  $\Phi$  зададим таким образом, чтобы в него были включены только такие элементы  $f$  гильбертова пространства, у которых в разложении (4.1.3) отлично от нуля не больше  $N$  гармоник, соответствующих наиболее крупномасштабным возмущениям:

$$f = \sum_{n=1}^N f_n u_n.$$

Будем решать уравнение (4.1.1) с помощью итерационного процесса

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - \tau(A\varphi^j - f), \quad \varphi^0 = 0, \quad (4.1.4)$$

или короче

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \tau f, \quad \varphi^0 = 0,$$

где  $T = E - \tau A$  – оператор шага.

Предположим, что решение задачи (4.1.1) существует, единственно и принадлежит подпространству  $\Phi$ . Предположим далее, что на всем гильбертовом пространстве норма  $\|T\|_F$  определена равенством

$$\|T\|_F^2 = \sup_{\varphi \in F} \frac{(T\varphi, T\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \beta(T^*T) > 1,$$

а на подпространстве  $\Phi$

$$\|T\|_\Phi^2 = \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{(T\varphi, T\varphi)}{(\varphi, \varphi)} < 1.$$

При этих предположениях итерационный процесс (4.1.4) на функциях  $\varphi^j$  из  $\Phi$  будет сходиться, а на функциях всего пространства  $F$  – расходиться. Поэтому, если мы хотим реализовать сходящийся итерационный процесс, нам необходимо позаботиться о том, чтобы на каждом шаге итерационного процесса приближенное решение  $\varphi^j$  принадлежало  $\Phi$ . Конструктивно это сделать весьма просто.

Положим на некотором шаге  $\varphi^{j-1} \in \Phi$ . Тогда с помощью рекуррентного соотношения (4.1.4) получим новый элемент  $\varphi^j$ . Функция  $T\varphi^{j-1}$  уже может не принадлежать подпространству  $\Phi$ . Для того чтобы  $\varphi^j \in \Phi$ , необходимо разложить эти функции в ряд Фурье

$$\varphi^j = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^j u_n$$

и отбросить в этом ряду все члены с номерами  $n > N$ . Алгоритмически наиболее просто для этой цели определить только  $N$  первых коэффициентов Фурье

$$\varphi_k^j = (\varphi^j, u_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

и построить конечную сумму

$$\varphi^j = \sum_{k=1}^N \varphi_k^j u_k.$$

Если описанный процесс продолжить как итерационный, то все функции  $\varphi^j$  – приближенные решения задачи – будут принадлежать подпространству  $\Phi$ . При некоторых дополнительных предположениях (например, ортогональности базиса  $\{u_n\}$ ) последовательность  $\{\varphi^j\}$  будет сходиться к некоторой функции  $\varphi^\infty$ , которая принимается за приближенное решение уравнения (4.1.1).

Обратим теперь внимание на другую сторону проблемы решения условно корректных задач, а именно на точность задания входных данных. Обычно при решении задач математической физики приходится иметь дело по крайней мере с погрешностью за счет аппроксимации задачи (4.1.1) разностной задачей или за счет неточных сведений об операторе  $A$  и функции  $f$ .

Пусть  $\bar{A}$  – оператор, соответствующий некоторой стандартной модели,  $\bar{f}$  – заданный вектор, а  $\bar{\varphi}$  – решение задачи

$$\bar{A}\bar{\varphi} = \bar{f},$$

причем

$$A = \bar{A} + \delta A, \quad f = \bar{f} + \delta f,$$

и задача  $A\varphi = f$  корректна на подпространстве  $\Phi$  гильбертова пространства  $F$ ,  $A\Phi \subseteq \Phi$ ,  $A$  – симметричный положительный оператор. Относительно  $\delta A$  и  $\delta f$  на подпространстве  $\Phi$  известна их априорная погрешность:

$$\|\delta A\|_\Phi \leq \varepsilon_1, \quad \|\delta f\|_\Phi \leq \varepsilon_2. \quad (4.1.5)$$

Тогда решение уравнения  $A\varphi = f$  сводится к организации такого итерационного процесса, который порождает бы новые приближения, принадлежащие подпространству  $\Phi$ . Если оператором  $A$  является положительно определенная матрица, то существует целый набор итерационных процессов, сходящихся к решению задачи  $A\varphi = f$ . При

этом подпространство приближенных решений  $\Phi$  совпадает со всем гильбертовым (евклидовым) пространством  $F$ . В этом, кстати сказать, состоит одна из приятных особенностей задач с положительно определенными матрицами. Итерационный процесс (4.1.4) при соответствующем выборе параметра  $\tau$  будет сходиться, а оптимизация процесса может быть произведена, например, с учетом априорной информации (4.1.5) выбором числа шагов  $j_0$  итерационного процесса.

Предположим теперь, что в уравнении  $A\varphi = f$  оператор  $A$  симметричен и его спектр имеет как положительную, так и отрицательную часть. Анализ показывает, что итерационный процесс (4.1.4) в указанных предположениях будет расходиться. В самом деле, пусть

$$\varphi = \sum_n \varphi_n u_n, \quad f = \sum_n f_n u_n \quad (4.1.6)$$

и  $\{u_n\}$  – полная ортонормированная система собственных функций оператора  $A$ . Подставляя (4.1.6) в (4.1.4) и скалярно умножая результат на  $u_n$ , приходим к рекуррентным соотношениям для коэффициентов Фурье

$$\varphi_n^{j+1} = \varphi_n^j - \tau(\lambda_n \varphi_n^j - f_n), \quad \varphi_n^0 = 0,$$

или для невязки  $\xi^j = A\varphi^j - f$

$$\xi_n^{j+1} = (1 - \tau\lambda_n)\xi_n^j, \quad \xi_n^0 = -f_n. \quad (4.1.7)$$

Решая уравнение (4.1.7), получаем

$$\xi_n^j = -(1 - \tau\lambda_n)^j f_n.$$

Следовательно,

$$\xi^j = - \sum_n (1 - \tau\lambda_n)^j f_n u_n.$$

Естественно, что итерационный процесс (4.1.4) будет сходиться только в том случае, когда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \xi^j = 0.$$

Если оператор  $A$  своими собственными числами имеет только положительные числа из промежутка

$$\alpha(A) \leq \lambda_n(A) \leq \beta(A),$$

то выбором  $\tau$  из интервала

$$0 < \tau < \frac{2}{\beta} \quad (4.1.8)$$

процесс (4.1.4) можно сделать сходящимся. Однако в рассматриваемом случае симметричный оператор  $A$  имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. Пусть  $\tau$  выбрано из интервала (4.1.8). Тогда все гармоники невязки, соответствующие положительным  $\lambda$ , будут от итерации к итерации подавляться со скоростью  $T_n^j$ , где  $T_n = (1 - \tau\lambda_n)^j < 1$  и  $j$  – показатель степени. Что касается гармоник, соответствующих отрицательным собственным числам, то, так как такие компоненты невязки будут расти, для них

$$T_n^j = (1 - \tau\lambda_n)^j > 1. \quad (4.1.9)$$

Это приводит к расходимости итерационного процесса. Таким образом, итерационный процесс (4.1.4) с последовательностью пробных функций  $\varphi^j$ , принадлежащих всему гильбертову пространству, расходится.

Сделаем несколько замечаний о практическом подходе к численному решению условно корректных задач. Такие задачи обычно сводятся к системам линейных уравнений с плохо обусловленными матрицами общей структуры. Как правило, они решаются с помощью многошагового метода минимальных невязок, который обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса. Возможно также применение метода сопряженных градиентов после симметризации уравнений с помощью трансформации Гаусса. Этот второй метод мы рассмотрим ниже в связи с решением обратных эволюционных задач. При решении задачи итерационными методами процесс следует оборвать на шаге, где норма невязки приближенно окажется равной априорной погрешности входных данных, т. е.  $\|\xi^j\| \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . В этом случае мы приходим к максимально достижимой точности решения при заданных априорных погрешностях.

Итак, мы видели выше, что обеспечить устойчивость уравнению (4.1.1) можно за счет сужения решений  $\{\varphi\}$ . Дадим теперь более общее определение условной корректности задачи (4.1.1). Уравнение (4.1.1) будем рассматривать в банаховом пространстве  $F$ . Пусть  $M$  – некоторое множество из  $F$ . Задачу (4.1.1) будем называть *условно корректной* (*корректной на  $M$* ), если для всех  $\varphi \in M$  имеет место априорная оценка



$$\|\varphi\| \leq \omega(\|A\varphi\|), \quad \varphi \in M, \quad (4.1.10)$$

где  $\omega(\varepsilon)$  – непрерывная функция,  $\omega(0) = 0$ . Множество  $M$  называется *множеством корректности*.

На выбор множества  $M$  влияют как физические соображения, связанные с самой постановкой задачи, так и возможности ЭВМ и требования к точности получения результатов.

Это определение подсказывает также один из способов устойчивого решения уравнения (4.1.1) – минимизацию функционала  $\|A\varphi - f\|$  на множестве корректности  $M$ . Элемент  $\varphi_0$ , доставляющий минимум этому функционалу, называется *квазирешением*. Можно показать (см. [52]), что при некоторых дополнительных предположениях ( $M$  – выпуклый компакт, пространство  $F$  строго выпукло, в частности гильбертово) квазирешение существует, единственно и непрерывно зависит от правой части  $f \in F$ . Тем самым понятие квазирешения как бы возвращает задаче (4.1.1) корректность. Например, на рисунке 4.1 изображена ситуация, когда правая часть  $f \notin AM$ . В этом случае квазирешение  $\varphi_0$  находится из уравнения  $A\varphi_0 = g$ , где  $g$  – проекция элемента  $f$  на множество  $AM$ .

Приведенные выше итерационные и вариационные способы устойчивого решения уравнения (4.1.1) являются частным случаем так называемых регуляризирующих алгоритмов. Дадим общее определение.

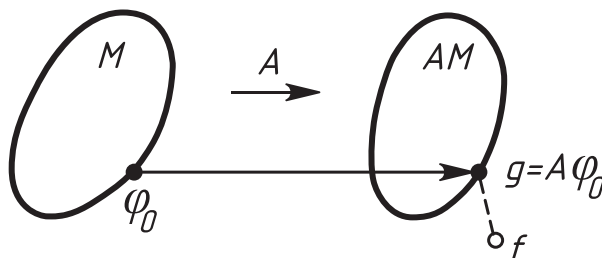


Рис. 4.1

Семейство линейных операторов  $R_\alpha$  в пространстве  $F$ , зависящее от числового параметра  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ , называется регуляризирующим семейством (алгоритмом) для уравнения (4.1.1) на множестве  $M_R$ , если выполняются следующие условия:

$$\|R_\alpha\| < \infty \quad (4.1.11)$$

для любого  $\alpha \in (0, \alpha_0]$  и

$$\|R_\alpha A\varphi - \varphi\| \rightarrow 0 \quad (4.1.12)$$

при  $\alpha \rightarrow 0$  и всех  $\varphi \in M_R$ . При этом множество  $M_R$ , на котором имеет место соотношение (4.1.12), может быть шире множества корректности  $M$  задачи (4.1.1). В случае же, когда стремление к нулю в соотношении (4.1.12) имеет место равномерно по  $\varphi \in M_R$ , эти множества обычно совпадают.

Покажем, как с помощью регуляризирующего семейства  $R_\alpha$  можно устойчивым образом находить приближенное решение уравнения (4.1.1) при условии, что точное решение  $\varphi \in M_R$ , а вместо точной правой части  $f$  известно ее  $\varepsilon$ -приближение  $f_\varepsilon$ :  $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ .

Положим  $\varphi_{\alpha\varepsilon} = R_\alpha f_\varepsilon$  и оценим  $\|\varphi - \varphi_{\alpha\varepsilon}\|$ . Из неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_{\alpha\varepsilon}\| &= \|\varphi - R_\alpha f + R_\alpha(f - f_\varepsilon)\| \leq \|\varphi - R_\alpha A\varphi\| + \\ &+ \|R_\alpha\| \|f - f_\varepsilon\| \leq \|\varphi - R_\alpha A\varphi\| + \|R_\alpha\| \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Выберем  $\alpha(\varepsilon)$  так, чтобы  $\|R_\alpha\| \varepsilon \rightarrow 0$  и  $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда первое слагаемое в (4.1.13) стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу условия (4.1.12), а второе – по построению функции  $\alpha(\varepsilon)$ . В итоге  $\varphi_{\alpha(\varepsilon)} \varepsilon \rightarrow \varphi$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, регуляризирующее семейство  $R_\alpha$  дает принципиальную возможность устойчивого решения условно-корректной задачи (4.1.1) с приближенно заданной правой частью. Параметр  $\alpha$  называется параметром регуляризации. В итерационном методе (4.1.6) роль параметра регуляризации играет номер итерации  $j$ .

Для одной и той же задачи (4.1.1) может быть обычно найдено бесконечно много регуляризирующих алгоритмов. При практических вычислениях естественно учитывать такие их характеристики, как простота организации вычислительного процесса, учет особенностей исходной задачи, оптимальность в том или ином смысле и т. д.

Проиллюстрируем введенные выше понятия на простейшем примере интегрального уравнения первого рода – уравнения Вольтерра:

$$A\varphi(t) \equiv \int_0^t A(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1.14)$$

К решению уравнения (4.1.14) сводятся многие задачи интерпретации показаний физических приборов. Рассмотрим оператор  $A$ , определенный формулой (4.1.14), в пространстве  $C[0, T]$  непрерывных функций  $\varphi$  с нормой

$$\|\varphi\| \equiv \|\varphi\|_T = \max_{t \in [0, T]} |\varphi(t)|.$$

Ядро  $A(t, \tau)$  предполагается непрерывно дифференцируемым по  $t$ , непрерывным по  $\tau$  и отличным от нуля на диагонали  $t = \tau$ . Для простоты анализа будем считать, что

$$A(t, t) \equiv 1. \quad (4.1.15)$$

При этих условиях уравнение (4.1.14) дифференцированием по  $t$  приводится к уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi(t) + \int_0^1 \frac{d}{dt} A(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} f(t), \quad (4.1.16)$$

которое, как известно, может быть решено методом последовательных приближений. Однако если вместо  $f$  известно лишь его  $\varepsilon$ -приближение  $f_\varepsilon$  в норме  $C[0, T]$ :  $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ , то задача дифференцирования становится некорректной. Покажем, что семейство операторов  $R_\alpha$ , ставящих в соответствие функции  $f(t)$  решение  $\varphi_\alpha$  уравнения

$$\varphi_\alpha(t) + \int_0^1 \Delta_\alpha A(t, \tau) \varphi_\alpha(\tau) d\tau = \Delta_\alpha f(t), \quad t \in [0, T_0], \quad (4.1.17)$$

$$T_0 = T - \alpha_0, \alpha \in (0, \alpha_0], \alpha_0 < T,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha f(t) &= \frac{f(t + \alpha) - f(t)}{\alpha}, \quad \Delta_\alpha A(t, \tau) \varphi_\alpha(\tau) = \\ &= \frac{A(t + \alpha, \tau) \varphi_\alpha(\tau) - A(t, \tau) \varphi_\alpha(\tau)}{\alpha}, \end{aligned}$$

будет регуляризующим на интервале  $[0, T_0]$  для всех непрерывно дифференцируемых решений  $\varphi$  уравнения (4.1.14). В самом деле, решение  $\varphi_\alpha$  уравнения Вольтерра второго рода (4.1.17) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|\varphi_\alpha\|_{T_0} \leq e^{KT_0} \|\Delta_\alpha f\|_{T_0},$$

где

$$K = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T_0} |\Delta_\alpha A(t, \tau)|,$$

а так как

$$\|\Delta_\alpha f\|_{T_0} \leq \frac{2}{\alpha} \|f\|_T,$$

то

$$\|\varphi_\alpha\|_{T_0} \equiv \|R_\alpha f\|_{T_0} \leq \frac{2e^{KT_0}}{\alpha} \|f\|_T < \infty \quad (4.1.18)$$

для  $\alpha > 0$ , и, следовательно, условие (4.1.11) выполнено. Для проверки условия (4.1.12) достаточно показать, что

$$\|\varphi_\alpha - \varphi\|_{T_0} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Применив к уравнению (4.1.14) оператор  $\Delta_\alpha$  с учетом условия (4.1.15), легко получить равенство

$$\varphi(t) + \int_0^1 \Delta_\alpha A(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \Delta_\alpha f(t) - g_\alpha(t), \quad (4.1.19)$$

где

$$\begin{aligned} g_\alpha(t) = & \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} (A(t+\alpha, \tau) - A(\tau, \tau)) \varphi(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Вычитая равенство (4.1.19) из (4.1.17), приходим к уравнению для невязки  $u_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi$ :

$$u_\alpha + \int_0^1 \Delta_\alpha A(t, \tau) u_\alpha(\tau) d\tau = g_\alpha(t), \quad t \in [0, T_0]. \quad (4.1.21)$$

Из (4.1.21), (4.1.20) следует, что

$$\|\varphi - \varphi_\alpha\|_{T_0} \equiv \|u_\alpha\|_{T_0} \leq e^{KT_0} \|g_\alpha\|_{T_0}, \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} \|g_\alpha\|_{T_0} & \leq \frac{1}{\alpha} K \|\varphi\|_T \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|_T \alpha^2 = \\ & = \alpha \left( K \|\varphi\|_T + \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|_T \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

при  $\alpha \rightarrow 0$ . Таким образом, мы показали, что операторы  $\{R_\alpha\}$  образуют регуляризирующее семейство для уравнения (4.1.14) на множестве непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi$ . Важной особенностью этого регуляризирующего алгоритма является то, что он в отличие от общих вариационных алгоритмов сохраняет свойство вольтерровости исходного уравнения.

## 4.2. Решение обратных эволюционных задач с постоянным оператором

В этом параграфе мы рассмотрим два устойчивых метода решения обратной эволюционной задачи:

$$\frac{d\varphi}{dt} - A\varphi = 0, \quad \varphi(0) = g, \quad A \geq 0.$$

Первый основан на методе Фурье и сводится фактически к решению некоторой спектральной задачи, а во втором исходная некорректная задача редуцируется к решению последовательности корректных (прямых) эволюционных задач:

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = 0, \quad \varphi(0) = g, \quad A \geq 0.$$

Сначала рассмотрим метод Фурье. Пусть  $A$  – положительно определенная матрица, не зависящая от времени и имеющая вещественный спектр в промежутке  $\alpha(A) \leq \lambda \leq \beta(A)$ , а вектор-функция  $\varphi$  – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} - A\varphi &= 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ \varphi &= g \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

где  $g$  – заданное значение вектора в начальный момент времени. Рассмотрим две спектральные задачи:

$$Au = \lambda u, \quad A^*u^* = \lambda u^*. \tag{4.2.2}$$

Предположим, что они определяют два биортогональных базиса собственных функций  $\{u_n\}$  и  $\{u_n^*\}$ . Функции  $\varphi$  и  $g$  представим в виде сумм Фурье

$$\varphi = \sum_n \varphi_n u_n, \quad g = \sum_n g_n u_n. \tag{4.2.3}$$

Подставим эти суммы в (4.2.1) и результат скалярно умножим на  $u_n^*$ . Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n}{dt} - \lambda_n \varphi_n &= 0, \\ \varphi_n &= g_n \quad \text{при } t = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Решение каждого уравнения (4.2.4) имеет вид

$$\varphi_n = g_n e^{\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.5)$$

и, следовательно, решение задачи (4.2.1) представимо суммой

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^N g_n e^{\lambda_n t} u_n. \quad (4.2.6)$$

Итак, мы установили, что решение задачи (4.2.1) представлено в виде суммы Фурье, каждый член которой по времени экспоненциально растет в зависимости от величины  $n$ -го собственного числа  $\lambda_n$ . Предположим, что нас интересует физически определенное решение этой задачи в интервале времени  $0 \leq t \leq t_0$ . Рассмотрим задачу, аналогичную (4.2.1), но уже корректную:

$$\frac{d\varphi}{dt} - A\varphi = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad \varphi = h \quad \text{при } t = t_0. \quad (4.2.7)$$

Поступая аналогично предыдущему, получаем

$$\varphi = \sum_{n=1}^N h_n e^{-\lambda_n(t_0-t)} u_n. \quad (4.2.8)$$

Потребуем, чтобы решение (4.2.8) при  $t = 0$  совпадало с вектором  $g$  из задачи (4.2.1). Отсюда получим связь между коэффициентами Фурье функции  $h$  и функции  $g$ :

$$g_n = h_n e^{-\lambda_n t_0}. \quad (4.2.9)$$

Таким образом, функция  $g$  восстанавливается с помощью функции  $h$  вполне просто:

$$g = \sum_{n=1}^N h_n e^{-\lambda_n t_0} u_n. \quad (4.2.10)$$

Более того, малым ошибкам в  $h$  (или  $h_n$ ) будут соответствовать малые ошибки в функции  $g$ . Однако наша задача обратна к рассмотренной. Мы располагаем информацией о функции  $g$ , а нам требуется восстановить функцию  $h$  по формуле

$$h = \sum_{n=1}^N g_n e^{\lambda_n t_0} u_n. \quad (4.2.11)$$

Если бы мы располагали точной информацией о функции  $g$  и имели возможность вести расчет с бесконечным числом значащих цифр, то восстановление функции  $h$  по формуле (4.2.11) не представляло бы труда. В данной ситуации, однако, функцию  $g$  мы знаем с определенной погрешностью, которая априори считается известной, и расчет проводится на ЭВМ с ограниченным числом знаков (слов), поэтому в процессе вычислений появляются ошибки округления. Эти два обстоятельства делают задачу вычисления  $h$  по формуле (4.2.11) уже не такой простой.

Прежде всего предположим, что исследователю, пытающемуся произвести обработку экспериментальных данных на основе решения обратной эволюционной задачи (4.2.1), заранее известна система собственных функций  $u_n$  и он имеет возможность в результате разложения исходных данных (функций  $g$ ) по этой системе выделить полезную информацию и с достаточной точностью оценить погрешность в каждой компоненте Фурье  $g_n$ .

Если задача носит статистический характер и допускает многократное повторение, то на основе хорошо разработанных методов корреляционного анализа в этом случае удастся существенно повысить точность данных в  $g_n$ , даже если в единичном измерении погрешность значительно превышает полезную информацию. Во всяком случае предварительная обработка материалов наблюдения позволяет сделать заключение о величине систематической (или случайной, если речь идет о единичном измерении) погрешности в  $g_n$ . Поэтому для любого  $n$  будем иметь

$$g_n = \overline{g_n} (1 + \delta_n),$$

где  $\overline{g_n}$  – точное значение (априори нам неизвестное!), а  $\delta_n$  – относительная погрешность, которую будем считать известной.

Обычно погрешность  $\delta_n$  оказывается минимальной для наиболее длинных волн возмущений и быстро растет в направлении высоких

гармоник, описывающих, как правило, мелкомасштабные особенности решения. Поэтому, начиная с некоторого номера, коэффициенты  $g_n$  в основном описывают погрешность во входных данных. Из формулы (4.2.11) следует, что именно самые высокочастотные компоненты имеют наибольший экспоненциальный вес. Следовательно, если мы не позаботимся заранее о том, чтобы исключить из рассмотрения паразитические гармоники, то в итоге можем получить заведомо неверный результат, так как для таких гармоник  $g_n$  практически не содержат полезной информации, но, будучи умноженными на большие коэффициенты  $e^{\lambda_n t_0}$ , они могут внести крупный вклад в  $h$  и тем самым исказить (иногда непоправимо!) решение задачи. Таким образом, первая и основная задача состоит в определении информативности коэффициентов  $g_n$ .

Предположим, что на основе априорной информации установлено, что  $n_0$  первых коэффициентов  $g_n$  имеют относительную погрешность меньше  $\eta$ , т. е.  $\delta_n < \eta$ , где  $\eta$  – максимально допустимая погрешность. Тогда алгоритм восстановления функции (4.2.11) оказывается аналогичным уже рассмотренному при построении элементов подпространства  $\Phi$  в задаче (4.2.1). Нам просто нужно исключить из ряда (4.2.11) те гармоники, которые являются паразитическими. В результате будем иметь

$$h = \sum_{n=1}^{n_0} g_n e^{\lambda_n t_0} u_n. \quad (4.2.12)$$

За основу алгоритма решения частной спектральной задачи примем итерационный метод. Если необходимо построить набор первых (наиболее крупномасштабных) собственных функций  $u_n$  или  $u_n^*$  и соответствующих им собственных чисел, то для этой цели можно воспользоваться алгоритмом ортогонализации.

Рассмотрим опять задачу Коши

$$\frac{d\varphi}{dt} - A\varphi = 0, \quad \varphi(0) = g, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (4.2.13)$$

где  $A$  – самосопряженный, неограниченный, положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $F$ . Другими словами, в отличие от вышеизложенного мы не делаем предварительно конечно-разностную аппроксимацию по пространственным переменным. В этом случае задача (4.2.13) классически некорректна. Мы считаем, что решение  $\varphi$  задачи (4.2.13) существует и принадлежит



множеству  $M = \{\varphi(t) : \|\varphi(t)\| \leq m, t \in [0, t_0]\}$ , однако вместо точного начального условия  $g$  нам задано такое приближение  $g_\varepsilon$ , что

$$\|g - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon. \quad (4.2.14)$$

Известно неравенство

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\|^{1-t/t_0} \|\varphi(t_0)\|^{t/t_0}, \quad (4.2.15)$$

поэтому для любого фиксированного  $t \in (0, t_0)$  задача определения  $\varphi(t)$  условно корректна на множестве  $M$ , так как в силу (4.2.15)

$$\|\varphi(t)\| \leq m^{t/t_0} \|g\|^{1-t/t_0}, \quad \varphi \in M. \quad (4.2.16)$$

Покажем, что операторы  $R_\alpha$ , определенные формулой

$$R_\alpha = (e^{-At_0} + \alpha E)^{-t/t_0}, \quad \alpha > 0, \quad (4.2.17)$$

образуют регуляризующее семейство на множестве корректности  $M$ . В самом деле, так как оператор  $R_\alpha$ , согласно (4.2.17), есть функция самосопряженного положительного оператора  $A$ , то, используя спектральное разложение, получаем

$$\|R_\alpha\| \leq \max_{\lambda \geq 0} (e^{-\lambda t_0} + \alpha)^{t/t_0} = \alpha^{t/t_0} < \infty. \quad (4.2.18)$$

Для проверки условия (4.2.12) (роль оператора  $A$  в нем играет оператор  $e^{-At}$  и  $f \equiv g$ , так как  $e^{-At}\varphi(t) = g$ ) достаточно показать, что

$$\|R_\alpha e^{-At}\varphi(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \quad \varphi \in M. \quad (4.2.19)$$

Снова, используя спектральное разложение оператора  $A$ , имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - R_\alpha e^{-At}\varphi(t)\| &= \|e^{At}g - R_\alpha g\| \leq \\ &\leq \max_{\lambda \geq 0} e^{\lambda(t-t_0)} [1 - (1 + \alpha e^{\lambda t_0})^{-t/t_0}] \|e^{At_0}g\|. \end{aligned}$$

Для оценки этой величины воспользуемся неравенством

$$(1+x)^\tau - 1 \leq \tau x (1+x)^\tau (1+\tau x)^{-1},$$

которое справедливо для  $x \geq 0$  и  $\tau \in [0, 1]$ . Учитывая также, что  $\varphi \in M$ , т. е.  $\|\varphi(t_0)\| = \|e^{At_0}g\| \leq m$ , получаем

$$\begin{aligned}
& \max_{\lambda \geq 0} e^{\lambda(t-t_0)} [1 - (1 + \alpha e^{\lambda t_0})^{-t/t_0}] \|e^{At_0} g\| \leq \\
& \leq \alpha^{1-t/t_0} \max_{\alpha \leq x \leq \infty} x^{t/t_0-1} [1 - (1+x)^{-t/t_0}] m \leq \\
& \leq \alpha^{1-t/t_0} \max_{\alpha \leq x \leq \infty} \frac{t}{t_0} x^{t/t_0} (1 + \frac{t}{t_0} x)^{-1} m = \frac{t}{t_0} (1 - \frac{t}{t_0})^{1-t/t_0} \alpha^{1-t/t_0} m.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\|\varphi(t) - R_\alpha g\| \leq \frac{t}{t_0} (1 - \frac{t}{t_0})^{1-t/t_0} \alpha^{1-t/t_0} m \rightarrow 0 \quad (4.2.20)$$

при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $t < t_0$ . Тем самым доказано, что  $\{R_\alpha\}$  – регуляризирующее семейство. Используя оценки (4.2.14), (4.2.18), (4.2.20) и неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - R_\alpha g_\varepsilon\| & \leq \|\varphi(t) - R_\alpha g\| + \|R_\alpha g\| \cdot \|g - g_\varepsilon\| \leq \\
& \leq \frac{t}{t_0} (1 - \frac{t}{t_0})^{1-t/t_0} \alpha^{1-t/t_0} m + \alpha^{-t/t_0} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Элементарные выкладки показывают, что наименьшее значение правой части этого неравенства достигается при

$$\alpha_0 = (1 - \frac{t}{t_0})^{-2+t/t_0} \frac{\varepsilon}{m}.$$

Так как для  $t \in (0, t_0)$

$$(1 - \frac{t}{t_0})^{-(1-t/t_0)^2} \leq e^{1/(2e)},$$

то

$$\|\varphi(t) - R_{\alpha_0} g\| \leq e^{1/(2e)} m^{t/t_0} \varepsilon^{1-t/t_0}. \quad (4.2.21)$$

Оценка (4.2.21) уклонения приближенного решения задачи (4.2.13), построенного с помощью оператора  $R_{\alpha_0}$ , от точного решения  $\varphi(t)$  отличается от априорной оценки (4.2.16) устойчивости на  $M$  лишь множителем  $e^{1/(2e)} \approx 1,21$ . В этом смысле предлагаемый метод решения задачи (4.2.13) оптимален.

Для практического вычисления элемента

$$R_{\alpha_0 g_\varepsilon} \equiv (e^{-At_0} + \alpha_0)^{-t/t_0} g_\varepsilon$$

уместно положить

$$R_{\alpha_0 g_\varepsilon} \approx Q_n(e^{-At_0})g_\varepsilon,$$

где  $Q_n(x)$  – многочлен наилучшего приближения степени  $n$  к функции  $(x + \alpha_0)^{-t/t_0}$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ , т. е.

$$\max_{x \in [a, b]} |(x + \alpha_0)^{-t/t_0} - Q_n(x)| = \inf \max_{x \in [a, b]} |(x + \alpha_0)^{-t/t_0} - P_n(x)|,$$

а точная нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам  $P_n$   $n$ -й степени. Оператор  $Q_n(e^{-At_0})$  есть многочлен по  $e^{-At_0}$ , т. е. для вычисления элемента  $Q_n(e^{-At_0})g_\varepsilon$  достаточно уметь вычислять элементы  $e^{-kAt_0}$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Но  $e^{-kAt_0}g_\varepsilon$  есть решение корректной задачи Коши

$$\frac{d\psi}{dt} + A\psi = 0, \quad \psi(0) = g_\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (4.2.22)$$

при  $t = kt_0$ . Таким образом, мы свели некорректную задачу (4.2.13) к последовательности корректных задач (4.2.22). Можно показать, что окончательная погрешность  $\|\varphi(t) - Q_n(e^{-At_0})g_\varepsilon\|$  метода оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{-(1-t/t_0)^2} \varepsilon^{1-t/t_0} m^{t/t_0} + \\ & + \frac{2^{2^{t/t_0}+1}}{\Gamma(t/t_0)} (n+1)^{t/t_0-1} \frac{\beta^{n+1+t/t_0}}{(1-\beta^2)^{1+t/t_0}} \|g_\varepsilon\|, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

где  $\beta = 1 + 2\alpha_0 - 2\sqrt{\alpha_0 + \alpha_0^2}$ ,  $\Gamma$  – гамма-функция. Важно подчеркнуть, что в практически интересных случаях степень многочленов  $Q_n$  невелика. Так, из (4.2.23) следует, что, например, при

$$\frac{\varepsilon}{\|g_\varepsilon\|} = 0, 1, \quad \frac{\|g_\varepsilon\|}{m} = 0, 1$$

для получения точности  $2\varepsilon^{1-t/t_0}m^{t/t_0}$  достаточно воспользоваться многочленом  $Q_2$ ; при

$$\frac{\varepsilon}{\|g_\varepsilon\|} = 0, 05, \quad \frac{\|g_\varepsilon\|}{m} = 0, 1$$

достаточно воспользоваться многочленом  $Q_4$ . Для вычисления коэффициентов многочлена  $Q_n$  имеются явные формулы, которые зависят только от отношений  $\varepsilon/m$ ,  $t/t_0$  и не зависят от оператора  $A$  и входных данных  $g_\varepsilon$ .

### 4.3. Обратная эволюционная задача с оператором, зависящим от времени

Рассмотрим эволюционную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} - A(t)\varphi &= 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ \varphi &= g \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

с оператором  $A > 0$ , зависящим от времени. Как и раньше, предполагается, что задача (4.3.1) является результатом редукции задачи математической физики по пространственным переменным к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае метод Фурье уже неприменим, и для решения задачи (4.3.1) необходимо использовать численные методы.

Переходим к обсуждению одного из возможных алгоритмов численного решения. Задаче (4.3.1) поставим в соответствие модельную задачу, в известном смысле близкую:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} - \bar{A}\bar{\varphi} &= 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ \bar{\varphi} &= g \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где  $\bar{A} > 0$  – оператор, не зависящий от времени, имеющий положительный спектр

$$\alpha(\bar{A}) \leq \lambda(\bar{A}) \leq \beta(\bar{A})$$

и в некотором смысле близкий к оператору  $A(t)$ . Ради определенности будем полагать, что

$$A(t) = \bar{A} + \delta A(t), \quad (4.3.3)$$

где

$$\|\delta A(t)\| \ll \|\bar{A}\| \quad (4.3.4)$$

для любых  $t$  в интервале  $0 \leq t \leq t_0$ .

Задача (4.3.2) в дальнейшем позволит нам получить необходимую априорную информацию для организации вычислительного процесса решения основной задачи (4.3.1).

Определим  $m$  информативных (с точки зрения ошибок во входных данных) собственных элементов  $u_n, u_n^*$  и собственных чисел  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). Остальные гармоники ряда Фурье для  $g_n$

( $n = m + 1, m + 2, \dots, N$ ) должны быть отброшены, так как ошибки при определении этих коэффициентов превышают (иногда весьма значительно) полезную информацию. Тогда в качестве  $g$  возьмем функцию

$$\bar{g} = \sum_{n=1}^m g_n u_n, \quad (4.3.5)$$

где  $g_n = (g, u_n^*)$ . В результате решения модельной задачи  $\bar{\varphi}$  на промежутке  $0 \leq t \leq t_0$  может быть представлено в виде

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{n=1}^m g_n e^{\lambda_n t} u_n. \quad (4.3.6)$$

Попытаемся теперь решить модельную задачу (4.3.2) численно. С этой целью рассмотрим, например, разностную схему второго порядка точности относительно  $\Delta t = \tau$ :

$$\frac{\bar{\varphi}^{j+1} - \bar{\varphi}^j}{\tau} - A \frac{\bar{\varphi}^{j+1} + \bar{\varphi}^j}{2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.3.7)$$

$$\bar{\varphi}^0 = g.$$

Решение задачи (4.3.7) будем искать с помощью метода Фурье, предполагая, что имеется весь набор собственных элементов  $u_n$  и  $u_n^*$ . Такое предположение делается только с целью теоретического анализа и получения некоторой априорной информации о поведении решения. Тогда будем иметь

$$\bar{\varphi}^j = \sum_{n=1}^N \bar{\varphi}_n^j u_n. \quad (4.3.8)$$

В результате для коэффициентов Фурье с помощью (4.3.7) приходим к рекуррентным соотношениям

$$\bar{\varphi}_n^{j+1} = \frac{1 + \tau \lambda_n / 2}{1 - \tau \lambda_n / 2} \bar{\varphi}_n^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.3.9)$$

$$\bar{\varphi}_n^0 = g_n.$$

Следовательно,

$$\bar{\varphi}_n^j = \left[ \frac{1 + \tau \lambda_n / 2}{1 - \tau \lambda_n / 2} \right]^j g_n. \quad (4.3.10)$$

Таким образом,

$$\bar{\varphi}^j = \sum_{n=1}^N T_n^j g_n u_n, \quad (4.3.11)$$

где

$$T_n = \frac{1 + \tau \lambda_n / 2}{1 - \tau \lambda_n / 2}.$$

Предположим, что шаг  $\tau$  выбран из условия, чтобы знаменатель в выражении для  $T_n$  не обращался в нуль ни для одного значения  $n$ . Например,

$$\tau < \frac{2}{\beta(\bar{A})}. \quad (4.3.12)$$

Заметим, что условие согласовано с условием аппроксимации крупномасштабных возмущений.

Формальный анализ решения модельной задачи в виде (4.3.11) показывает, что все  $T_n > 1$  и высокочастотные гармоники, соответствующие большим номерам  $n$ , имеют быстро растущие с номером амплитуды. Следовательно, для них  $T_n \gg 1$  и тем более  $T_n^j \gg 1$ . Поскольку при обработке входных данных  $g$  мы отбросили все гармоники ряда Фурье (4.3.5) начиная с  $n = m + 1$ , то на первый взгляд кажется, что этого достаточно для того, чтобы сумма Фурье  $T_n > 1$

$$\bar{g} = \sum_{n=1}^m g_n u_n$$

порождала решение с таким же числом членов

$$\bar{\varphi}^j = \sum_{n=1}^m T_n^j g_n u_n. \quad (4.3.13)$$

Такое положение было бы в действительности, если бы наши ЭВМ позволяли вести расчет с бесконечным числом значащих цифр. Однако из-за ограниченности машинного слова в процессе вычисления вследствие ошибок округления сразу же появятся компоненты  $g_n$  для  $n > m$ . И хотя они малы, однако имеют большой «вес» в решении, пропорциональный  $T_n^j \gg 1$ . Эти ошибки в конце концов могут существенно исказить основное решение задачи. Чтобы избежать катастрофического роста ошибок высокочастотных компонент ряда Фурье, необходимо найти такую конструкцию, которая автоматически

переводила бы любой элемент векторного пространства  $F$  в элемент некоторого подпространства  $\Phi$ .

Определим  $\Phi$  следующим образом: будем считать, что элемент принадлежит подпространству  $\Phi$ , если амплитуды последних  $N - m$  гармоник суммы Фурье этого элемента по системе функции  $u_n$  в процессе численного решения задачи возрастают от шага к шагу не быстрее, чем несколько амплитуд последней информативной гармоники с номером  $m$ . При конструкции такого подпространства ошибки округления на его элементах будут возрастать не быстрее амплитуды  $m$ -й гармоники. Это обеспечит корректность вычислительной схемы. Ряд авторов предложил вместо оператора  $\bar{A}$  в модельной задаче (4.3.2) рассматривать оператор  $\bar{A}_\varepsilon = \bar{A} - \varepsilon \bar{A}^2$ . В этом случае вместо задачи (18.25) будем иметь

$$\frac{d\bar{\varphi}_\varepsilon}{dt} - \bar{A}\bar{\varphi}_\varepsilon = -\varepsilon \bar{A}^2 \bar{\varphi}_\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (4.3.14)$$

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = g \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где  $\varepsilon$  – пока произвольный параметр. Этот параметр выберем из условия, чтобы решение задачи не выходило из множества  $\Phi$ . Ради простоты анализа предположим, что  $\bar{A} = \bar{A}^*$ . Рассмотрим разностную схему

$$\frac{\bar{\varphi}_\varepsilon^{j+1} - \bar{\varphi}_\varepsilon^j}{\tau} - (\bar{A} - \varepsilon \bar{A}^2) \frac{\bar{\varphi}_\varepsilon^{j+1} + \bar{\varphi}_\varepsilon^j}{2} = 0, \quad \bar{\varphi}_\varepsilon^0 = g. \quad (4.3.15)$$

Решение задачи (4.3.15) будем искать с помощью ряда Фурье по собственным функциям оператора  $\bar{A}$ . Тогда получим

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^j = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1 + \tau \lambda_n / 2 - \varepsilon \tau \lambda_n^2 / 2}{1 - \tau \lambda_n / 2 + \varepsilon \tau \lambda_n^2 / 2} \right]^j g_n u_n. \quad (4.3.16)$$

Параметр  $\varepsilon$  выберем из условия, чтобы относительная ошибка в гармонике с номером  $m$  за счет введения оператора  $\varepsilon \bar{A}^2$  на превышала  $\eta$  (обычно в качестве  $\eta$  можно брать  $\eta < 1$  в зависимости от того, каково соотношение в гармонике  $n \equiv m$  между полезной информацией и неучитываемыми погрешностями («шумом»). Из этого условия получаем соотношение

$$\eta \frac{\tau \lambda_m}{2} = \varepsilon \frac{\tau \lambda_m^2}{2}, \quad (4.3.17)$$

откуда

$$\varepsilon = \eta / \lambda_m. \quad (4.3.18)$$

Таким образом, мы приходим к определению одной из важнейших априорных величин, необходимых для дальнейшего численного расчета. Легко видеть, что при заданном параметре  $\varepsilon$  из (4.3.18) амплитуды всех гармоник  $n > m$  будут возрастать со временем не быстрее  $T_m^j$ .

Наконец, нам понадобится еще одна априорная величина. Для ее нахождения рассмотрим

$$\bar{\varphi}^j = \sum_{n=1}^m g_n e^{\lambda_n t} u_n, \quad (4.3.19)$$

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^j = \sum_{n=1}^N g_n T_n^j(\varepsilon) u_n, \quad (4.3.20)$$

или

$$T_n(\varepsilon) = \frac{1 + \tau \lambda_n / 2 - \varepsilon \tau \lambda_n^2 / 2}{1 - \tau \lambda_n / 2 + \varepsilon \tau \lambda_n^2 / 2}.$$

Поскольку решение  $\bar{\varphi}_\varepsilon^j$  принадлежит  $\Phi$ , то без большой погрешности его можно заменить на

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^j = \sum_{n=1}^m g_n T_n^j(\varepsilon) u_n, \quad (4.3.21)$$

где мы ограничились только первыми  $m$  членами. Решение в виде (4.3.21) находится конструктивно с помощью уже полученной системы функций  $u_n$  и  $u_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). Из выражений (4.3.19) и (4.3.21) найдем величины  $\bar{\varphi}^j$  и  $\bar{\varphi}_\varepsilon^j$  при  $j = 1, 2, \dots, j_0$ . После этого введем в рассмотрение векторы

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}^1 \\ \bar{\varphi}^2 \\ \dots \\ \bar{\varphi}^{j_0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_\varepsilon^1 \\ \bar{\varphi}_\varepsilon^2 \\ \dots \\ \bar{\varphi}_\varepsilon^{j_0} \end{bmatrix}$$

и подсчитаем норму

$$\|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_\varepsilon\| = \delta. \quad (4.3.22)$$

Это и будет последняя из искоемых априорных величин. Две другие ( $\tau$  и  $\varepsilon$ ) определены формулами (4.3.12) и (4.3.18).

Сформулируем численный алгоритм решения исходной задачи (4.3.1). С учетом изложенного выше анализа построим следующую аппроксимацию задачи:

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} - (A_j - \varepsilon A_j^2) \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = 0, \quad \varphi^0 = g, \quad (4.3.23)$$



где  $\tau$  и  $\varepsilon$  выбираются на основе анализа априори изученной простой модели:

$$\tau < 2/\beta(\bar{A}), \quad \varepsilon = \eta/\lambda_m(\bar{A}). \quad (4.3.24)$$

Введем в рассмотрение векторы

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \dots \\ \varphi^{j_0} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -R_0 g \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

и матрицу

$$\lambda = \begin{bmatrix} -S_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_1 & -S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -S_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -S_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R_{j_0-1} & -S_{j_0-1} \end{bmatrix},$$

где

$$S_j = E - \frac{\tau}{2}(A_j - \varepsilon A_j^2), \quad R_j = E + \frac{\tau}{2}(A_j - \varepsilon A_j^2), \quad A_j = A(t_{j+1/2}).$$

Тогда приходим к задаче

$$\Lambda \varphi = f. \quad (4.3.25)$$

Задачу (18.48) симметризуем, умножив на  $\Lambda^*$ :

$$\Lambda^* \Lambda \varphi = \Lambda^* f, \quad (4.3.26)$$

и сформулируем некоторый итерационный процесс. В частности, для этой цели используется метод сопряженных градиентов, не требующий априорного знания границ спектра  $\Lambda^* \Lambda$ .

Формулировкой метода последовательных приближений описание алгоритма не исчерпывается. Необходимо еще определить оптимальное число итераций  $k_0$ , которые приводят к максимально достижимой точности при заданных априорных условиях. Поскольку такое число может быть найдено не с очень большой точностью, будем полагать, что априорная оценка аппроксимации (4.3.22), полученная для модельной задачи, оказывается применимой и для задачи (4.3.1). Предположим поэтому, что

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| = \delta, \quad (4.3.27)$$

где  $\varphi$  – точное решение задачи (4.3.1) в узлах сетки,  $\varphi_\varepsilon$  – решение разностной задачи с регуляризирующим оператором. Тогда используемый итерационный процесс естественно продолжать до тех пор, пока ошибка итерационного процесса оказывается больше ошибки аппроксимации (4.3.27), и процесс следует закончить при равенстве этих ошибок. Алгоритмически это сделать наиболее просто следующим образом. Введем в рассмотрение вектор невязки  $\xi^k$  по формуле

$$\xi^k = \Lambda^*(\Lambda\varphi^k - f) = \Lambda^*\Lambda(\varphi^k - \varphi). \quad (4.3.28)$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\xi^k\| \leq \|\Lambda^*\Lambda\| \|\varphi^k - \varphi\|. \quad (4.3.29)$$

Очевидно, величина  $\|\varphi^k - \varphi\|$  должна быть эквивалентна величине  $\delta$ , что приводит к требованию

$$\|\xi^k\| \leq \delta \|\Lambda^*\Lambda\|. \quad (4.3.30)$$

Это означает, что вычислительный процесс следует продолжать до тех пор, пока норма невязки  $\|\xi^k\|$  не будет сравнима с величиной в правой части неравенства (4.3.30). Таким образом, приходим к параметрической оценке для  $k_0$ :

$$\|\xi^{k_0}\| \leq \beta(\Lambda^*\Lambda)\delta. \quad (4.3.31)$$

Как видно, решение обратных эволюционных задач требует большой подготовительной работы по изучению различных простых моделей, которые позволяют получать необходимую априорную информацию для конструирования качественного вычислительного алгоритма. В отдельных случаях возникают и более сложные ситуации. Однако проведенное рассмотрение дает представление о некоторых принципах формирования численных методов на основе изучения возникающих погрешностей и анализа алгоритма с помощью простых моделей. Нами обсуждена только одна точка зрения на процесс регуляризации, но и она уже дает представление о возможных подходах к численному решению обратных задач.

В заключение следует отметить, что изложенные методы и идеи могут быть также применимы к численному решению задачи Коши для уравнений эллиптического типа. Эти задачи в классическом смысле поставлены некорректно и для своего решения требуют привлечения методов, разработанных в теории условно корректных задач.

## **4.4. Постановка обратных задач на основе методов сопряженных уравнений и теории возмущений**

Постановки некоторых обратных задач на основе сопряженных функций и методов теории возмущений начинают играть все большую роль в формировании вычислительных алгоритмов, особенно при решении сложных задач математической физики, в которых априори трудно оценить влияние тех или иных факторов на решение задачи. Особое значение эти проблемы приобретают в планировании экспериментов с целью получения наиболее информативного набора функционалов.

Рассмотрим сначала некоторые вопросы линейной теории измерений.

В настоящее время теория измерений приобретает большое значение в организации информационной системы. Измерительная техника позволяет получить набор сведений (функционалов) о процессе, анализировать процесс и направлять его. С помощью таких функционалов интерпретируется физический процесс.

Мы не будем говорить об отдельных элементарных измерениях, таких как измерение напряжения, силы тока в отдельных участках электрической цепи и т. д. Нас будут интересовать только сложные физические явления и процессы, которые должны быть поняты и количественно оценены с требуемой точностью. Аналогичные задачи возникают постоянно, особенно в новых областях техники. К примеру, нельзя разработать методы измерений коэффициента размножения нейтронов в реакторе, если в деталях не ясен физический процесс ценной реакции и диффузии нейтронов, не известны уравнения, описывающие поведение ядерного реактора при измерении различных условий.

Несомненно, методы измерений и сами приборы существенно совершенствуются вместе с развитием теории физического процесса. Разработка теории и эксперимента, как правило, сопровождается созданием новых или усовершенствованных прежних методов измерений.

Возникает вопрос, нельзя ли в настоящее время сформулировать более или менее общий подход к методам измерения применительно к различным процессам с возможностью формального математиче-

ского описания алгоритма. Оказывается, такой подход можно сформулировать по крайней мере для задач с линейными операторами. В дальнейшем речь будет идти именно об этом классе задач.

Представляется, что основой теории измерений вариаций физических величин может служить теория возмущений. Суть дела состоит в следующем. Предположим, что мы изучаем сложный физический процесс с помощью прибора, имеющего определенные физические характеристики. Показания такого прибора связаны с исследуемым полем физической величины и являются функционалами поля. В большинстве случаев, однако, экспериментатора интересует не само поле физической величины, а отклонения от него под влиянием малых возмущений. Это значит, что измерения должны быть проведены с достаточной точностью, чтобы зарегистрировать указанные отклонения поля от некоторого «стандартного» состояния. Предположим, что это первое необходимое требование к прибору выполнено и мы располагаем измерениями отклонений показания прибора от нормы с требуемой точностью. Спрашивается, достаточно ли этой информации для удовлетворительной интерпретации эксперимента и можем ли мы с достаточной точностью восстановить информацию о возмущенном состоянии системы. К сожалению, на этот вопрос обычно дать ответ очень трудно. Объясняется это тем, что задачи восстановления информации о поле физической величины с помощью измерительных приборов являются, как правило, некорректно поставленными задачами математической физики.

Для того чтобы обойти эту принципиальную трудность обработки экспериментальных данных, необходимо с самого начала связать отклонения прибора непосредственно с отклонениями излучаемых физических параметров процесса. В этом случае ошибка в исследуемой характеристике будет прямо пропорциональна ошибке в отклонении показания прибора – вариации функционала, и, следовательно, при интерпретации мы используем максимальную информацию измерительного прибора. Именно с этих позиций мы приходим к излагаемой ниже теории, которая несколько повторит и расширит ранее приведенные рассмотрения.

Рассмотрим функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$A\varphi(x) = q(x), \quad (4.4.1)$$

где  $A$  – некоторый линейный оператор, а  $q(x)$  – распределение источников в среде. При этом под  $x$  будем понимать совокупность всех

переменных задачи (временная и пространственные координаты, энергия, направление скорости), считая, что функции  $\varphi$  и  $q$  являются действительными. Ради определенности будем полагать, например, что исследуемый процесс связан с диффузией или переносом субстанции, хотя выводы теории выходят далеко за рамки такого рода задач.

Введем гильбертово пространство вещественных функций  $H$  со скалярным произведением

$$(g, h) = \int g(x)h(x) dx, \quad (4.4.2)$$

где интегрирование ведется по всей области  $\Omega$  определения функций  $g$  и  $h$ . Будем считать, что  $D(A) \subset H$  – заданная область определения оператора  $A$  – множество функций, среди которых ищется решение задачи (4.4.1).

При решении тех или иных физических задач обычно нужно получить в результате значение некоторой величины, являющейся функционалом от  $\varphi(x)$ . Любая величина, являющаяся линейным непрерывным функционалом от  $\varphi(x)$ , может быть выражена в виде такого скалярного произведения. Например, если нас интересует результат измерения некоторого процесса в среде с характеристикой прибора  $\Sigma(x)$ , то это значение есть

$$J_{\Sigma}[\varphi] = \int \varphi(x)\Sigma(x) dx = (\varphi, \Sigma). \quad (4.4.3)$$

Таким образом, будем рассматривать физические величины, которые могут быть выражены в виде линейного непрерывного функционала от  $\varphi(x)$ :

$$J_p[\varphi] = (\varphi, p),$$

где величина  $p$  характеризует интересующий нас физический процесс. Как и раньше, введем вместе с оператором  $A$  сопряженный к нему оператор  $A^*$ , определяющийся из условия

$$(g, Ah) = (h, A^*g), \quad (4.4.4)$$

для любых функций  $g \in D(A)$  и  $h \in D(A^*)$ , где  $D(A)$  и  $D(A^*)$  – области определения операторов  $A$  и  $A^*$  соответственно. Наряду с основным уравнением (4.4.1) введем формально неоднородное сопряженное уравнение

$$A^*\varphi_p^* = p(x), \quad (4.4.5)$$

где  $p(x)$  – некоторая пока произвольная функция, а  $\varphi_p^* \in D(A^*)$ . Подставляя в формулу (4.4.4) вместо функций  $h$  и  $g$  решения уравнений (4.4.1) и (4.4.5)  $\varphi$  и

$$(\varphi_p^*, A\varphi) = (\varphi, A^*\varphi_p^*) \quad (4.4.6)$$

или, воспользовавшись уравнениями (4.4.1)–(4.4.5),

$$(\varphi_p^*, q) = (\varphi, p), \quad (4.4.7)$$

иначе говоря,

$$J_q[\varphi_p^*] = J_p[\varphi].$$

Поэтому функционал  $J_p[\varphi]$  мы можем получить двояко: либо решить уравнение (4.4.1) и определить эту величину по формуле

$$J_p[\varphi] = (\varphi, p), \quad (4.4.8)$$

либо решить уравнение (4.4.5) и определить ту же величину по формуле

$$J_p[\varphi] = J_q[\varphi_p^*] = (\varphi_p^*, q). \quad (4.4.9)$$

Следовательно, каждому линейному функционалу  $J_p[\varphi] = (\varphi, p)$  может быть поставлена в соответствие функция  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющая уравнению (4.4.5), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию  $p(x)$ , характеризующую интересующий нас процесс.

Пусть в среде имеется «источник единичной мощности», помещенный в точку  $x_0$ , т. е.

$$q(x) = \delta(x - x_0). \quad (4.4.10)$$

Так как<sup>7</sup>

$$(\varphi(x), \delta(x - x_0)) = \varphi(x_0), \quad (4.4.11)$$

то в этом случае

$$J_p[\varphi] = J_{q=\delta(x-x_0)}[\varphi_p^*] = \varphi_p^*(x_0). \quad (4.4.12)$$

Следовательно, сопряженная функция  $\varphi_p^*(x)$  описывает зависимость функционала  $J_p[\varphi] = (\varphi, p)$  от точки помещения источника единичной мощности.

---

<sup>7</sup>Строго говоря, соотношение (4.4.11) следует понимать в смысле теории обобщенных функций. Не вдаваясь в детали, мы будем предполагать, что функции  $\varphi \in D(A^*)$  достаточно гладкие и  $J_p[\varphi] = (\varphi, \delta(x - x_0)) = \varphi(x_0)$  есть линейный непрерывный функционал на  $D(A)$ .

Представим себе физическую систему (или прибор), в которой измеряется некоторая величина  $J_p[\varphi]$ , являющаяся линейным функционалом от решения, связанного, например, с плотностью частиц субстанции  $\varphi$ . Если в некоторую точку системы впустить определенное количество частиц (или, наоборот, извлечь из нее эти частицы), то измеряемое значение величины  $J_p[\varphi]$  будет соответственно увеличиваться (или уменьшаться), причем это изменение будет зависеть от той точки, в которой мы производим изменение числа частиц. Как видно из предыдущего, эта зависимость описывается сопряженной функцией  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющей уравнению (4.4.5). Следовательно, сопряженная функция  $\varphi_p^*(x)$  дает вклад частиц, находящихся в той или иной точке системы, в интересующий нас функционал  $J_p$ .

Как мы уже указывали ранее, толкование сопряженной функции  $\varphi_p^*(x)$  как ценности субстанции позволяет дать ясную трактовку и теории возмущений для любого функционала  $J_p[\varphi]$ . Действительно, если в элементе объема  $\Delta x$  около точки  $x$  мы изменим число частиц на величину  $\delta N$ , то соответствующее изменение величины  $J_p$  будет выражено следующим уравнением:

$$\delta J_p = \delta N \varphi_p^*(x). \quad (4.4.13)$$

Если в рассматриваемой системе произведены некоторые малые изменения параметров так, что оператор  $A$  переходит в оператор  $A + \delta A$ , то это соответствует изменению числа частиц в каждом элементе  $\Delta x$  на величину  $\delta N = -\Delta x \delta A \varphi$ . Общее изменение функционала  $J_p$  при таком изменении запишем в виде

$$\delta J_p = - \int \varphi_p^*(x) \delta A \varphi(x) dx. \quad (4.4.14)$$

Соотношение (4.4.13) позволяет измерять распределение функции ценности в системе, изменяя число частиц в разных точках  $x$  системы и измеряя при этом соответствующее изменение величины  $J_p$ . Введенное понятие ценности может быть полезным в теории различных измерительных приборов. Действительно, прибор обычно предназначен для измерения какой-либо одной величины  $J_p$ . Поэтому для каждого прибора может быть введена вполне определенная функция ценности  $\varphi_p^*(x)$ , которая может быть однажды измерена или сосчитана. Если распределение субстанции и ее ценности известны, то соотношение (19.14) может быть использовано для измерений двояким образом. Во-первых, измеряя величины  $\delta J_p$  при различных изменениях

параметров среды  $\delta A$ , мы можем при помощи соотношения (4.4.14) определять величины  $\delta A$ , если известна структура оператора  $A$ , но неизвестны входящие в него параметры, т. е. различные характеристики взаимодействия частиц с веществом. Например, таким образом можно измерить (по существу, так и делается) сечения взаимодействия нейтронов с веществом для различных образцов, помещая эти образцы в прибор и определяя  $\delta \Sigma = \delta A$  по изменению величины  $J_p$ . Во-вторых, соотношение (4.4.14) позволяет вводить поправки в измеряемую величину  $J_p$  за счет различных возмущающих факторов в приборе.

Приведенные выше формулы позволяют также получить теорему взаимности для функций Грина основного и сопряженного уравнений – соответственно  $G(x, x_0)$  и  $G^*(x, x_1)$ . Функция  $G(x, x_0)$  удовлетворяет уравнению (4.4.1) при  $q(x) = \delta(x - x_0)$ , а функция  $G^*(x, x_1)$  – уравнению (4.4.5) при  $p(x) = \delta(x - x_1)$ . Подставляя в формулу (4.4.7)

$$\varphi(x) = G(x, x_0), \quad \varphi_p^*(x) = G^*(x, x_1)$$

и приведенные выражения для  $q$  и  $p$ , получаем

$$G(x_1, x_0) = G^*(x_0, x_1), \quad (4.4.15)$$

что и является формулировкой теоремы взаимности.

Теперь несколько слов о теории возмущений для линейных функционалов. Если свойства среды, с которой взаимодействует поле, изменяются, т. е. если оператор уравнения (4.4.1) переходит в

$$A' = A + \delta A,$$

то изменяются и поле  $\varphi(x)$ , и значение функционала  $J_p[\varphi]$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x), \quad J_p[\varphi] \rightarrow J_p' = J_p + \delta J_p.$$

Установим связь между изменением оператора  $\delta A$  и изменением функционала  $\delta J_p$ . Возмущенная система описывается уравнением

$$A'\varphi' = (A + \delta A)\varphi' = q. \quad (4.4.16)$$

Сопряженная функция невозмущенной системы, соответствующая функционалу  $J_p$ , описывается уравнением

$$A^*\varphi_p^* = p. \quad (4.4.17)$$



Умножая скалярно уравнение (4.4.16) на  $\varphi^*$ , а уравнение (4.4.17) на  $\varphi'$ , вычитая одно из другого и пользуясь определением сопряженного оператора уравнения (4.4.4), получаем слева

$$(\varphi_p^*, A' \varphi') - (\varphi', A^* \varphi_p^*) = (\varphi_p^*, \delta A \varphi'), \quad (4.4.18)$$

а справа в соответствии с уравнением (4.4.7) будем иметь

$$(\varphi_p^*, q) - (\varphi', p) = J_p[\varphi] - J_p[\varphi'] = -\delta J_p. \quad (4.4.19)$$

Приравнявая выражения (4.4.18) и (4.4.19), получаем общее соотношение для приращения функционала

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta A \varphi'). \quad (4.4.20)$$

Если вместо уравнений (4.4.16) и (4.4.17) рассмотреть возмущенное сопряженное уравнение

$$(A^* + \delta A^*) \varphi_p^{*'} = p \quad (4.4.21)$$

и невозмущенное основное уравнение (4.4.1), то аналогичным путем можно получить также соотношение

$$\delta J_p = -(\varphi, \delta A^* \varphi_p^{*'}), \quad (4.4.22)$$

которое, конечно, эквивалентно соотношению (4.4.20).

Отметим важную особенность применения формул теории возмущений: так как эти формулы пишутся для вариации функционала, погрешность в которой обычно допустима в пределах нескольких процентов, то для вычисления указанных вариаций нет необходимости знать точные решения основной и сопряженной задач, достаточно воспользоваться их приближенными решениями.

Если возмущение оператора  $A$  (а следовательно, и  $A^*$ ) столь мало, что оно не очень сильно искажает функции  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$ , то в формулах (4.4.20) и (4.4.22) можно заменить приближенно  $\varphi'$  на  $\varphi$  и  $\varphi^{*'}$  на  $\varphi^*$ . При этом мы получим две эквивалентные друг другу формулы теории малых возмущений:

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta A \varphi), \quad (4.4.23)$$

$$\delta J_p = -(\varphi, \delta A^* \varphi_p^*). \quad (4.4.24)$$

Полученные формулы теории возмущений, кроме их прямого использования для оценки различных эффектов и для анализа измерений, могут иметь еще одно весьма важное применение.

При теоретическом рассмотрении и в практических расчетах часто пользуются методом замены исследуемой сложной системы упрощенной моделью. Необходимым условием такой замены является, очевидно, требование, чтобы она не приводила к изменению некоторых основных для рассматриваемого вопроса характеристик системы. Примером может служить замена в дифференциальных уравнениях переменных коэффициентов постоянными. К числу таких методов относится и метод эффективных граничных условий, заключающийся в замене истинных условий некоторыми упрощенными, но такими, которые приводят к правильному значению некоторого избранного функционала.

Полученные выше формулы теории возмущений позволяют сформулировать весьма общий подход к различным задачам. Пусть рассматриваемая система характеризуется оператором  $A$ , причем наиболее существенной величиной является функционал  $J_p[\varphi]$ . Если искомая простая модель характеризуется оператором  $A' = A + \delta A$ , то для того, чтобы величина  $J_p$  не изменялась при переходе от истинной системы к модели, необходимо выполнение условия

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, [A' - A]\varphi') = 0, \quad \text{т. е.} \quad (\varphi_p^*, A'\varphi') = (\varphi_p^*, A\varphi'). \quad (4.4.25)$$

Если мы интересуемся несколькими величинами  $J_{p_1}, J_{p_2}$  и т. д., то получим несколько условий типа (4.4.25) с решениями  $\varphi_{p_1}^*, \varphi_{p_2}^*$  и т. д.

Требование (4.4.25) не определяет однозначно искомой эквивалентной модели, но является ее необходимым условием и вместе с другими может помочь ее нахождению. В частности, если оператор модели  $A'$ , вид которого может быть найден из физических соображений, содержит один или несколько параметров, то условия (4.4.25) могут быть использованы для определения значений этих параметров.

Теперь переходим к численным методам решения обратных задач и проблеме планирования эксперимента. Предположим, что мы располагаем набором функционалов (измерений)  $J_{p_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ . Будем считать, что измерения по своему характеру разнообразны, например, измерение производится одним и тем же прибором в разных «точках» области определения решения или приборы регистрируют разные характеристики исследуемого явления. Ради простоты полагаем, что статистические погрешности в измерениях устранены и мы имеем дело уже с предварительно обработанной системой данных.

Каждому функционалу  $J_{p_i}$  поставим в соответствие функцию ценности для невозмущенной задачи, т. е. модели, в которой оператор  $A$

и область его определения считаются известными. Решим  $n$  различных задач

$$A^* \varphi_{p_i}^* = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.26)$$

Найдем заранее  $n$  функций ценности  $\varphi_{p_i}^*$  и решим одну основную задачу с модельным «невозмущенным» оператором  $A$ , сопряженным  $A^*$ :

$$A\varphi = q. \quad (4.4.27)$$

Будем считать, что  $\varphi \in D(A)$  и  $\varphi^* \in D(A^*)$ . Построим  $n$  формул теории малых возмущений:

$$(\varphi_{p_i}^*, \delta A \varphi) = -\delta J_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.28)$$

где  $\delta A$  – разность между изучаемым оператором  $A'$  и модельным  $A$ . Предположим, что оператор  $A$  известен:

$$A = \sum_{k=1}^m [\alpha_k A_k + B_k(\beta_k C_k)], \quad (4.4.29)$$

где  $A_k, B_k$  и  $C_k$  – элементарные линейные операторы, например, дифференцирования или интегрирования либо комбинации тех и других;  $\alpha_k(x)$  и  $\beta_k(x)$  – искомые коэффициенты, известные для невозмущенной (модельной) задачи.

Теперь нашей целью является восстановление коэффициентов  $\alpha'_k$  и  $\beta'_k$  в выражении

$$A' = \sum_{k=1}^m [\alpha'_k A_k + B_k(\beta'_k C_k)]. \quad (4.4.30)$$

С помощью выражений (4.4.29) и (4.4.30) получим

$$\delta A = \sum_{k=1}^m [\delta \alpha_k A_k + B_k(\delta \beta_k C_k)], \quad (4.4.31)$$

где

$$\delta \alpha_k = \alpha'_k - \alpha_k, \quad \delta \beta_k = \beta'_k - \beta_k.$$

Подставим (4.4.31) в (4.4.28). Тогда при соответствующих условиях приходим к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^m [(\varphi_{p_i}^*, \delta \alpha_k A_k \varphi) + (B_k^* \varphi_{p_i}^*, \delta \beta_k C_k \varphi)] = -\delta J_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.32)$$

Дальнейшая задача состоит в параметризации вариаций  $\delta\alpha_k$  и  $\delta\beta_k$ . Сначала рассмотрим простейший случай, когда  $\delta\beta_k = 0$ , а  $\delta\alpha_k$  – постоянные. В этих условиях (19.32) переходит в задачу линейной алгебры

$$\sum_{k=1}^m \delta\alpha_k (\varphi_{p_i}^*, A_k \varphi) = -\delta J_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.33)$$

Здесь  $(\varphi_{p_i}^*, A_k \varphi)$  – элементы матрицы, которые при заданных  $\varphi, \varphi_{p_i}$  и  $A_k$  могут быть рассчитаны.

Пусть  $y$  – вектор с компонентами  $\delta\alpha_k$ ,  $F$  – вектор с компонентами  $\delta J_{p_i}$  и  $a_{ik} = (\varphi_{p_i}^*, A_k \varphi)$  – элементы матрицы  $\Lambda$ . Тогда приходим к уравнению

$$\Lambda y = F. \quad (4.4.34)$$

Если число функционалов  $n$  равно числу определяемых вариаций коэффициентов  $\alpha_k$ , то система (4.4.34) в принципе позволяет найти  $\delta\alpha_k$ . Если число  $n$  больше  $m$ , то система (4.4.34) оказывается переопределенной, а ее решение (если оно существует) обычно находится с помощью метода наименьших квадратов в предположении, что  $y$  доставляет минимум квадратичному функционалу

$$\|\Lambda y - F\|^2 = \min. \quad (4.4.35)$$

Вектор  $y$ , минимизирующий этот функционал, иногда называют квазирешением уравнения (4.4.34).

Если  $\delta\alpha_k(x)$  и  $\delta\beta_k(x)$  – функции, то решение обратной задачи можно находить с помощью тех или иных методов параметризации, сущность которых состоит в следующем. Предположим, что на основании априорного анализа поведения физических параметров (обычно в результате статистического и корреляционного анализа) находятся некоторые полные ортогональные системы функций  $u_{k,l}(x)$  и  $v_{k,l}(x)$ , такие, что с их помощью возможно достаточно хорошее приближение к функциям  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  при малом числе  $n(k)$ , так что

$$\delta\alpha_k(x) = \sum_{l=1}^{n(k)} a_{k,l} u_{k,l}(x), \quad (4.4.36)$$

$$\delta\beta_k(x) = \sum_{l=1}^{n(k)} b_{k,l} v_{k,l}(x),$$

где  $a_{k,l}$  и  $b_{k,l}$  – коэффициенты, подлежащие определению. Подставив выражения (4.4.36) и (4.4.32), получим

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n(k)} [a_{k,l}(\varphi_{p_i}^*, u_{k,l} A_k \varphi) + b_{k,l}(B_k^* \varphi_{p_i}^*, v_{k,l} C_k \varphi)] = -\delta J_{p_1}, \quad (4.4.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Упорядочим теперь величины  $a_{k,l}$  и  $b_{k,l}$  и переобозначим их через  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Введем в рассмотрение матрицу  $\Lambda$  такую, что уравнение

$$\Lambda y = F$$

эквивалентно системе (4.4.37). Тогда мы снова приходим к задаче линейной алгебры, решая которую находим  $a_{k,l}$  и  $b_{k,l}$ , а следовательно,  $\delta\alpha_k$  и  $\delta\beta_k$ .

Мы рассмотрели только тот случай, когда решение модельной задачи близко к реальному, т. е. можно заменить  $\varphi'$  на  $\varphi$  и, таким образом, воспользоваться теорией малых возмущений. Если невозмущенное (модельное) состояние процесса существенно отличается от истинного, то рассмотренный выше алгоритм можно считать только первым приближением к решению обратной задачи. После того как вариации  $\delta\alpha_k$  и  $\delta\beta_k$  найдены, можно исправить коэффициенты  $\alpha_k, \beta_k$  и найти

$$\alpha'_k = \alpha_k + \delta\alpha_k, \quad \beta'_k = \beta_k + \delta\beta_k.$$

После этого необходимо решить «возмущенную» задачу

$$A' \varphi' = f \quad (4.4.38)$$

с оператором

$$A' = \sum_{k=1}^m [\alpha'_k A_k + B_k(\beta'_k C_k)],$$

перейти к новому приближению в решении обратной задачи, приняв вместо (4.4.32) более общую формулу возмущений

$$\sum_{k=1}^m [(\varphi_{p_i}^*, \delta\alpha_k A_k \varphi') + (B_k^* \varphi_{p_i}^*, \delta\beta_k C_k \varphi')] = -\delta J_p, \quad (4.4.39)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

и повторить цикл вычислений для уточнения вариаций  $\delta\alpha_k$ ,  $\delta\beta_k$ . Это мы будем называть вторым приближением в решении обратной задачи. Разумеется, указанный процесс может быть продолжен. Сходимость методов последовательных приближений может быть доказана с учетом конкретной информации об элементарных операторах задачи  $A_k$  и областей определения операторов  $D(A)$ ,  $D(A^*)$ .

Проиллюстрируем наш алгоритм на простом примере. Предположим, что рассматривается задача

$$-\frac{d}{dx}\beta(x)\frac{d\varphi'}{dx} + \alpha(x)\varphi' = f(x), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0, \quad (4.4.40)$$

с неизвестными коэффициентами  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , относительно которых делается априорное допущение. Предполагается, например, что они являются непрерывными функциями в области определения решения  $0 \leq x \leq 1$  и известны их приближенные значения  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$ , т. е.

$$\alpha(x) = \bar{\alpha} + \delta\alpha(x), \quad \beta(x) = \bar{\beta} + \delta\beta(x). \quad (4.4.41)$$

Если на основе априорной информации можно выбрать значения  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  в модели более точно, то не обязательно предполагать, что они равны постоянным  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$ .

Кроме того, на основе предварительного изучения делается вывод о возможности представления  $\delta\alpha(x)$  и  $\delta\beta(x)$  в виде конечных сумм:

$$\delta\alpha(x) = \sum_{l=1}^{n(1)} a_l u_l(x), \quad \delta\beta(x) = \sum_{l=1}^{n(1)} b_l v_l(x), \quad (4.4.42)$$

где  $\{v_l(x)\}$  и  $\{u_l(x)\}$  – некоторые полные ортонормированные системы функций (например, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра и т. д.).

Пусть  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  – характеристики измерений, так что в каждом из измерений регистрируется функционал

$$J'_{p_i}[\varphi'] = \int_0^1 p_i(x)\varphi'(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.43)$$

Функции  $p_i(x)$  можно назвать характеристиками прибора в данном измерении.

Введем в рассмотрение невозмущенную (модельную) задачу, соответствующую задаче (4.4.40):

$$-\frac{d}{dx}\bar{\beta}\frac{d\varphi}{dx} + \bar{\alpha}\varphi = f, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (4.4.44)$$

Наряду с задачей (4.4.44) сформулируем  $n$  сопряженных задач, соответствующих избранной модели

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\bar{\beta}\frac{d\varphi_{p_i}^*}{dx} + \bar{\alpha}\varphi_{p_i}^* &= p_i(x), \\ \varphi_{p_i}^*(0) &= \varphi_{p_i}^*(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

Согласно общей теории будем иметь

$$J'_{p_i}[\varphi] = \int_0^1 p_i(x)\varphi(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi_{p_i}^*(x) dx. \quad (4.4.46)$$

Предположим теперь, что модельные задачи (4.4.44), (4.4.45) решены. Далее находим вариации функционала  $\delta J_{p_i}$  по формуле

$$\delta J_{p_i} = J'_{p_i} - J_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.47)$$

где  $J'_{p_i}$  – измерение прибора с характеристикой  $p_i$ , соответствующее (4.4.43) (в котором  $\varphi'$  нам не известно);  $J_{p_i}$  – функционал, теоретически рассчитываемый на основе любого соотношения в (4.4.46). Здесь требуется такая точность в измерении, которая гарантировала бы расчет вариаций  $\delta J_{p_i}$ .

Рассмотрим теперь формулы теории малых возмущений (4.4.32):

$$A_k = E, \quad B_k = -\frac{d}{dx}, \quad C_k = -\frac{d}{dx}, \quad m = 1.$$

С учетом граничных условий для  $\varphi_{p_i}^*$  и  $\varphi$  получим

$$\int_0^1 \left( \delta\alpha\varphi\varphi_{p_i}^* + \delta\beta\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_{p_i}^*}{dx} \right) dx = -\delta J_{p_i}. \quad (4.4.48)$$

Подставив выражения для  $\delta\alpha(x)$  и  $\delta\beta(x)$  из (4.4.42) в (4.4.48), получим

$$\sum_{l=1}^{n(1)} \left( a_l \int_0^1 u_l \varphi \varphi_{p_i}^* dx + b_l \int_0^l v_l \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_{p_i}^*}{dx} dx \right) = -\delta J_{p_i}, \quad (4.4.49)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Если  $n = 2n(1)$ , то система уравнений (4.4.49) полностью определена. Решая эту систему, находим коэффициенты  $a_l, b_l$  и на основе представления (4.4.42) получаем первое приближение для величин  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Эти величины можно уточнять, используя метод последовательных приближений, рассмотренный выше. Точно так же могут быть поставлены и решены более сложные обратные задачи, и в том числе задача по определению возмущений  $\delta f$  в источниках.

Обсудим теперь проблему планирования сложного эксперимента. Ее можно сформулировать следующим образом. Среди всевозможного (практически реализуемого) набора измерений необходимо выбрать тот, который оказывается наиболее информативным с точки зрения решения конкретной обратной задачи по восстановлению требуемых характеристик среды (коэффициентов уравнений). В общем плане оптимизации эта задача оказывается очень сложной. Однако можно рассмотреть некоторые частные подходы к ее решению.

Допустим, что перед осуществлением эксперимента строится модель невозмущенной задачи, с ее помощью описываются линейные функционалы от решения и с учетом априорной информации о точности измерений делается вывод о необходимой точности измерения функционалов. Предположим, что необходимые требования к точности измерений функционалов  $\delta J_{p_i}$  обеспечены. Далее рассматриваются различные совокупности измерений и выбираются те из них, которые приводят к наилучшей обусловленности матрицы  $\Lambda$ . Полученная система линейных уравнений в этом случае хорошо решается, и такой план эксперимента является в известном смысле оптимальным из данной совокупности (конечно, здесь не рассматриваются экономические вопросы, оказывающиеся иногда решающими при планировании эксперимента). Если же при заданном наборе информативных функционалов, обеспечивающих наилучшую обусловленность матрицы  $\Lambda$ , не удастся реализовать высокие требования к точности измерений функционалов  $\delta J_{p_i}$ , то возникает более сложная задача о планировании эксперимента при заданных ограничениях на точность измерений, допустимых разрешением приборной техники. Это уже своеобразная задача на оптимизацию с ограничениями.



## 4.5. Формулировка теории возмущений для сложных нелинейных моделей

Обычно довольно непросто конструировать математическую модель, описывающую сложные процессы и явления. Такие модели должны учитывать, как правило, много различных эффектов, не все из которых описаны с требуемой точностью. Это значит, что в тот или иной момент времени мы используем ту или иную упрощенную математическую формулировку, которая позволяет нам описать лишь небольшое число характеристик процесса, абстрагируясь от многих, иногда очень важных деталей. Однако такие рассмотрения позволяют в общем описать физические процессы, как правило, с необходимой точностью. Что касается оценки влияния эффекта, не учтенного математической моделью, то она, как это было показано в § 4.4, может быть осуществлена с помощью специальным образом определенной теории возмущения.

В настоящем параграфе мы рассмотрим более или менее общий подход к конструированию математических моделей и их анализу.

Новым в этом параграфе, по сравнению с рассмотренными выше задачами, является переход от линейных процессов к процессам, описываемым нелинейными уравнениями. Мы покажем, что в известных приближениях нелинейные процессы также допускают для своего решения и анализа подходы, свойственные задачам линейным. Разумеется, такие подходы возможны на базе различных способов линеаризации.

Рассмотрим стационарный процесс, который описывается уравнением в следующей операторной форме:

$$A\varphi = f, \quad (4.5.1)$$

где  $A$  – матрично-дифференциальный оператор, зависящий от решения вектор-функции  $\varphi \in D(A)$  и входных данных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – функций координат;  $f$  является заданным вектором источников – функций координат и заданных параметров  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ . Следовательно,

$$A = A(\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad f = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m).$$

Пусть  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$  и  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m$  – данные, соответствующие некоторому стандартному состоянию системы. Это состояние будем

называть невозмущенным. Естественно, что невозмущенное состояние системы будет описываться уравнением

$$A(\bar{\varphi}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)\bar{\varphi} = f(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n). \quad (4.5.2)$$

Если принять обозначение

$$\bar{A} = A(\bar{\varphi}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)\bar{\varphi}, \quad \bar{f} = f(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n),$$

то уравнение (4.5.2) перепишется в виде

$$\bar{A}\bar{\varphi} = \bar{f}. \quad (4.5.3)$$

Мы предположим, что решение уравнения (4.5.3) нам известно.

Примем далее, что истинное состояние системы, или как мы будем в дальнейшем называть возмущенное состояние системы, описывается уравнением (4.5.1), входные данные которого мало отличаются от стандартных, т. е.

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \delta\alpha_i, \quad \beta_j = \bar{\beta}_j + \delta\beta_j,$$

где отклонения  $\delta\alpha_i$  и  $\delta\beta_j$  предполагаются в известном смысле малыми по сравнению с  $\bar{\alpha}_i$  и  $\bar{\beta}_j$  соответственно.

Тогда вместо (4.5.2) имеем

$$A(\bar{\varphi} + \delta\varphi, \bar{\alpha}_i + \delta\bar{\alpha}_i)(\bar{\varphi} + \delta\varphi) = f(\bar{\beta}_j + \delta\beta_j). \quad (4.5.4)$$

Здесь используется следующее представление:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi.$$

Априори предположим, что  $\delta\varphi$  «много меньше»  $\bar{\varphi}$ . В представлении достаточной гладкости оператора  $A$ , решения  $\varphi$  и входных данных рассмотрим разложения

$$A(\bar{\varphi} + \delta\varphi, \bar{\alpha}_i + \delta\bar{\alpha}_i) = \bar{A} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_i} \delta\alpha_i + \dots, \quad (4.5.5)$$

$$f(\bar{\beta}_j + \delta\beta_j) = \bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \beta_j} \delta\beta_j.$$

Подставляя (4.5.5) в (4.5.4) и ограничиваясь членами первого порядка, получаем<sup>8</sup>

$$\bar{A}\bar{\varphi} + \left( \bar{A} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} \bar{\varphi} \right) \delta \varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i = \bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j. \quad (4.5.6)$$

Используя уравнение (4.5.3), имеем

$$\left( \bar{A} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} \bar{\varphi} \right) \delta \varphi = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i. \quad (4.5.7)$$

Это – основное уравнение для определения малых отклонений решения  $\varphi$  от невозмущенного состояния.

Мы предположим теперь, что оператор невозмущенного состояния  $\bar{A}$  и источник  $\bar{f}$  известны с ограниченной точностью, т. е.

$$\bar{A} = \bar{\Lambda} + \varepsilon, \quad \bar{f} = \bar{F} + \xi. \quad (4.5.8)$$

Здесь  $\varepsilon$  – оператор ошибки модели

$$\varepsilon = \bar{A} - \bar{\Lambda}$$

и  $\xi$  – ошибка вектор-функции источников

$$\xi = \bar{f} - \bar{F}.$$

Пусть

$$\|\bar{A}\| \gg \|\varepsilon\|, \quad \|\bar{f}\| \gg \|\xi\|. \quad (4.5.9)$$

Здесь нормы оператора и вектор-функции определены в соответствующих метрических пространствах.

Подставляя (4.5.8) в (4.5.7), имеем

$$\left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \varphi} \bar{\varphi} \right) \delta \varphi = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i + \eta, \quad (4.5.10)$$

где

$$\eta = \frac{\partial \xi}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i - \left( \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \bar{\varphi} \right) \delta \varphi. \quad (4.5.11)$$

---

<sup>8</sup>Здесь и далее предполагается, что  $\left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} \delta \varphi \right) \bar{\varphi} = \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} \delta \varphi \right) \delta \varphi$ , где  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi}$  – производная Гато от оператора  $A$  в точке  $\bar{\varphi}$  (см. гл. 3).

В предположении (4.5.9) уравнение (4.5.10) можно переписать в виде

$$\left(\bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \varphi} \bar{\varphi}\right) \delta \varphi = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i + O(\|\varepsilon\| + \|\xi\|).$$

Следовательно, с точностью до малых величин имеем

$$\left(\bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \varphi} \bar{\varphi}\right) \delta \varphi = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i. \quad (4.5.12)$$

Уравнение (4.5.12) есть модель для вычисления отклонения от невозмущенного состояния системы при изменении входных данных на величины  $\delta \alpha_i$  и  $\delta \beta_j$ .

Введем следующие обозначения:

$$L = \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \varphi} \bar{\varphi}, \quad \delta F = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \beta_j} \delta \beta_j - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \alpha_i} \bar{\varphi} \delta \alpha_i. \quad (4.5.13)$$

Тогда окончательно имеем

$$L \delta \varphi = \delta F, \quad (4.5.14)$$

и формальное решение этой задачи записывается в виде

$$\varphi = L^{-1} \delta F. \quad (4.5.15)$$

Формула (4.5.15) в теории возмущений наиболее удобна для случая, когда необходимо определить отклонения решения только для одного набора вводных данных. При планировании направленных изменений состояния модели весьма важно бывает сделать серию тестовых вычислений. Мы должны принимать во внимание тот факт, что для оценки чувствительности модели на изменение различных параметров или для получения оптимального соотношения между параметрами нужно иметь большое число различных решений. Следовательно, нам необходимо попытаться построить более универсальные теории возмущений для функционалов, которые позволят нам всесторонне изучить математическую модель при изменении входных данных.

Вместе с основным уравнением

$$L \delta \varphi = \delta F, \quad (4.5.16)$$

так же как и в линейном случае, введем сопряженное уравнение

$$L^* \varphi^* = p, \quad (4.5.17)$$

где  $L$  и  $L^*$  – операторы, сопряженные в смысле Лагранжа:

$$(Lg, h) = (g, L^*h). \quad (4.5.18)$$

Здесь  $g$  и  $h$  – элементы гильбертова пространства из области определения операторов  $L$  и  $L^*$  соответственно. Функцию  $p$  пока будем предполагать неопределенной.

Умножим скалярно (4.5.16) и (4.5.17) на  $\varphi^*$  и  $\delta\varphi$  соответственно и вычтем результаты один из другого. Тогда получаем

$$(L\delta\varphi, \varphi^*) - (\delta\varphi, L^*\varphi^*) = (\delta F, \varphi^*) - (\delta\varphi, p). \quad (4.5.19)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (4.5.19) с учетом (4.5.18), равно нулю. Следовательно,

$$(\delta\varphi, p) = (\delta F, \varphi^*). \quad (4.5.20)$$

Рассмотрим теперь набор линейных функционалов

$$\delta J_n = (\delta\varphi, p_n). \quad (4.5.21)$$

Если, в частности,  $p_n = \delta(x - x_n)$ , то

$$\delta J_n = \delta\varphi(x_n). \quad (4.5.22)$$

Функцию  $\varphi^*$ , соответствующую  $p_n$ , будем обозначать через  $\varphi_n^*$ .

Таким образом, на основе равенства (4.5.20) будем иметь набор функционалов

$$\delta J_n = (\delta F, \varphi_n^*). \quad (4.5.23)$$

Предположим, что мы заранее выбрали  $N$  функционалов  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , а также соответственно решили  $N$  сопряженных задач

$$L^* \varphi_n^* = p_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5.24)$$

Из (4.5.23) следует, что нет необходимости вычислять вариации  $\delta\varphi$ , соответствующие различным наборам параметров  $\delta\alpha_i$  и  $\delta\beta_j$ , поскольку, задавая  $\varphi_n^*(n = 1, 2, \dots, N)$ , можно непосредственно вычислять значения функционалов  $\delta J_n$  при любых возмущениях во входных данных.

## **Часть II**

# **Глобальные проблемы окружающей среды и методы оптимизации на основе сопряженных уравнений**

Количество сложных проблем, которые могут быть исследованы с помощью аппарата сопряженных уравнений, изложенного в части I монографии, поистине огромно. Это проблемы и квантовой механики, и ядерной энергетики, и нелинейных кинетических процессов в химии и многое другое.

Однако в настоящей части книги мы подробно обсудим лишь проблемы окружающей среды и климата. Они взаимосвязаны и становятся центральными для жизни на Земле.

Первая проблема – это окружающая среда и ее охрана. Для того чтобы «охранять», надо познать процессы диффузии и распространения субстанции в реальной атмосфере с реальными выбросами загрязняющих субстанций, которые в течение дальнейшей миграции в атмосфере превращаются из невредных компонентов во вредные или, наоборот, обычно загрязняя и океаны, и континенты. Необходимо составить полную систему кинетики этих процессов.

Эти вопросы были в центре нашего внимания в течение многих лет. Была выдвинута концепция, которая состоит в следующем: поскольку мир будет непрерывно совершенствоваться, а цивилизация будет развиваться, необходимо знать заранее, всевозрастающую индустриальную мощь, порождаемую цивилизацией, сочетать с проблемами сохранения природы, окружающей среды. Концепция связана с тем, что,

приступая к выполнению любого проекта, надо прежде всего предвычислить те изменения в окружающей среде, которые будут связаны с его осуществлением. Надо уже сейчас делать необходимые капиталовложения, чтобы не только компенсировать утрачиваемые в природе ценности и ресурсы, но и облагораживать ее, улучшая окружающую среду. Конечно, это потребует больших затрат. Но проблема настолько важная, что требуемые глобальные усилия будут оправданы. В самом деле, о запрещении ядерного оружия можно договориться вообще. И еще как можно быстрее нужно договориться о сохранении той экосистемы, с помощью которой поддерживается жизнь на Земле. Поэтому этот вопрос становится общечеловеческим. Такие вопросы уже прорабатываются в мировом научном сообществе. Организация Объединенных Наций призывает даже создать соглашения об использовании природы всех стран в интересах всего человечества. Природа каждой страны, ее экологические компоненты являются составной частью достояния всего человечества. И, когда это будет понято всеми, могут появиться действенные методы для решения упомянутых проблем. Они позволят и развивать цивилизацию, и сохранять и приумножать природные богатства.

Именно для решения этих вопросов создаются математический аппарат и имитационные модели. Большие возможности здесь дают и сопряженные уравнения, рассматриваемые в настоящей монографии, с помощью которых можно оценить степень воздействия загрязняющих субстанций на биосферу и изменение экологического режима планеты в целом. Фактически ученые уже подготовили математический аппарат для имитационных расчетов и в локальном, и в глобальном плане. Сейчас задача состоит в том, чтобы с помощью исследований показать адекватность этих моделей в системе измерений ресурсов планеты под влиянием человеческой деятельности.

Вторая проблема – взаимодействие атмосферы и океана. Постепенно приближаясь к постановке задач взаимодействия атмосферы и океана, исследователи постепенно накапливали знания о динамике атмосферы и динамике океана как двух более или менее независимых систем. В дальнейшем по мере накопления знаний об этих системах использовался и новый математический аппарат, с помощью которого оказалось возможным более детальное описание сложных процессов. Далее произошел переход с помощью использования электронно-вычислительной техники от простых моделей к сложным моделям гидротермодинамики этих двух систем, который завершился

созданием моделей взаимодействия атмосферы и океана. Ключ к решению проблемы изменения климата на нашей планете находится именно на фоне взаимодействия двух систем. В свое время автором была предложена модель взаимодействия атмосферы и океана с учетом особенностей этой сложнейшей системы. Смысл ее состоит в следующем.

Нагретые в экваториальных зонах Атлантики, в районе Карибского бассейна, воды с помощью течения Гольфстрим транспортируются в северные широты Атлантики, в район Исландии. Они там соседствуют с холодными водами и, перемешиваясь, представляют собой вертикально неустойчивую систему. Возникает механизм передачи мощного потока тепла, запасенного в экваториальных водах, в атмосферу северных районов Атлантики. Прогретые океанскими водами воздушные массы в этой области океана, соседствуя с полярными холодными воздушными течениями, образуют гидротермодинамически сильно неустойчивую систему. Для разрешения появляющихся неустойчивостей в этой области возникают циклоны и антициклоны, которые под влиянием планетарного западно-восточного переноса направляют эти атмосферные образования, а с ними запасы тепла и влаги на Европу и Азиатский континент.

То же самое происходит и в Тихом океане. Там действует та же схема. Но главным инструментом передачи энергии уже является течение Куроисио. А областью, где освобождается тепло, запасенное этим течением в Южно-Китайском море, является акватория районов Тихого океана вблизи Алеутских островов. Там циклоническая деятельность направлена на Северо-Американский континент.

Оказалось, что интенсивность циклональной глобальной деятельности существенно зависит от того, сколько тепловой энергии накопят Гольфстрим и Куроисио в зонах своего формирования.

Эта модель дала возможность перейти к формированию концепции так называемых энергоактивных зон в океане. На базе этой концепции был создан национальный проект СССР, который осуществлялся с 1981 г. Он изучал те зоны океана, в которых наиболее существенно происходят его взаимодействия с атмосферой. Мы надеемся, что дальнейшее развитие эксперимента с крупными динамическими факторами, которые происходят в атмосфере, в системе океан – континент, позволят подойти к решению задачи об изменении климата. Представляется, что эта проблема будет все более значимой. И к этому имеются все возможности – электронные машины, спутниковые



наблюдения, исследовательские корабли и большой интерес ученых всех стран к познанию глобальных проблем. Эти исследования, по существу, становятся международными.

Имея в виду все возрастающее значение спутниковых измерений характеристик атмосферы, океана и всей окружающей среды, автор считал возможным поместить в монографии свои исследования по применению сопряженных задач для уравнений переноса излучения, на основе которых наиболее корректно ставятся обратные задачи по восстановлению параметров атмосферы и подстилающей поверхности. Эти постановки должны прийти на смену простейшим моделям, которые применяются в настоящее время и основаны на анализе так называемых функций пропускания.

В заключение настоящей части книги мы включили главу 8, посвященную решению обратных задач спутниковой метеорологии на основе как основных, так и сопряженных уравнений. Проблемы этого плана носят глобальный характер, и их бурное развитие в связи с космическими исследованиями уже начались. Нет сомнения, что слежение за Землей как за планетой, ее ресурсами, состоянием атмосферы, океана и континентов в равной степени потребуются и для целей охраны окружающей среды и геофизического мониторинга, и для целей анализа климата и его изменений.

Хотелось бы призвать к тому, чтобы эти проблемы еще больше всесторонне развивались. Они очень трудны, экономически дороги, но на этом экономить человечество не может. Исправление наших экологических ошибок станет во много раз дороже, а иногда их исправить вообще будет просто невозможно. Поэтому мы имеем дело с большой наукой о глобальных процессах, которая все более становится всеобщей как по проблемам, так и по последствиям для жизни на нашей планете. Эта проблема должна объединить всех людей на Земле.

В заключение отметим, что строгий математический анализ постановок задач в рассматриваемых глобальных проблемах мы будем затрагивать лишь в минимальной форме, концентрируя все внимание на их алгоритмических аспектах. Читатель, пользуясь исследованиями части I книги, без труда может провести необходимые исследования. С этой целью необходимо ввести в рассмотрение соответствующие пространства функций, дать их подробное описание, имея в виду, чтобы все используемые для построения алгоритмы имели смысл и были полностью обоснованы.

## Глава 5

# Анализ математических моделей в проблеме окружающей среды

Окружающая среда, ее состояние и борьба с загрязнением становятся едва ли не центральной проблемой науки, поскольку жизнеобеспечение на планете в целом и в ее отдельных районах является практической задачей деятельности людей. Индустриальные выбросы загрязняющих субстанций в атмосферу и океан становятся столь значительными, что они оказывают отрицательное воздействие на экологию больших промышленных зон и начинают воздействовать на глобальные процессы через изменения радиационного баланса Земли в связи с повышением концентрации углекислого газа, других аэрозолей и состоянием озонового слоя атмосферы. Более значительные изменения экологических процессов наблюдаются в промышленных регионах за счет вредных выбросов и образования «кислотных дождей».

Перенос загрязняющих субстанций в атмосфере осуществляется ветровыми потоками воздуха с учетом их мелкомасштабных флуктуаций. Осредненный поток субстанций, переносимый воздушными массами, как правило, имеет адвективную и конвективную составляющие, а осредненные флуктуационные их движения можно интерпретировать как диффузию на фоне основного осредненного движения.

В настоящей главе будут рассмотрены различные модели переноса и диффузии субстанций, основные и сопряженные уравнения, изло-

жены подходы к теории возмущений и решению обратных задач, возникающих как при формулировке моделей, так и при решении практических задач по минимизации загрязнений.

## 5.1. Уравнение переноса примесей в атмосфере. Единственность решения

Пусть  $\varphi(x, y, z, t)$  – интенсивность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Решение задачи определим в цилиндрической области  $G$  с поверхностью  $S$ , состоящей из боковой поверхности цилиндра  $\Sigma$ , нижнего основания  $\Sigma_0$  (при  $z = 0$ ) и верхнего основания  $\Sigma_H$  (при  $z = H$ ). Если  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \omega\mathbf{k}$ , (где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы в направлении осей  $x, y, z$ ), то перенос субстанции вдоль траектории частиц воздуха с сохранением ее интенсивности запишется простейшим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5.1.1)$$

Поскольку для нижней части атмосферы с хорошей точностью выполняется закон сохранения массы, выраженный уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (5.1.2)$$

то в результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi = 0. \quad (5.1.3)$$

В дальнейшем, если это не оговорено особо, будем считать, что  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Кроме того, будем предполагать, что

$$\omega = 0 \text{ при } z = 0, z = H. \quad (5.1.4)$$

При выводе (5.1.3) мы воспользовались тождеством, имеющим место при условии дифференцируемости функции  $\varphi$  и  $\mathbf{u}$ :

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi - \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (5.1.5)$$

С учетом (5.1.2) последний член в равенстве (5.1.5) обращается в нуль, и оно принимает вид

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi. \quad (5.1.5')$$

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать это важное соотношение.

К уравнению (5.1.3) присоединим начальные данные

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0 \quad (5.1.6)$$

и условия на границе  $S$  области  $G$

$$\varphi = \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0, \quad (5.1.7)$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi_s$  – заданные функции;  $u_n$  – проекция вектора  $\mathbf{u}$  на внешнюю нормаль к поверхности  $S$ . Соотношение (5.1.7) задает решение на той части  $S$ , где воздушные массы вместе с исследуемой субстанцией «втекают» в область  $G$ . Точное решение задачи (5.1.3) возможно в том случае, когда известны значения функций  $u$ ,  $v$  и  $\omega$  в пространстве и во все моменты времени. Если же информации о компонентах вектора скорости недостаточно, то в этом случае удобно пользоваться различными приближениями, о которых речь пойдет ниже.

Уравнение (5.1.3) может быть обобщено. Так, если в процессе распространения часть субстанции входит в реакцию с внешней средой или распадается, то этот процесс можно интерпретировать как поглощение субстанции пропорционально величине  $\sigma$ . В этом случае уравнение (5.1.3) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = 0, \quad (5.1.8)$$

где  $\sigma \geq 0$  – величина, обратно пропорциональная времени. Смысл этой величины будет особенно понятен, если в (5.1.8) положить  $u = v = \omega = 0$ . Тогда (5.1.8) переходит в уравнение  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi = 0$ , решением которого будет функция  $\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t}$ . Отсюда видно, что  $\sigma$  есть величина, обратная интервалу времени, за который интенсивность субстанции по сравнению с начальной интенсивностью уменьшится в  $e$  раз.

Если в области определения решения имеются источники рассматриваемой загрязняющей субстанции  $\varphi$ , описываемые функцией  $f(x, y, z, t)$ , то уравнение (5.1.8) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = f. \quad (5.1.9)$$

Переходим теперь к исследованию постановки задачи и связанных с уравнением (5.1.9) условий. Умножим это уравнение на  $\varphi$  и результат проинтегрируем по времени на интервале  $0 \leq t \leq T$  и по пространству в области  $G$ . Получим тождество

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\varphi^2}{2} dG \Big|_{t=T} - \int_G \frac{\varphi^2}{2} dG \Big|_{t=0} + \int_0^T dt \int_G \operatorname{div} \frac{\mathbf{u} \varphi^2}{2} dG + \\ + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \int_0^T dt \int_G f \varphi dG. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

По формуле Остроградского – Гаусса имеем

$$\int_G \operatorname{div} \frac{u_n \varphi^2}{2} dG = \int_S \frac{u_n \varphi^2}{2} dS. \quad (5.1.11)$$

Заметим, что в силу (5.1.4)  $u_n$  при  $z = 0$ ,  $z = H$  обращается в нуль, поэтому в (5.1.11) интегрирование по  $S$  можно заменить интегрированием по боковой поверхности  $\Sigma$ . Однако ради общности мы сохраним здесь обозначение  $S$ , поскольку имеет место условие (5.1.4). Полагая

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &= \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0, \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi_s$  – заданные функции, и подставляя эти функции в (5.1.10), получаем тождество

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\varphi_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \\ = \int_G \frac{\varphi_0^2}{2} dG - \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^- \varphi^2}{2} dS + \int_0^T dt \int_G f \varphi dG, \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

где

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & u_n > 0, \\ 0, & u_n < 0; \end{cases}$$

$$u_n^- = u_n - u_n^+.$$

Тождество (5.1.13) будет основным при исследовании единственности решения задачи (5.1.9), (5.1.12). В самом деле, предположим, что уравнениям (5.1.9) и одним и тем же условиям (5.1.12) удовлетворяют два разных решения задачи – пусть это будут  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Для их разности  $\omega = \varphi_1 - \varphi_2$  получим задачу

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \omega + \sigma \omega = 0, \quad (5.1.14)$$

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \text{ при } t = 0, \\ \omega &= 0 \text{ на } S \text{ при } u_n < 0. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Для функции  $\omega$  множество (5.1.13) примет вид

$$\int_G \frac{\omega_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \omega^2}{2} dS + \sigma \int_0^T dt \int_G \omega^2 dG = 0. \quad (5.1.16)$$

Поскольку все члены (5.1.16) при  $\omega \neq 0$  положительны, то это выражение равно нулю, только если  $\omega = 0$ , т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Таким образом, единственность решения доказана.

Естественно, что это заключение имеет место, если все операции и преобразования, использованные в процессе доказательства, законны. Нетрудно видеть, что для этого достаточно предположить дифференцируемость решения задачи  $\varphi$ , функций  $u, v, \omega$  и существование интегралов в (5.1.13).

Итак, задача

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = 0, \quad (5.1.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &= \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0, \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

имеет единственное решение в классе функций  $\varphi(x, y, z, t)$ , непрерывно дифференцируемых по всем переменным, с непрерывными начальными данными  $\varphi_0(x, y, z)$ , граничными условиями  $\varphi_s(x, y, z, t)$  и непрерывными и дифференцируемыми коэффициентами  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ,

удовлетворяющими условию  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , и кусочно-непрерывной функцией  $\sigma$ . В дальнейшем будем предполагать, что все эти условия выполнены.

Уравнение (5.1.17) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \quad (5.1.19)$$

где  $A\varphi = \operatorname{div} \mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi$ . Можно считать, что оператор  $A$  действует в вещественном гильбертовом пространстве  $L_2(G)$  с областью определения  $D(A)$ , которая является множеством непрерывно дифференцируемых по  $x, y, z$  функций.

## 5.2. Стационарное уравнение распространения субстанций

Перейдем теперь к описанию стационарного процесса распространения субстанций. Если коэффициенты уравнений  $u, v$  и  $\omega$  вместе с другими входными данными задачи  $f$  и  $\varphi_s$  не зависят от времени, то стационарная задача, соответствующая (5.1.17), (5.1.18), формулируется весьма просто:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi = f, \quad (5.2.1)$$

$$\varphi = \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0. \quad (5.2.2)$$

Как нетрудно убедиться, тождество, соответствующее (5.1.13), имеет вид

$$\int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \sigma \int_G \varphi^2 dG = - \int_S \frac{u_n^- \varphi^2}{2} dS + \int_G f \varphi dG. \quad (5.2.3)$$

Методом, изложенным в § 5.1, можно показать, что задача (5.2.1), (5.2.2) имеет единственное решение.

Итак, задача (5.2.1), (5.2.2) описывает частный процесс переноса субстанций с неизменными во времени входными данными. Однако набор таких частных решений, соответствующих различным стационарным входным данным задачи  $\mathbf{u}, f, \varphi_s$ , может использоваться и при описании более сложных физических ситуаций, реализуемых на практике. Чтобы это показать, предположим, что в различные периоды

времени в атмосфере в данном регионе реализуются те или иные типы движений воздушных масс, которые за период характерного времени существования можно считать стационарными. После каждого такого периода происходит перестройка движения воздушных масс и наступает новое стационарное состояние. Поскольку перестройка циркуляций происходит за период намного короче времени существования данного типа движений, то можно предположить, что перемена типов движений происходит мгновенно. Пусть этих типов будет  $n$ . Таким образом, мы приходим к системе независимых уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i \varphi_i + \sigma \varphi_i = f, \quad (5.2.4)$$

$$\varphi_i = \varphi_{is} \text{ на } S \text{ при } u_{in} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2.5)$$

Задача (5.2.4), (5.2.5), где  $\varphi_{is}$  – значение функции  $\varphi_i$  на границе  $S$ ;  $u_{in}$  – проекция вектора скорости ветра  $i$ -го типа на внешнюю нормаль к границе, соответствует каждому из интервалов  $t_i < t < t_{i+1}$ , длина которого равна  $\Delta t_i$ .

Предположим, что все задачи (5.2.4), (5.2.5) решены. Тогда решение задачи о среднем за период  $T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$  распределении примеси найдем в виде линейной комбинации

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i. \quad (5.2.6)$$

Задачу (5.2.4)–(5.2.6) можно назвать статистической моделью.

Решение стационарных задач вида (5.2.1), (5.2.2) и (5.2.4), (5.2.5) имеет много общего с решением задачи о среднем за некоторый период времени  $T$  распределении субстанции на основе специальным образом поставленных нестационарных задач. В самом деле, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = f, \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0, \\ \varphi(\mathbf{r}, T) &= \varphi(\mathbf{r}, 0), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in G. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Функции  $\mathbf{u}$  и  $\varphi_s$ , как и в (5.2.1), (5.2.2), будем считать не зависящими от  $t$ .

Единственность решения задачи (5.2.7), (5.2.8) при соответствующих предположениях о гладкости функций устанавливается так же, как в § 5.1.



Интегрируя уравнение (5.2.7) в пределах  $[0, T]$ , получаем уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \bar{\varphi} + \sigma \bar{\varphi} = f, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt, \quad (5.2.9)$$

из которого в силу единственности решения задачи (5.2.1), (5.2.2) следует, что среднее за период  $T$  решение задачи (5.2.7), (5.2.8) совпадает с решением задачи (5.2.1), (5.2.2).

Рассмотрим более сложный случай. Пусть достаточно гладкая на  $[0, T]$  функция  $u$  на каждом из интервалов  $t_i + \tau \leq t \leq t_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) не зависит от времени и совпадает с  $\mathbf{u}_i$  из (5.2.4). Время перестройки циркуляции  $\tau$  будем считать много меньшим времени  $\Delta t_i$ , т. е.

$$\tau \ll \Delta t_i. \quad (5.2.10)$$

Решим нестационарную задачу (5.2.7), (5.2.8), соответствующую определенному вектору  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = f, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.2.11)$$

$$\varphi = \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_n < 0, \quad (5.2.12)$$

где  $\varphi_s$  связано с  $\varphi_{is}$  из (5.2.5) так же, как и  $\mathbf{u}$  с  $\mathbf{u}_i$  из (5.2.4). Предположим далее, что  $\mathbf{u}$  и  $\varphi_s$  – периодические по времени функции с периодом  $T$ , равным году. Задачу (5.2.11), (5.2.12) рассмотрим при условии

$$\varphi(\mathbf{r}, T) = \varphi(\mathbf{r}, 0), \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (5.2.13)$$

Тогда решив задачу (5.2.11)–(5.2.13), построим среднегодовое распределение субстанции в виде

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt. \quad (5.2.14)$$

Нетрудно видеть, что имеется довольно тесная связь постановки нестационарной задачи (5.2.11)–(5.2.13) с рассмотренной выше задачей (5.2.4), (5.2.5).

Рассмотрим в интервале  $[t_i + \tau, t_{i+1}]$  уравнение (5.2.11):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}_i \varphi + \sigma \varphi = f \quad (5.2.15)$$

с условием (5.2.12):

$$\varphi = \varphi_s \text{ на } S \text{ при } u_{in} < 0. \quad (5.2.16)$$

Пусть в момент времени  $t = t_i + \tau$  функция  $\varphi$  принимает значение

$$\varphi(t_i + \tau) = \varphi^0. \quad (5.2.17)$$

Обозначим через  $\omega_i$  функцию вида

$$\omega_i = \varphi - \varphi_i, \quad (5.2.18)$$

где  $\varphi_i$  – решение задачи (5.2.4), (5.2.5). Эта функция для  $t \in [t_i + \tau, t_{i+1}]$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}_i \omega_i + \sigma \omega_i &= 0, \\ \omega_i &= 0 \text{ на } S \text{ при } u_{in} < 0, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$\omega_i(t_i + \tau) = \varphi^0 - \varphi_i.$$

Умножим первое уравнение из (5.2.19) на  $\omega_i$  и результат проинтегрируем по области  $G$ . В итоге получим

$$\|\omega_i\| \left( \frac{d}{dt} \|\omega_i\| + \sigma \|\omega_i\| \right) + \int_S \frac{\omega_i^2 u_{in}^+}{2} dS = 0, \quad (5.2.20)$$

где  $\|\omega\| = \left( \int_G \omega^2 dG \right)^{\frac{1}{2}}$ . Из (5.2.20) следует неравенство

$$\|\omega_i\| \leq \exp\{-\sigma(t - t_i - \tau)\} \|\varphi^0 - \varphi_i\|. \quad (5.2.21)$$

Таким образом, решение задачи (5.2.11)–(5.2.13) на каждом из интервалов  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ , начиная с некоторого момента времени, может достаточно мало отличаться от решения соответствующей задачи (5.2.4), (5.2.5). В целом степень отличия этих функций существенно зависит от величины  $\Delta t_i$ . Для рассматриваемого класса задач естественна такая величина  $\Delta t_i (i = 1, \dots, n)$ , что бы интервал, на котором функции  $\varphi$  и  $\varphi_i$  различаются незначительно, существенно превосходил его дополнение до  $\Delta t_i$ . Учитывая это обстоятельство, введем

в рассмотрение величину  $\varepsilon$  и будем считать распределения плотностей  $\varphi^1$  и  $\varphi^2$  загрязняющей субстанции совпадающими, если

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\| \leq \varepsilon. \quad (5.2.22)$$

Обозначим через  $\tau_i$  время, необходимое для установления в смысле определения (5.2.22) процесса распространения субстанции  $\varphi$  на интервале  $t_i + \tau \leq t \leq t_{i+1}$ . Тогда

$$\tau_i = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\|\varphi^0 - \varphi_i\|}{\varepsilon} \ll \Delta t_i. \quad (5.2.23)$$

Действуя аналогично изложенному выше, с учетом неравенства (5.2.21) получаем оценку для функции  $\varphi$  в интервале  $t_i \leq t \leq t_i + \tau$ :

$$\|\varphi\| \leq e^{-\sigma(t-t_i)}(\|\varphi_{i-1}\| + \varepsilon) + \frac{\|f\|}{\sigma}(1 - e^{-\sigma(t-t_i)}). \quad (5.2.24)$$

Рассмотрим среднегодовое значение субстанции  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i+\tau+\tau_i}^{t_{i+1}} \omega_i dt - \\ &\quad - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau + \tau_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+\tau+\tau_i} \varphi dt. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Отсюда в силу соотношений (5.2.21)–(5.2.24) следует, что разность между осредненными по интервалу  $[0, T]$  решениями задач (5.2.4), (5.2.5) и (5.2.11)–(5.2.13) удовлетворяет неравенству

$$\|\bar{\varphi} - \tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon + (\varepsilon + 3\|f\|/\sigma) \frac{r}{\Delta t},$$

где  $r = \max(\tau + \tau_i)$ ,  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . Учитывая условие (5.2.10) и выбирая  $\Delta t, \tau_i$  так, чтобы  $r/\Delta t \leq \varepsilon$ , получаем

$$\|\bar{\varphi} - \tilde{\varphi}\| \leq (1 + 3\|f\|/\sigma)\varepsilon + \varepsilon^2. \quad (5.2.26)$$

Таким образом, решения задач о среднем за период  $T$  распределении субстанций с помощью статистической модели и нестационарной задачи (5.2.11)–(5.2.13) при сделанных предположениях достаточно близки друг к другу.

В заключение отметим, что, решая задачу (5.2.4), (5.2.5) или (5.2.11)–(5.2.13) и осредняя результаты с помощью (5.2.6) или (5.2.14) соответственно, мы учитываем процесс диффузии субстанций, вызванный флуктуацией входных данных.

### 5.3. Диффузионное приближение. Единственность решения

Рассмотренные в § 5.2 модели распространения примесей в атмосфере от источников загрязнения описывают существо процесса, но в некоторой степени идеализируют реальные процессы, которые сложнее и богаче по своему физическому содержанию. Представим себе случай, когда адвективное и конвективное движения в атмосфере отсутствуют, т. е.  $u = v = \omega = 0$ . Тогда в соответствии с нашими моделями нестационарная задача переноса субстанций принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi &= f, \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0.\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

Если  $f$  не зависит от  $t$ , то решение задачи имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t} + \frac{f}{\sigma} (1 - e^{-\sigma t})\tag{5.3.2}$$

и при  $t \rightarrow \infty$  переходит в решение соответствующей стационарной задачи  $\sigma \varphi = f$ , т. е.  $\varphi = \frac{f}{\sigma}$ .

Известно, что такая простейшая модель не описывает основных особенностей переноса субстанций от источника  $f$ . На самом деле мы знаем, что в атмосфере примесь как бы расплывается, образуя довольно сложное распределение аэрозолей в значительной окрестности от выброса. И это неудивительно, поскольку даже в безветренную погоду атмосфера является средой турбулентной, где спонтанно образуются мелкомасштабные флуктуации (обычно вихри), которые диссипируют и создают условия новых образований.

Спектр таких флуктуаций изучен достаточно хорошо, и именно ими обусловлено размывание источника выбросов в атмосфере. Поскольку такие флуктуации проявляются лишь статистически, у нас нет возможности предвычислять или даже фиксировать их в реальной обстановке. Если бы это было возможно, то расплывания источника аэрозоля и его распространения можно было бы предвычислить на основе модели (5.2.4), (5.2.5) или более точной модели (5.2.7), (5.2.12), (5.2.13). Однако такая возможность исключается, и поэтому необходимо модифицировать модели так, чтобы они статистически учитывали постоянно генерируемые атмосферные флуктуации.

Физика флуктуационных эффектов изучена к настоящему времени достаточно хорошо, но их математическое описание до сих пор в большинстве случаев основывается на полуэмпирических соотношениях. Рассмотрим кратко эту простейшую теорию.

Предположим, что некоторая функция  $a$  представима в виде суммы осредненной  $\bar{a}$  и флуктуационной  $a'$  компонент, т. е.  $a = \bar{a} + a'$ ; при этом считаем, что

$$a' \ll \bar{a}, \quad (5.3.3)$$

т. е. флуктуации субстанции  $a$  малы. Будем далее полагать, что  $a$  осредняется по достаточно большому интервалу времени  $T$ :

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a dt', \quad (5.3.4)$$

и на этом интервале

$$\bar{a'} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a' dt' = 0. \quad (5.3.5)$$

Если наш процесс удовлетворяет условиям (5.3.3)–(5.3.5), то возможен следующий подход к построению нужных нам уравнений, описывающих распространение субстанции в разных ситуациях.

Проинтегрируем уравнение (5.1.8) в пределах  $t \leq \tau \leq t + T$ :

$$\varphi(t + T) - \varphi(t) + \operatorname{div} \int_t^{t+T} \mathbf{u} \varphi dt' + \sigma \int_t^{t+T} \varphi dt' = 0. \quad (5.3.6)$$

Пусть  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ ,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ . Тогда (5.3.6) переходит в соотношение

$$\frac{\varphi(t + T) - \varphi(t)}{T} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \bar{\varphi} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}' \varphi'} + \sigma \bar{\varphi} = 0, \quad (5.3.7)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}(t + T) - \bar{\varphi}(t)}{T} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \bar{\varphi} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}' \varphi'} + \sigma \bar{\varphi} &= \\ &= \frac{-\varphi'(t + T) + \varphi'(t)}{T}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Введем масштабирование основных величин. Пусть  $\bar{\varphi} = A \bar{\Phi}$  и  $\varphi' = a \Phi'$ , где  $\bar{\Phi}$  и  $\Phi'$  уже одного порядка. По предположению  $\varphi' \ll \bar{\varphi}$ ,

поэтому  $a \ll A$ . Пусть  $a/A = \varepsilon$ . Тогда (5.3.8) можно переписать в виде

$$\frac{\overline{\Phi}(t+T) - \overline{\Phi}(t)}{T} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} \overline{\Phi} + \varepsilon \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}'} \overline{\Phi'} + \sigma \overline{\Phi} = \frac{\varepsilon}{T} O(1), \quad (5.3.9)$$

где  $O(1)$  означает величину порядка  $\Phi'$ . Таким образом, правая часть уравнения (5.3.9) является малой величиной порядка  $\varepsilon/T$  и может быть отброшена, а мы приходим к уравнению

$$\frac{\overline{\varphi}(t+T) - \overline{\varphi}(t)}{T} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} \overline{\varphi} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}'} \overline{\varphi'} + \sigma \overline{\varphi} = 0. \quad (5.3.10)$$

Если  $T$  – интервал времени, на котором функция  $\overline{\varphi}(t)$  изменяется мало, то  $(\overline{\varphi}(t+T) - \overline{\varphi}(t))/T$  можно приближенно заменить на производную  $\partial \overline{\varphi} / \partial t$  и получить в результате уравнение для осредненной составляющей:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} \overline{\varphi} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}'} \overline{\varphi'} + \sigma \overline{\varphi} = 0, \quad (5.3.11)$$

которое отличается от уравнения (5.1.3) флуктуационным моментом  $\operatorname{div} \overline{\mathbf{u}'} \overline{\varphi'}$ . Именно этот член ответствен за размывание потока воздушных масс, увлекающего частицы загрязняющих субстанций.

Установлено, что для атмосферных процессов возможно следующее полуэмпирическое представление компонент вектора  $\overline{\mathbf{u}'} \overline{\varphi'}$  через осредненные поля субстанций:

$$\overline{u' \varphi'} = -\mu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}, \quad \overline{v' \varphi'} = -\mu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}, \quad \overline{w' \varphi'} = -\nu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z}. \quad (5.3.12)$$

Здесь  $\mu \geq 0$  и  $\nu \geq 0$  – соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии; они определяются экспериментально.

Если соотношения (5.3.12) учесть в (5.3.11), то получим диффузионное приближение уравнения распространения субстанций в атмосфере:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} \overline{\varphi} + \sigma \overline{\varphi} = K \overline{\varphi}, \quad (5.3.13)$$

где

$$K \overline{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z}. \quad (5.3.14)$$

Естественно, что к уравнению (5.3.13) необходимо присоединить соотношение неразрывности

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.3.15)$$

и начальные данные

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 \text{ при } t = 0. \quad (5.3.16)$$

Что касается граничных условий, то их набор получается при исследовании единственности решения задачи.

В дальнейшем ради удобства черту сверху при функциях  $\varphi$  будем опускать, предполагая при этом, что имеем дело с осредненной составляющей. Итак, умножим уравнение (5.3.13) на  $\varphi$  и результат проинтегрируем как по времени  $0 \leq t \leq T$ , так и по пространству:

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\varphi_T^2}{2} dG - \int_G \frac{\varphi_0^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n \varphi^2}{2} dS + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \\ & = - \int_0^T dt \int_G \left\{ \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \nu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dG + \quad (5.3.17) \\ & + \int_0^T dt \left[ \mu \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \nu \left( \int_{\Sigma_H} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\Sigma - \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\Sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_T = \varphi(T)$ ,  $\varphi_0 = \varphi(0)$ ,  $\partial \varphi / \partial n$  – производная по направлению внешней нормали к  $\Sigma$ . Напомним также, что  $S$  – полная поверхность области  $G$ ;  $\Sigma$  – боковая цилиндрическая поверхность;  $\Sigma_H$  – сечение цилиндрической поверхности на уровне  $z = H$ ;  $\Sigma_0$  – на уровне  $z = 0$ . Перепишем (5.3.17) в виде

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\varphi_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \\ & + \int_0^T dt \int_G \left\{ \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \nu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dG + \\ & + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \int_G \frac{\varphi_0^2}{2} dG - \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^- \varphi^2}{2} dS + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T dt \left[ \mu \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \nu \left( \int_{\Sigma_H} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\Sigma - \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\Sigma \right) \right]. \quad (5.3.18)$$

Поставим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \partial \varphi / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H; \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

здесь  $\alpha \geq 0$  – некоторая функция, характеризующая взаимодействие примесей с подстилающей поверхностью. Кроме того,

$$\omega = 0 \text{ при } z = 0, z = H. \quad (5.3.20)$$

Покажем, что условия (5.3.19), (5.3.20) вместе с условиями гладкости решения и входных данных и начальными условиями (5.3.16) обеспечивают единственность решения задачи. В самом деле, используя (5.3.19), получаем основное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\varphi_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \\ & + \int_0^T dt \int_G \left\{ \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \nu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dG + \\ & + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG + \nu \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \alpha \varphi^2 d\Sigma = \\ & = \int_G \frac{\varphi_0^2}{2} dG - \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^- \varphi^2}{2} dS + \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \varphi_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Здесь мы перешли от  $S$  к  $\Sigma$ , используя (5.3.20).



Докажем теперь единственность решения задачи. Как и в § 5.2, предположим, что имеется два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению (5.3.13), начальным данным (5.3.16), граничным условиям (5.3.19) и дополнительным условиям (5.3.15) и (5.3.20). Тогда для разности  $\omega = \varphi_1 - \varphi_2$  получаем уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \omega + \sigma \omega = K \omega, \quad (5.3.22)$$

начальные данные

$$\omega = 0 \text{ при } t = 0 \quad (5.3.23)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \partial \omega / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\ \partial \omega / \partial z &= \alpha \omega \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \omega / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Для такой постановки задачи соотношение типа (5.3.21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\omega_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n^+ \omega^2}{2} d\Sigma + \\ & + \int_0^T dt \int_G \left\{ \mu \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] + \nu \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dG + \\ & + \sigma \int_0^T dt \int_G \omega^2 dG + \nu \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \alpha \omega^2 d\Sigma = 0. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Поскольку величины  $u_n^+, \mu, \nu, \sigma, \alpha$  в (5.3.25) неотрицательны, то это соотношение равно нулю только в том случае, если  $\omega = 0$ , т. е. если  $\varphi_1 = \varphi_2$ . А это и обеспечивает единственность решения задачи. Ради простоты в постановке задачи предполагалось  $\dot{f} = 0$ . Учет источника осуществляется так же, как и в § 5.1.

Если учитывать возможность такого обобщения, то возможен и переход к следующей постановке задачи, обеспечивающей единственность решения задачи в диффузионном приближении при гладких входных данных:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi &= K \varphi + f, \\
 \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\
 \varphi &= \varphi_s \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\
 \partial \varphi / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\
 \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\
 \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H.
 \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

Здесь также предположим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \omega = 0 \text{ при } z = 0, \quad z = H.$$

Заметим, что наряду с (5.3.26) единственное решение допускает и следующая постановка задачи, которая часто используется при расчетах:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi &= K \varphi + f, \\
 \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\
 \varphi &= \varphi_s \text{ на } \Sigma, \\
 \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\
 \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H.
 \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Естественно, что возможны и другие постановки задач, обеспечивающие единственность решения.

Для дальнейших рассуждений оператор  $K$ , введенный соотношением (5.3.14), удобно представить в виде суммы двух операторов:

$$K = \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \mu \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z}.$$

В этом представлении коэффициент диффузии  $\mu$  ради простоты будем считать не зависящим от пространственных координат и времени.

Выше была рассмотрена общая трехмерная постановка задачи, однако во многих случаях целесообразно использование двумерных

(х, у) – приближений, которые могут быть получены с помощью постановки (5.3.26) или (5.3.27). Рассмотрим, например, (5.3.27). Проинтегрировав уравнение диффузии по высоте, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^H \varphi dz + \int_0^H \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dz + \sigma \int_0^H \varphi dz = \\ = \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \mu \Delta \int_0^H \varphi dz + \int_0^H f dz. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Распишем более подробно второй член слева и первый член справа. Предполагая, что компоненты  $u$  и  $v$  вектора скорости не меняются по высоте в деятельном слое переноса субстанции и ее диффузии, получаем

$$\int_0^H \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dz = \frac{\partial}{\partial x} (u \int_0^H \varphi dz) + \frac{\partial}{\partial y} (v \int_0^H \varphi dz) + \omega \varphi \Big|_{z=0}^{z=H}. \quad (5.3.29)$$

В силу того, что  $\omega = 0$  при  $z = 0$  и  $z = H$ , последний член равен нулю, и, следовательно,

$$\int_0^H \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dz = \frac{\partial}{\partial x} (u \int_0^H \varphi dz) + \frac{\partial}{\partial y} (v \int_0^H \varphi dz). \quad (5.3.30)$$

Теперь рассмотрим равенства

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=H} = -\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (5.3.31)$$

С учетом граничного условия  $\partial \varphi / \partial z = \alpha \varphi$  при  $z = 0$  упростим (5.3.31), записав

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -\alpha \nu \varphi \Big|_{z=0}.$$

В предположении, что приближенно имеет место равенство

$$\varphi|_{z=0} = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi dz,$$

окончательно имеем

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -\frac{\alpha \nu}{H} \int_0^H \varphi dz. \quad (5.3.32)$$

Введем в рассмотрение интегральную интенсивность аэрозолей и источника

$$\bar{\varphi} = \int_0^H \varphi dz, \quad \bar{f} = \int_0^H f dz.$$

Соотношение (5.3.28) при этом запишется в виде

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial u \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \bar{\varphi}}{\partial y} + \bar{\sigma} \bar{\varphi} = \mu \Delta \bar{\varphi} + \bar{f}, \quad (5.3.33)$$

где  $\bar{\sigma} = \sigma + \alpha \nu / H$ . Заметим, что если  $\sigma \bar{\varphi}$  – интегральное по высоте количество распадающегося аэрозоля в процессе его миграции в атмосфере, то  $(\alpha \nu / H) \bar{\varphi}$  – количество аэрозоля, выпадающего на поверхность земли. Отбрасывая ради простоты черту сверху над решением  $\varphi$ , функцией  $f$  и величиной  $\sigma$ , приходим к двумерной постановке задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} + \sigma \varphi &= \mu \Delta \varphi + f, \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \partial \varphi / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0. \end{aligned}$$

Возможна и другая постановка двумерной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} + \sigma \varphi &= \mu \Delta \varphi + f, \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &= \varphi_s \text{ на } \Sigma. \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Сделаем еще одно важное замечание: все соображения § 5.2 остаются справедливыми и для диффузионного приближения. Это касается и стационарного решения задачи, когда с точностью до переходных процессов решение основной задачи находится осреднением по ансамблю частных задач вида

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i \varphi_i + \sigma \varphi_i = K \varphi_i + f, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \quad (5.3.36)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{is} \text{ на } \Sigma \text{ при } u_{in} < 0, \\ \partial \varphi_i / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_{in} \geq 0, \\ \partial \varphi_i / \partial z &= \alpha_i \varphi_i \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial_i \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

При этом решение задачи о среднем за период  $T$  распределении субстанции находится в виде

$$\varphi = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i, \quad (5.3.38)$$

где  $T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ , а  $\Delta t_i$  – время устойчивого режима движения воздушных масс данного типа.

## 5.4. Простейшее диффузионное уравнение

Процесс переноса и диффузии субстанции удобнее рассмотреть сначала на простых примерах одномерных задач, постепенно усложняя их математическую постановку. Поэтому прежде всего рассмотрим простейшую диффузионную постановку задачи

$$\sigma \varphi = \mu \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + Q \delta(x - x_0) \quad (5.4.1)$$

в бесконечной среде  $-\infty < x < \infty$ , где  $Q$  – мощность источника, выбрасывающего в атмосферу аэрозоль. В качестве граничных условий в этом случае следует использовать предположение об ограниченности решения во всей области определения. Отметим, что в уравнении

(5.4.1) функция  $f$  конкретизирована и представлена в виде, характерном для задач рассматриваемого класса. Задачу (5.4.1) удобно привести к эквивалентной форме без  $\delta$ -функции. Для этого проинтегрируем уравнение (5.4.1) в точке  $x = x_0$ :

$$\sigma \int_{x_0-\varepsilon/2}^{x_0+\varepsilon/2} \varphi \, dx = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x_0+\varepsilon/2} - \mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0-\varepsilon/2} + Q.$$

Переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем важное соотношение

$$\mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0+} - \mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0-} + Q = 0. \quad (5.4.2)$$

Теперь будем рассматривать две области:  $-\infty < x \leq x_0$ ,  $x_0 \leq x < \infty$ , а решения будем обозначать  $\varphi_-$  и  $\varphi_+$  соответственно, т.е. будем рассматривать две задачи:

$$\mu \frac{d^2 \varphi_+}{dx^2} - \sigma \varphi_+ = 0, \quad (5.4.3)$$

$$\varphi_+ = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$\mu \frac{d^2 \varphi_-}{dx^2} - \sigma \varphi_- = 0, \quad (5.4.4)$$

$$\varphi_- = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty;$$

Связь решений задач (5.4.3) и (5.4.4) осуществляется с помощью соотношения

$$\mu \frac{d\varphi_+}{dx} - \mu \frac{d\varphi_-}{dx} + Q = 0 \text{ при } x = x_0. \quad (5.4.5)$$

Предполагая решение задачи непрерывным во всех точках области, включая  $x = x_0$ , приходим ко второму условию:

$$\varphi_+ = \varphi_- \text{ при } x = x_0. \quad (5.4.6)$$

Нетрудно видеть, что решениями задач (5.4.3) и (5.4.4) соответственно будут

$$\varphi_+ = c_+ \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x - x_0)\}, \quad \varphi_- = c_- \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x_0 - x)\}. \quad (5.4.7)$$

Подставляя (5.4.7) в (5.4.5) и (5.4.6) и решая линейные уравнения относительно  $c_+$  и  $c_-$ , получаем

$$c_+ = c_- = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}.$$

Таким образом, решение задачи (5.4.1) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \begin{cases} \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x - x_0)\} & \text{при } x \geq x_0, \\ \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x_0 - x)\} & \text{при } x \leq x_0. \end{cases} \quad (5.4.8)$$

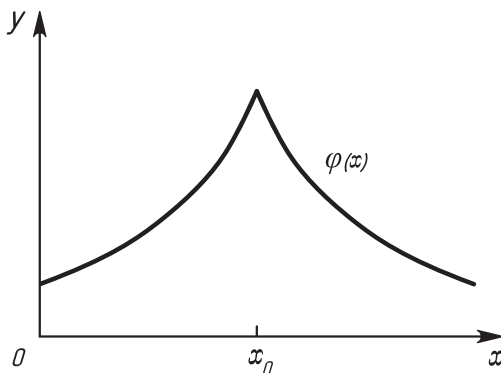


Рис. 5.1

График функции  $\varphi(x)$  приведен на рис. 5.1. Из него видно, что в результате диффузионного процесса устанавливается решение, экспоненциально и симметрично убывающее в оба направления  $x = x_0$ . Легко проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{Q}{\sigma}.$$

Рассмотрим теперь более интересный случай, когда скорость потока воздушных масс отлична от нуля. Предположим, что она постоянна и положительна. Тогда имеем уравнение

$$u \frac{d\varphi}{dx} + \sigma\varphi = \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q\delta(x - x_0) \quad (5.4.9)$$

на прямой  $-\infty < x < \infty$ . Аналогично рассмотренному случаю (5.4.9) с условием на бесконечности сведем к двум задачам:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2\varphi_+}{dx^2} - u \frac{d\varphi_+}{dx} - \sigma\varphi_+ &= 0, \\ \varphi_+ &= 0 \text{ при } x \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\mu \frac{d^2 \varphi_-}{dx^2} - u \frac{d\varphi_-}{dx} - \sigma \varphi_- = 0, \quad (5.4.11)$$

$$\varphi_- = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

Связь решений задач (5.4.10), (5.4.11), как нетрудно убедиться, осуществляется с помощью соотношений

$$\mu \frac{d\varphi_+}{dx} - \mu \frac{d\varphi_-}{dx} + Q = 0, \quad (5.4.12)$$

$$\varphi_+ = \varphi_- \text{ при } x = x_0.$$

Решения задач (5.4.10), (5.4.11) представим в форме

$$\varphi_+ = c_+ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu}\right)(x - x_0)\right\} \text{ при } x \geq x_0, \quad (5.4.13)$$

$$\varphi_+ = c_- \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} + \frac{u}{2\mu}\right)(x_0 - x)\right\} \text{ при } x \leq x_0.$$

Подставляя (5.4.13) в (5.4.12), получим  $c_+ = c_- = c$  и

$$c_+ = c_- = c = Q / \sqrt{4\sigma\mu + u^2}.$$

В результате имеем решение задачи в виде

$$\varphi(x) = \frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu + u^2}} \begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu}\right)(x - x_0)\right\} & \text{при } x \geq x_0, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} + \frac{u}{2\mu}\right)(x_0 - x)\right\} & \text{при } x \leq x_0. \end{cases} \quad (5.4.14)$$

График функции  $\varphi(x)$  приведен на рисунке 5.2. Рисунок показывает, что при  $u > 0$  левая (по отношению к  $x = x_0$ ) часть экспоненты прижимается к  $x = x_0$ , а правая, наоборот, расплывается, что как раз характеризует снос субстанции ветром с одновременной диффузией.

Рассмотрим более сложную ситуацию: длительное время ветер дул в сторону положительных значений  $x$  ( $u_1 > 0$ ), затем переменялся и стал дуть в противоположном, отрицательном направлении ( $u_2 < 0$ ).



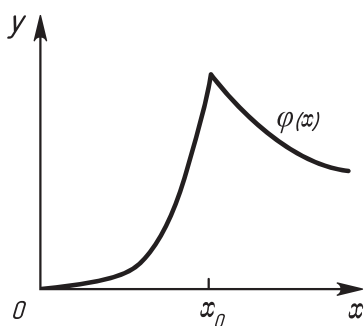


Рис. 5.2

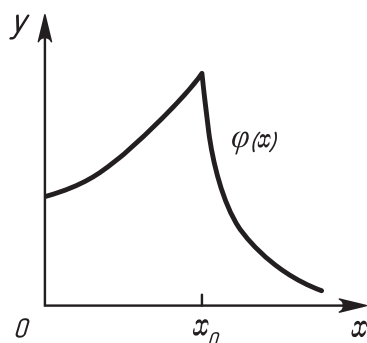


Рис. 5.3

В этом случае имеем два решения:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu + u_1^2}} \begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u_1^2}{4\mu^2}} - \frac{|u_1|}{2\mu}\right)(x - x_0)\right\} & x \geq x_0, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u_1^2}{4\mu^2}} + \frac{|u_1|}{2\mu}\right)(x_0 - x)\right\} & x \leq x_0; \end{cases} \quad (5.4.15)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu + u_2^2}} \begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u_2^2}{4\mu^2}} + \frac{|u_2|}{2\mu}\right)(x - x_0)\right\} & x \geq x_0, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u_2^2}{4\mu^2}} - \frac{|u_2|}{2\mu}\right)(x_0 - x)\right\} & x \leq x_0. \end{cases} \quad (5.4.16)$$

Если в сторону положительных значений  $x(u_1 > 0)$  ветер дул  $\Delta t_1$  суток, а в сторону отрицательных значений  $x(u_2 < 0)$  он дул  $\Delta t_2$  суток, то среднее значение субстанции находится по формуле

$$\varphi(x) = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \varphi_1(x) + \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \varphi_2(x). \quad (5.4.17)$$

Схематически решение (5.4.17) изображено на рисунке 5.3. Заметим, что в данной постановке использовался метод прямого моделирования без учета переходных процессов.

Наконец, рассмотрим статистическую модель, когда и ветер задается статистически. Пусть

$$u(\xi) = \bar{u}p(\xi), \quad (5.4.18)$$

где  $\xi$  – случайная величина в интервале  $0 \leq \xi \leq 1$ , а  $p(\xi)$  – плотность вероятности, нормированная на единицу, т. е.  $\int_0^1 p(\xi) d\xi = 1$ . Если течения приспособляются к перемене ветра мгновенно, то аналогично предыдущему решению задачи (5.4.9) при условии (5.4.15) будет иметь вид

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\mu} \int_0^1 \frac{\omega(x - x_0, u(\xi))}{\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2(\xi)}{4\mu^2}}} d\xi, \quad (5.4.19)$$

$$\omega(x - x_0, u(\xi)) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2(\xi)}{4\mu^2}} - \frac{u(\xi)}{2\mu}\right)(x - x_0)\right\} & \text{при } x \geq x_0, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2(\xi)}{4\mu^2}} + \frac{u(\xi)}{2\mu}\right)(x_0 - x)\right\} & \text{при } x \leq x_0. \end{cases} \quad (5.4.20)$$

Интегрирование в (5.4.19) при каждом фиксированном значении  $x$  производится методом статистических испытаний (методом Монте-Карло).

## 5.5. Перенос и диффузия тяжелых аэрозолей

Особый интерес при изучении задач локального загрязнения окружающей среды представляют тяжелые аэрозоли. Распространяясь в атмосфере, такой аэрозоль диффундирует и под действием силы тяжести опускается на землю. Скорость такого опускания предвычисляется из задачи Стокса и является величиной постоянной, направленной вниз. Поэтому, если обозначить через  $\bar{\omega}_g$  абсолютную величину вертикальной скорости частиц под действием силы тяжести, в уравнениях

переноса аэрозолей появляется новое слагаемое  $\bar{\omega}_g \partial\varphi/\partial z$ , и задача (5.3.27) переноса и диффузии принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} + \frac{\partial(\omega - \bar{\omega}_g)\varphi}{\partial z} + \sigma\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi + f, \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial\varphi/\partial z &= \alpha\varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial\varphi/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Определим количество выпавшего на площади  $\Sigma_i \subset \Sigma_0$  аэрозоля за интервал времени  $0 \leq t \leq T$  на плоскости  $z = 0$ . С этой целью проинтегрируем уравнение (5.5.1) по  $z$  в пределах  $0 \leq z \leq H$ . Полагая  $\int_0^H \varphi dz = \bar{\varphi}$ ,  $\int_0^H f dz = F$  и считая  $u$  и  $v$  в «действующей» зоне не зависящими от  $z$ , получаем

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial u\bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v\bar{\varphi}}{\partial y} + \sigma\bar{\varphi} = \mu\Delta\bar{\varphi} - (\bar{\omega}_g + \nu\alpha)\varphi_g + F, \tag{5.5.2}$$

где  $\varphi_g = \varphi|_{z=0}$ . При выводе (5.5.2) были использованы условия

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \text{ при } z = 0, \quad z = H, \\ \partial\varphi/\partial z &= \alpha\varphi \text{ при } z = 0 \end{aligned}$$

и естественное в данном случае условие

$$\varphi \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow H.$$

Из уравнения (5.5.2) следует, что в каждую единицу времени количество аэрозоля в атмосфере над точкой  $(x, y)$  уменьшается на величину  $(\bar{\omega}_g + \nu\alpha)\varphi_g$ . При этом  $\bar{\omega}_g\varphi_g$  — часть аэрозолей, связанная с падением частиц под действием сил тяжести, а  $\nu\alpha\varphi_g$  — часть аэрозолей, связанная с турбулентным обменом в приграничной зоне около земной поверхности. Заметим, что если  $\bar{\omega}_g \ll \nu\alpha$ , то при решении задачи о количестве выпавшего на некоторую поверхность  $\Sigma_i \subset \Sigma_0$  аэрозоля можно величиной  $\bar{\omega}_g$  в уравнении (5.5.1) пренебречь. Если же  $\bar{\omega}_g$  сравнима с величиной  $\nu\alpha$  или превосходит ее, то вместо задачи (5.3.27) необходимо рассматривать задачу (5.5.1).

Теперь несколько слов об основных функционалах задач. Такими функционалами обычно являются либо полное количество аэрозолей в заданной области  $G_i$ :

$$J_i = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{G_i} \varphi dG_i, \quad (5.5.3)$$

либо полное количество выпавшего на землю аэрозоля на площади  $\Sigma_i$  цилиндрической области  $G$ :

$$J_i = a \int_0^T dt \int_{\Sigma_i} \varphi_g d\Sigma_i. \quad (5.5.4)$$

Константа  $a$  связана с гравитационным и диффузионным механизмами выпадения аэрозоля. С учетом изложенного имеем

$$a = \bar{\omega}_g + \nu\alpha. \quad (5.5.5)$$

Итак, основные функционалы определены.

В дальнейшем случай тяжелых аэрозолей специально отмечаться не будет, однако если гравитационный эффект окажется существенным, то постановку задачи следует несколько изменить с учетом результатов настоящего параграфа. Поэтому мы этот вопрос специально рассматривать не будем, имея в виду, что необходимое обобщение осуществляется тривиально.

## 5.6. О структуре и моделировании турбулентных движений в атмосфере

При изучении процесса распространения пассивных примесей в атмосфере большое значение имеет согласование адвективно-конвективных процессов переноса с процессами диффузии субстанции. Правильное совместное моделирование этих двух факторов может дать адекватное описание физических процессов распространения примесей в атмосфере. Неправильный (точнее, несогласованный) их учет может привести к большим ошибкам. Рассмотрим более подробно проблему согласования адвективно-конвективного переноса и диффузии.

Предположим, что мы имеем дело с мезомасштабными процессами переноса с характерным временем в несколько часов. Это значит, что в течение нескольких часов изменчивостью метеорологических элементов можно пренебречь и в первом приближении считать их постоянными; в нашем случае это  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ . Если мы будем решать задачу распространения субстанции от источника без учета диффузии, то в результате получим единственную траекторию, вдоль которой перемещается исследуемая примесь. Естественно, такая постановка немедленно входит в противоречие с логикой физического процесса. Поскольку известно, что от точки, где субстанция выбрасывается в атмосферу, вдоль траектории будет наблюдаться некоторое размывание субстанции, то мы будем иметь дело не с отдельной траекторией, а с целой областью ненулевых значений плотности загрязняющего аэрозоля. Чем же определяются характеристики такого размывания? В первую очередь – мелкомасштабными флуктуациями скорости ветра, свойственными статистической природе атмосферных движений. Измеряя конус расхождения, можно на основе решения модельных задач определить коэффициенты диффузии, свойственные движениям данного пространственно-временного масштаба. Поясним это на следующем примере.

Пусть процесс переноса субстанции является двумерным и описывается уравнением

$$A\varphi \equiv u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu \Delta \varphi = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (5.6.1)$$

где  $u, v$  – заданные скорости, которые ради простоты будем считать постоянными, а  $\mu$  – пока неизвестный коэффициент диффузии. Решение уравнения (5.6.1) для бесконечной области имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{Q}{2\pi\mu} \exp \left\{ \frac{u(x - x_0) + v(y - y_0)}{2\mu} \right\} \times \\ \times K_0 \left( \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \right), \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

где  $K_0(x)$  – функция Макдональда:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh y} dy, \quad x > 0.$$

Преобразуем координаты так, чтобы начало  $x = 0$  находилось в точке  $\mathbf{r}_0$ , а направление новой оси  $x$  было параллельно направлению вектора скорости  $\mathbf{u}$ . Тогда формула (5.6.2) примет вид

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\mu} \exp \left\{ \frac{\tilde{u}x}{2\mu} \right\} K_0 \left( \frac{\tilde{u}}{2\mu} |\mathbf{r}| \right), \quad (5.6.3)$$

где  $\tilde{u} = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

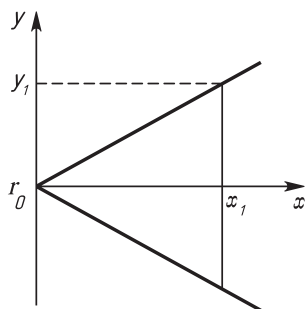


Рис. 5.4

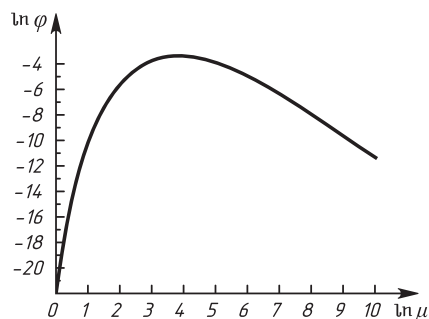


Рис. 5.5

Пусть теперь конус расхождения моделируемой плотности примеси таков, что на расстоянии  $x_1$  от точки выброса примеси его ширина равна  $2y_1$  (рис. 5.4). Полагая величину  $x_1$  достаточной для асимптотического представления функции  $K_0(x)$  и задаваясь точностью измерения плотности примеси в конусе расхождения порядка  $\varepsilon$ , получаем уравнение для определения величины  $\mu$ :

$$\varphi(x_1, y_1, \mu) = \varepsilon, \quad (5.6.4)$$

или в развернутом виде – уравнение

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi\mu(x_1^2 + y_1^2)}} \exp \left\{ \frac{\tilde{u}x}{2\mu} (x_1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \right\} = \varepsilon. \quad (5.6.5)$$

Графическое решение задачи (5.6.5) представлено на рисунке 5.5.

Предположим теперь, что мы имеем дело с процессом переноса, временные масштабы которого составляют несколько дней (средне-масштабные процессы). Рассуждая аналогично, усредняя метеозаписи с учетом их типизации за указанный характерный масштаб

времени и пренебрегая диффузионными процессами, приходим к усредненной траектории. Естественно, что такое решение не будет отражать физических процессов распространения примеси, поскольку данный средний интервал будет состоять из набора ансамблей мезопроцессов переноса с характерным временем в несколько часов, в пределах которого их можно считать слабоизменчивыми. Между тем набор таких мезопроцессов будет определять их изменчивость в течение нескольких суток.

Если теперь иметь информацию о типах мезопроцессов изменчивости ветра в течение нескольких дней, то необходимо решить набор соответствующих мезомасштабных задач переноса, получить конусы расхождения загрязняющей субстанции в процессе переноса с характерными масштабами в несколько суток. Данную синтезированную задачу можно решить и сопоставить решение с реальной формой облака аэрозоля, наблюдаемого экспериментально. Это дает возможность судить о том, насколько адекватно отражает набор типичных мезопроцессов физический характер моделируемого явления.

Ясно, что в данном случае нет необходимости вводить коэффициент макродиффузии и можно ограничиться лишь информацией о статистической природе мезопроцессов, из которых и составляется общий процесс переноса. Однако в некоторых случаях все же можно воспользоваться приближением макродиффузии. В самом деле, применим формально уравнение диффузии для описания процесса распространения примеси:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \mu \Delta \varphi = f. \quad (5.6.6)$$

Используя в данной модели вектор  $\mathbf{u}$  как результат осреднения за несколько суток и считая  $\mu$  неизвестным, с помощью методов теории возмущений можно найти соответствующее значение  $\mu$ , которое будет давать наилучшее в известном смысле значение некоторого функционала. Однако при решении основной задачи (5.6.6) с выбранным  $\mu$  может оказаться, что, хотя избранный функционал и будет получен правильно, дифференциальное поле решений может отличаться от фактического (или модельного, полученного на основе набора мезозадач). Отсюда следует вывод, что если нас интересует единственный заданный функционал, то модель переноса субстанции с выбранным коэффициентом диффузии будет хорошим инструментом для исследователей.

Если нас интересуют более детальные характеристики поля загрязнения или различные функционалы, то в данном случае предпочтительнее моделирование процесса с помощью набора мелкомасштабных моделей. Поэтому при решении оптимизационных задач, изучаемых в настоящей монографии, будем исходить из предположения о возможности использования модели в приближении макродиффузионного процесса. Однако для более детальной проработки и проверки надежности полученных результатов требуется найти решение набора задач, соответствующих мелкомасштабным флуктуациям.

Математически этот формализм сводится к следующему. Рассмотрим уравнение переноса субстанции с помощью элементарного уравнения диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu' \Delta \varphi + \nu' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (5.6.7)$$

Будем считать, что здесь  $u, v, \omega$  – функции вида

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \omega = \bar{\omega} + \omega', \quad (5.6.8)$$

где  $u', v', \omega'$  – компоненты изменяющегося в течение нескольких часов вектора скорости, представляющие собой отклонения от основного потока соответственно  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}$  с априори известной нормой отклонения;  $\mu', \nu'$  – коэффициенты диффузии, соответствующие мезопроцессам. Задача решается как периодическая с периодом  $T$ , свойственным характерному времени процесса и граничными условиями

$$\begin{aligned} \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ при } z = H, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ при } z = 0, \\ \varphi &\rightarrow 0 \text{ при } x, y \rightarrow \pm \infty. \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

В результате решения набора сформулированных таким образом задач будут учтены все статистические особенности мезопроцессов. Следовательно, здесь нам потребуется моделирование функций  $u', v', \omega'$ . Поскольку рассматриваемый процесс линеен, то при моделировании этих величин учтем их повторяемость, что соответствует их действию на более длительных по отношению к  $T$  интервалах времени. Окончательный результат решения задачи необходимо усреднять на интервале  $[0, T]$ .

Таким образом, все рассматриваемые в книге модели естественным образом обобщаются для более точного учета статистической структуры входных данных.



Проиллюстрируем изложенное на следующем простом примере. Пусть, как и выше, процесс переноса субстанции описывается уравнением (5.6.1), решение которого имеет вид (5.6.2). Представим функции  $u, v$  в виде

$$u = \bar{u} + u'(\alpha), \quad v = \bar{v} + v'(\alpha), \quad (5.6.10)$$

где отклонения  $u', v'$  от основного потока  $\bar{u}, \bar{v}$ , зависящие от параметра  $\alpha$ , рассматриваются как случайные флуктуации ограниченной априори величины. Подставляя выражения (5.6.10) в (5.6.2), находим

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \alpha) = & \frac{Q}{2\pi\mu} \exp \left\{ \frac{\bar{u}(x - x_0) + \bar{v}(y - y_0)}{2\mu} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{u'(\alpha)(x - x_0) + v'(\alpha)(y - y_0)}{2\mu} \right\} \times \\ & \times K_0 \left\{ \frac{\sqrt{(\bar{u} + u'(\alpha))^2 + (\bar{v} + v'(\alpha))^2}}{2\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

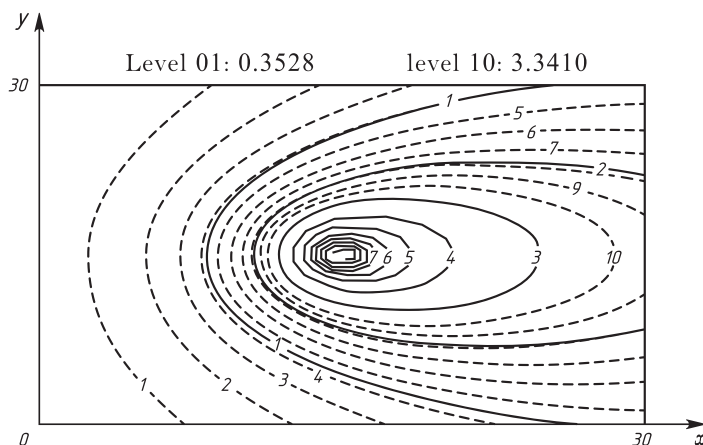


Рис. 5.6

Функция  $\varphi(x, y, \alpha)$  представляет собой множество возможных реализаций аэрозольного облака в зависимости от статистической структуры флуктуаций. Осредненные по параметру  $\alpha$  изолинии функции  $\varphi$  в предположении о нормальном законе распределения флуктуаций приведены на рисунке 5.6. Для сравнения здесь представлены изолинии функции  $\varphi$  при  $u' = v' = 0$  (сплошные линии).

При изучении глобальных процессов, период формирования которых оценивается неделями и месяцами, указанная выше методология позволяет построить иерархию моделей, идентификация которых возможна, например, с помощью космических снимков.

## 5.7. Сопряженное уравнение для простейшего уравнения диффузии

Интерес к сопряженным уравнениям применительно к тем или иным функционалам задач в математической физике возник уже давно. Однако инструментом для решения задач сопряженные уравнения становятся довольно редко. Стимулом к построению сопряженных задач явилась теория возмущений, корректная формулировка которой использует как основную, так и сопряженные задачи. Что касается решения задач на отыскание тех или иных функционалов, то и здесь сопряженная формулировка, отражая принцип двойственности, позволяет сформулировать ряд алгоритмов, которые в тех или иных условиях оказываются наилучшими как при анализе задач, так и при их реализации.

Рассмотрим сначала простейшее уравнение диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Q \delta(x - x_0) \quad (5.7.1)$$

при условии

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0, \quad (5.7.2)$$

где  $\varphi$  – заданная функция от  $x$ , и в предположении об ограниченности решения  $\varphi$  на всем интервале изменения  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ).

Строго говоря, задачу (5.7.1), (5.7.2) следует рассматривать в обобщенном смысле, поскольку в правой части уравнения (5.7.1) содержится  $\delta$ -функция. Не вдаваясь в детали, будем предполагать, что соответствующая обобщенная постановка задачи сформулирована и ее решение  $\varphi$  существует в некотором классе функций, и будем считать, что уравнение (5.7.1) есть формальная запись этой обобщенной постановки.

Теперь приступим к построению сопряженной задачи. С этой целью умножим уравнение (5.7.1) на некоторую функцию  $\varphi^*$  (ее свойства уточним в дальнейшем) и результат проинтегрируем по времени

и пространству:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx &= \\ &= Q \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \delta(x - x_0) dx. \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

Будем далее предполагать, что функции  $\varphi$  и  $\varphi^*$  таковы, что интегралы в (5.7.3) и все дальнейшие преобразования имеют смысл. Заметим, что

$$Q \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \delta(x - x_0) dx = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt. \quad (5.7.4)$$

Левую часть равенства (5.7.3) постараемся преобразовать так, чтобы за знаком скобки под интегралом стояла функция  $\varphi$ , а в скобках – дифференциальное соотношение, содержащее функцию  $\varphi^*$ . С этой целью воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \varphi^* \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dx, \quad (5.7.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx &= \int_0^T \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dt + \\ &+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

Подставив (5.7.5) и (5.7.6) в (5.7.3), получим

$$\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} \right) dx +$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \varphi^* \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \mu \int_0^T \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dt = \\
& = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt.
\end{aligned} \tag{5.7.7}$$

Предположим, что

$$\varphi^* = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \tag{5.7.8}$$

Тогда соотношение (5.7.7) упростится:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} \right) dx + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_T \varphi_T^* - \varphi_0 \varphi_0^*) dx = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt.
\end{aligned} \tag{5.7.9}$$

Предположим теперь, что  $\varphi^*$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = p \tag{5.7.10}$$

при начальных данных

$$\varphi^* = 0 \text{ при } t = T \tag{5.7.11}$$

и граничных условиях (5.7.8). Здесь  $p$  – пока не определенная функция от  $x$  и  $t$ . Эту задачу будем называть сопряженной. Учитывая (5.7.10), приведем соотношение (5.7.9) к виду

$$\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} p \varphi dx = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) \varphi^*(x, 0) dx. \tag{5.7.12}$$

Пусть

$$J = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} p \varphi dx \tag{5.7.13}$$

есть некоторый линейный функционал от  $\varphi$ , который необходимо рассчитать в результате решения основной задачи (5.7.1), (5.7.2). Из (5.7.12) следует, что этот же функционал может быть вычислен путем решения сопряженной задачи (5.7.10), (5.7.11):

$$J = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) \varphi^*(x, 0) dx. \quad (5.7.14)$$

Именно в этом заключается принцип двойственности.

Рассмотрим проблему функционалов. Функционал (5.7.13) допускает самое различное физическое содержание. Пусть

$$p(x, t) = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau). \quad (5.7.15)$$

Подставляя (5.7.15) в (5.7.13), получаем функционал

$$J = \varphi(\xi, \tau), \quad (5.7.16)$$

т. е. значение решения в точке  $x = \xi$ ,  $t = \tau$ . Заметим, что то же самое мы получим с помощью (5.7.14), если в сопряженной задаче (5.7.10), (5.7.11) в качестве  $p$  выберем выражение (5.7.15).

Рассмотрим другой случай. Пусть требуется найти интегральное количество субстанции на  $a \leq x \leq b$ . В этом случае функцию  $p(x, t)$  выберем в виде

$$p(x, t) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (5.7.17)$$

Подставляя (5.7.17) в (5.7.13), находим

$$J = \int_0^T dt \int_a^b \varphi dx. \quad (5.7.18)$$

Этот же функционал может быть получен с помощью (5.7.14).

Предположим далее, что измеряется интегральное содержание субстанции  $\varphi$  на  $[a, b]$  и в интервале времени  $[\tau_1, \tau_2]$ , причем разрешение измеряющего эту субстанцию прибора зависит от  $x$  и  $t$ , т. е. приборная характеристика описывается функцией  $X = V(t)\chi(x)$ . Требуется сопоставить измеряемый функционал с расчетным. Тогда, выбирая функцию  $p(x, t)$  в виде

$$p(x, t) = \begin{cases} V(t)\chi(x), & x \in [a, b] \text{ и } t \in [\tau_1, \tau_2], \\ 0, & x \notin [a, b] \text{ или } t \notin [\tau_1, \tau_2], \end{cases} \quad (5.7.19)$$

приходим к функционалу

$$J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \int_a^b \chi(x) V(t) \varphi dx. \quad (5.7.20)$$

Набор возможных функционалов можно было бы расширить. Важно отметить, что таким способом можно представить любой линейный функционал от решения и, следовательно, для каждого из них построить свою сопряженную задачу.

Итак, если объектом нашего рассмотрения будет не само решение, а его некоторые функционалы, то для каждого из них может быть сформулирована своя собственная сопряженная задача. На первый взгляд кажется, что наиболее естественный путь состоит в решении основной задачи, с помощью которой по формуле (5.7.13) можно рассчитать любой функционал. В некоторых случаях такой подход действительно оказывается наиболее целесообразным. Однако при планировании сооружений, связанных с выбросом аэрозолей, или при оценке чувствительности функционала на изменение параметров среды и решении других аналогичных вопросов аппарат сопряженных уравнений оказывается незаменимым средством анализа. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть процесс распространения загрязняющей примеси в области  $G = (-\infty, \infty)$  описывается уравнением (5.7.1). Требуется найти такую область  $\omega \subset G$ , чтобы при размещении источника загрязняющей мощностью  $Q$  в точке  $x_0 \in \omega$  функционал вида (5.7.16) – количество загрязняющей примеси в точке  $x = \xi_1$  в момент времени  $t = \tau_1$  – не превышал некоторой заданной константы  $c$ . Начальное значение функции  $\varphi$  для такой задачи можно выбрать нулевым:

$$\varphi = 0 \text{ при } t = 0. \quad (5.7.21)$$

Решение сформулированной задачи может быть получено по крайней мере двумя способами.

Первый состоит в многократном решении уравнения (5.7.1) с различными значениями  $x_0 \in G$ , определении значений функционала (5.7.16) и выделении на этой основе искомой зоны  $\omega$ . Однако такой путь требует решения значительного числа задач типа (5.7.1) и, очевидно, неприемлем для практической реализации.

Другой способ основан на двойственном представлении функционала (5.7.16) с использованием решения сопряженного уравнения.

Для данной задачи такое представление имеет вид

$$J = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt, \quad (5.7.22)$$

где  $\varphi^*$  – решение уравнения

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi_1) \delta(t - \tau_1), \quad (5.7.23)$$

при начальных условиях

$$\varphi^* = 0 \text{ при } t = T. \quad (5.7.24)$$

Таким образом, выделение допустимой для размещения источника загрязнения зоны  $\omega \subset G$  на основе двойственного представления (5.7.22) функционала (5.7.16) требует только однократного решения задачи, сопряженной к (5.7.1).

Определим функцию  $\varphi^*$ , удовлетворяющую (5.7.23), (5.7.24). С этой целью введем новую переменную

$$t_1 \subset T - t, \quad t_1 \in [0, T]. \quad (5.7.25)$$

При этом задача (5.7.23), (5.7.24) перейдет в задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t_1} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} &= \delta(x - \xi_1) \delta(T - t_1 - \tau_1), \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.7.26)$$

Отметим, что оператор задачи (5.7.26) формально совпадает с оператором задачи (5.7.1). Решение задачи (5.7.26) дается формулой

$$\varphi^*(x, t_1) = \int_0^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(x - \xi, t_1 - \tau) \delta(x - \xi_1) \delta(T - t_1 - \tau_1) d\xi d\tau, \quad (5.7.27)$$

где  $\tilde{\varphi}(x, t)$  – фундаментальное решение оператора задачи (5.7.26):

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\mu\pi t}} \exp \left\{ - \left( \sigma t + \frac{x^2}{4\mu t} \right) \right\};$$

$\theta$  – функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к старым переменным, находим

$$\varphi^*(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1-t)}} \exp \left\{ - \left[ \sigma(\tau_1 - t) + \frac{(x-\xi)^2}{4\mu(\tau_1-t)} \right] \right\} & \text{при } t \in [0, \tau_1), \\ 0, & \text{при } t \in [\tau_1, T). \end{cases} \quad (5.7.28)$$

В соответствии с формулой (5.7.27) двойственное представление (5.7.22) функционала (5.7.16) имеет вид

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{\exp \left\{ - \left[ \sigma(\tau_1 - t) + \frac{(x_0-\xi_1)^2}{4\mu(\tau_1-t)} \right] \right\}}{\sqrt{\tau_1 - t}} dt, \quad (5.7.29)$$

или

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\exp \left\{ - \left[ \sigma(\tau_1 - t_j) + \frac{(x_0-\xi_1)^2}{4\mu(\tau_1-t_j)} \right] \right\}}{\sqrt{\tau_1 - t_j}} \Delta t + O(\Delta t), \quad (5.7.30)$$

где  $t_j = j\Delta t$ ,  $\Delta t = \tau_1/K$ .

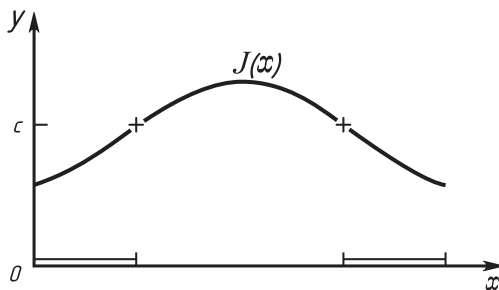


Рис. 5.7

Рассмотрим далее функционал (5.7.29) как функцию  $J(x_0)$  при  $x_0 \in G$  и построим график этой функции. Допустимая для размещения источника загрязненная область  $\omega$  определится из неравенства  $J(x) < c$ . Графическое решение рассмотренного примера дано на рис. 5.7, где область  $\omega$  на оси абсцисс выделена двойной линией.

Распределение загрязняющей примеси для каждого конкретного  $x_0 \in \omega$  находится из решения задачи (5.7.1), (5.7.2), которое, учитывая предыдущее изложение, запишем в виде

$$\varphi(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\exp \left\{ - \left[ \sigma(t - t_j) + \frac{(x-x_0)^2}{4\mu(t-t_j)} \right] \right\}}{\sqrt{t - t_j}} \Delta t + O(\Delta t). \quad (5.7.31)$$



Мы рассмотрели случай нестационарной задачи. Если основная задача стационарна:

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \sigma \varphi = Q \delta(x - x_0), \quad \varphi = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm \infty, \quad (5.7.32)$$

то и сопряженная задача будет стационарной:

$$\mu \frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} - \sigma \varphi^* = p(x), \quad \varphi^* = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm \infty. \quad (5.7.33)$$

Ясно, что линейный функционал  $J$  в этом случае имеет вид

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi dx, \quad (5.7.34)$$

или

$$J = Q \varphi^*(x_0). \quad (5.7.35)$$

Если в качестве функции  $p(x)$  выбрать

$$p(x) = \delta(x - \xi), \quad (5.7.36)$$

то решение сопряженной задачи (5.7.33) аналогично (5.4.8) будет иметь вид

$$\varphi^*(x, \xi) = \frac{1}{2\mu\sqrt{\sigma/\mu}} \begin{cases} \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x - \xi)\} & \text{при } x \geq \xi, \\ \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(\xi - x)\} & \text{при } x \leq \xi. \end{cases} \quad (5.7.37)$$

Допустим, что мы хотим найти любое другое решение с  $p(x)$ , отличным от (5.7.36). Тогда

$$\varphi^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi^*(x, \xi) d\xi, \quad (5.7.38)$$

где  $\varphi^*(x, \xi)$  – фундаментальное решение (5.7.37). В частности, если  $p(x)$  выбрать в виде (5.7.17), то

$$\varphi^*(x) = \int_a^b \varphi^*(x, \xi) d\xi.$$

Подставляя в это выражение (5.7.37), получаем

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) = \frac{1}{2\sigma} \left( 2 - \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(b-x)\} - \right. \\ \left. - \exp\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x-a)\} \right). \end{aligned} \quad (5.7.39)$$

График этой функции представлен на рисунке 5.8.

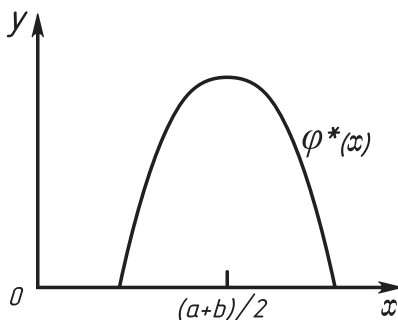


Рис. 5.8

Рассмотрим случай диффузионного переноса субстанции с учетом адвекции. Основная задача здесь имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Q \delta(x - x_0), \quad (5.7.40)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &= 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему можно получить сопряженную задачу в виде

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = p, \quad (5.7.41)$$

$$\varphi^* = 0 \text{ при } t = T, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Основным функционалом задачи будет функционал

$$J = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} p \varphi dx, \quad (5.7.42)$$

а его двойственным представлением – функционал

$$J = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 \varphi^*(x, 0) dx. \quad (5.7.43)$$

Рассмотрим еще один пример, связанный с планированием сооружений. Пусть процесс распространения загрязняющей примеси  $\varphi$  в области  $G$  описывается задачей (5.7.40) при  $u = \text{const} > 0$  и  $\varphi_0 = 0$ . Требуется определить точку  $x_0$  для такого размещения источника загрязнения, чтобы

$$\varphi(\xi_1, \tau_1) < c, \quad (5.7.44)$$

$$|x_0 - \xi_1| = \min_{x_0 \in G}, \quad (5.7.45)$$

где  $\xi_1, \tau_1, c$  – заданные константы.

Для решения данной задачи снова используем двойственное представление функционала (5.7.16):

$$J = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt. \quad (5.7.46)$$

В этом случае  $\varphi^*$  есть решение уравнения (5.7.41) с правой частью, имеющей вид (5.7.15). Найдем фундаментальное решение (5.7.41), применив преобразование Фурье к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \delta(t_1) \delta(x), \quad (5.7.47)$$

где  $t_1 = T - t$ . В результате получим

$$\frac{\partial F[\varphi]}{\partial t_1} + (iu\xi + \sigma + \mu\xi^2)F[\varphi] = \delta(t_1), \quad (5.7.48)$$

где

$$F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{i\xi x} dx.$$

Решением уравнения (5.7.48) является функция

$$F[\varphi](\xi, t_1) = \theta(t_1) \exp\{-(iu\xi + \sigma + \mu\xi^2)t_1\}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим искомое фундаментальное решение:

$$\varphi(x, t_1) = \frac{\theta(t_1)}{2\sqrt{\mu\pi t_1}} \exp \left\{ - \left[ \sigma t_1 + \frac{(x + ut_1)^2}{4\mu t_1} \right] \right\}. \quad (5.7.49)$$

Воспользовавшись (5.7.27) и старыми переменными, получаем решение задачи, сопряженной к (5.7.40), с правой частью  $p = \delta \times \times (x - \xi_1)\delta(t - \tau_1)$ :

$$\varphi^*(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1 - t)}} \exp \left\{ - \left[ \sigma(\tau_1 - t) + \frac{(x - \xi_1 + u(\tau_1 - t))^2}{4\mu(\tau_1 - t)} \right] \right\} & \text{при } t \in [0, \tau_1), \\ 0, & \text{при } t \in [\tau_1, T). \end{cases} \quad (5.7.50)$$

Подставив (5.7.50) в (5.7.46), получим выражение для исследуемого функционала:

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\exp \left\{ - \left[ \sigma(\tau_1 - t_j) + \frac{(x_0 - \xi_1 + u(\tau_1 - t_j))^2}{4\mu(\tau_1 - t_j)} \right] \right\}}{\sqrt{\tau_1 - t_j}} \Delta t + O(\Delta t), \quad (5.7.51)$$

где  $t_j = j\Delta t$ ,  $\Delta t = \tau_1/K$ .

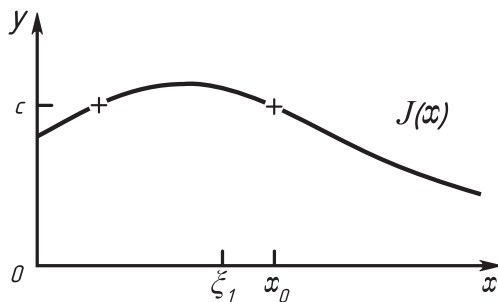


Рис. 5.9

Действуя аналогично изложенному выше, определяем область  $\omega \subset G$ , для которой неравенство (5.7.44) справедливо. Искомую точку  $x_0$  найдем из условия (5.7.45). Графическое решение этой задачи представлено на рисунке 5.9.

Аналитическое выражение для функции  $\varphi(x, t)$  с учетом формального совпадения операторов задач (5.7.40) и (5.7.47) может быть дано формулой

$$\varphi(x, t) = \frac{Q\Delta t}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\exp\left\{-\left[\sigma(t-t_j) + \frac{(x-x_0-u(t-t_j))^2}{4\mu(t-t_j)}\right]\right\}}{\sqrt{t-t_j}} + O(\Delta t), \quad (5.7.52)$$

где  $K = [t/\Delta t]$ .

Если задача (5.7.40) стационарна:

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \varphi = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + Q\delta(x - x_0), \quad (5.7.53)$$

$$\varphi = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty,$$

то она порождает также стационарную сопряженную задачу:

$$-u \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \sigma \varphi^* = \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + p(x), \quad (5.7.53')$$

$$\varphi^* = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Решение основной задачи (5.7.53) было получено в § 5.4 (см. (5.4.14)).

Решим сопряженную задачу. С этой целью найдем сначала фундаментальное решение (5.7.53') при  $p(x) = \delta(x - \xi)$ . Аналогично (5.4.14) получим

$$\varphi^*(x, \xi) = \frac{1}{2\mu\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}}} \begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} + \frac{u}{2\mu}\right)(x - \xi)\right\}, & x \geq \xi, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu}\right)(\xi - x)\right\}, & x \leq \xi. \end{cases} \quad (5.7.54)$$

Всякое другое решение задачи (5.7.53') может быть получено с помощью фундаментального решения:

$$\varphi^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \varphi^*(x, \xi) d\xi. \quad (5.7.55)$$

В частности, если  $p(x)$  взять в виде (5.7.17), то

$$\varphi^*(x) = \int_a^b \varphi^*(x, \xi) d\xi. \quad (5.7.56)$$

Подставляя (5.7.54) в (5.7.56), получим

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) = & \frac{1}{2\mu\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2} - \frac{u}{2\mu}}} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2} - \frac{u}{2\mu}} \right) (x - a) \right\} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2} + \frac{u}{2\mu}}} \left( 1 - \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2} + \frac{u}{2\mu}} \right) (b - x) \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.7.57)$$

График функции  $\varphi^*(x)$  изображен на рисунке 5.10.

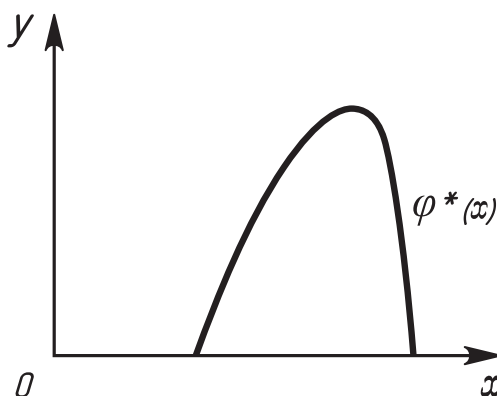


Рис. 5.10

Если рассматривается набор основных стационарных задач, соответствующих различным типам движения с различными значениями скоростей потока воздушных масс, то им должен соответствовать набор сопряженных задач. При этом исследуемый функционал находится с помощью либо основных уравнений:

$$J = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi_i(x) dx, \quad (5.7.58)$$

либо с помощью сопряженных уравнений:

$$J = \frac{Q}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i^*(x_0) dx. \quad (5.7.59)$$

## 5.8. Общий случай сопряженной задачи для трехмерной области

Рассмотрим общую трехмерную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi &= f, \\ \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \partial \varphi / \partial n &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

Будем предполагать, что решение  $\varphi(x, y, z, t)$  задачи (5.8.1) непрерывно в  $G \times [0, T]$  и является дифференцируемой и периодической по  $t$  (с периодом  $T$ ) функцией. Кроме того, пусть для каждого  $t$  функция  $\varphi(x, y, z, t)$  принадлежит множеству  $D(A)$  функций из вещественного гильбертова пространства  $L_2(G)$ , непрерывных в дифференцируемых в  $G$ , таких, что  $-\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi \in L_2(G)$ . При этом каждая функция из  $D(A)$  удовлетворяет граничным условиям (5.8.1). Относительно коэффициента  $\mathbf{u}$  сделаем предположение, что компоненты этого вектора непрерывны и дифференцируемы, причем  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Относительно других функций и параметров задачи сделаем предположение, что их гладкость достаточна для единственности решения  $\varphi$ .

В этих предположениях основную задачу (5.8.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f,$$

где оператор  $A$  с областью определения  $D(A)$  действует в гильбертовом пространстве  $L_2(G)$  и задается равенством

$$A\varphi = \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi,$$

а функция  $\varphi$  предполагается периодической по  $t$ .

Построим теперь сопряженную задачу.

Умножим уравнение (5.8.1) на некоторую функцию  $\varphi^*$  и проинтегрируем результат по всей области определения решения. Получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dG + \\
 & + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi \varphi^* dG - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dG - \\
 & - \mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi dG = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG.
 \end{aligned} \tag{5.8.2}$$

С помощью интегрирования по частям, формулы Остроградского – Гаусса и с учетом отношения  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  отдельные выражения в (5.8.2) преобразуем к виду

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dG = \int_G \varphi^* \varphi dG \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T dt \int_G \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dG, \tag{5.8.3}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dG &= \int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* dS - \\
 & - \int_0^T dt \int_G \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* dG,
 \end{aligned} \tag{5.8.4}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dG &= \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma - \\
 & - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma + \int_0^T dt \int_G \varphi \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG,
 \end{aligned} \tag{5.8.5}$$



$$\begin{aligned}
\mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi \, dG &= \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma + \\
&+ \mu \int_0^T dt \int_G \varphi \Delta \varphi^* \, dG.
\end{aligned} \tag{5.8.6}$$

Подставив (5.8.3)–(5.8.6) в (5.8.2), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \int_G \varphi \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* \right) dG = \\
&= \int_0^T dt \int_G \varphi^* f \, dG - \int_G \varphi_T \varphi_T^* \, dG + \int_G \varphi_0 \varphi_0^* \, dG - \\
&- \int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* \, dS + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma - \\
&- \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma + \\
&+ \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma.
\end{aligned} \tag{5.8.7}$$

Предположим теперь, что  $\varphi^*$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* = p, \tag{5.8.8}$$

и преобразуем правую часть равенства (5.8.7). Для этого воспользуемся граничными условиями для функции  $\varphi$  из (5.8.1) и условием

периодичности функции  $\varphi$  по времени. Функцию  $\varphi^*$  будем также считать периодической по времени с периодом  $T$ . Тогда

$$-\int_G \varphi_T \varphi_T^* dG + \int_G \varphi_0 \varphi_0^* dG = 0. \quad (5.8.9)$$

Поскольку по предположению

$$\varphi = 0 \text{ на } S \text{ при } u_n < 0,$$

то

$$\int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* dS = \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n^+ \varphi \varphi^* d\Sigma. \quad (5.8.10)$$

Здесь использовано также условие  $\omega = 0$  при  $z = 0$ ,  $z = H$ .

Далее,

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma = - \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma, \quad (5.8.11)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma =$$

$$= - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \varphi \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \alpha \varphi^* \right) d\Sigma. \quad (5.8.12)$$

В (5.8.11) и (5.8.12) использованы граничные условия из (5.8.1) при  $z = H$  и  $z = 0$  соответственно. Наконец, используя условие  $\varphi = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n < 0$  и  $\partial \varphi / \partial n = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n \geq 0$  получаем

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left( \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma = \\ & = \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma, \end{aligned} \quad (5.8.13)$$

где

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \Sigma | u_n \geq 0\}, \quad \Sigma^- = \{(x, y, z) \in \Sigma | u_n < 0\}.$$

Учитывая теперь выражения (5.8.8)–(5.8.13), имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^T dt \int_G p \varphi dG &= \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG - \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n^+ \varphi \varphi^* d\Sigma - \\
 &- \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \varphi \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \alpha \varphi^* \right) d\Sigma - \\
 &- \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma + \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma.
 \end{aligned} \tag{5.8.14}$$

До сих пор граничные условия для решения сопряженной задачи зафиксированы не были. Теперь (вместе с уравнением (5.8.8) положим

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* &= p, \\
 \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} + u_n \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\
 \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\
 \partial \varphi^* / \partial z &= \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0, \\
 \partial \varphi^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H.
 \end{aligned} \tag{5.8.15}$$

В этом случае двойственное соотношение принимает вид

$$\int_0^T dt \int_G p \varphi dG = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG. \tag{5.8.16}$$

Если мы основной функционал определим равенством

$$J = \int_0^T dt \int_G p \varphi dG, \tag{5.8.17}$$

то его тождественное двойственное представление будет иметь вид

$$J = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG. \tag{5.8.18}$$

Выбирая различные функции  $p$  можно получить различные функционалы и соответствующие сопряженные уравнения.

Сопряженную задачу (5.8.15) можно записать в виде

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = p,$$

где  $A^*$  – оператор, сопряженный к введенному выше оператору  $A$ ; он действует в вещественном гильбертовом пространстве  $L_2(G)$  и определяется равенством

$$A^* \varphi^* = -\operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^*.$$

В качестве области определения  $D(A^*)$  оператора  $A^*$  можно рассматривать множество функций  $\varphi^*$  из  $L_2(G)$ , непрерывных и дифференцируемых в  $G$  и таких, что  $-\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* \in L_2(G)$ . При этом каждая функция  $D(A^*)$  удовлетворяет граничным условиям (5.8.15).

Предполагается, что решение  $\varphi^*(x, y, z, t)$  сопряженной задачи является дифференцируемой и периодической по  $t$  функцией.

Следует отметить, что для случая основных уравнений в форме (5.3.27) методом, изложенным выше, можно получить несколько иную сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* = K \varphi^* + p,$$

$$\varphi^* = 0 \text{ при } t = T,$$

$$\varphi^* = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\partial \varphi^* / \partial z = \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0,$$

$$\partial \varphi^* / \partial z = 0 \text{ на } \Sigma_H.$$

Дополнительными требованиями к постановке задачи, как было указано, являются условия  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  и  $\omega = 0$  при  $z = 0$ ,  $z = H$ .

В заключение отметим, что наша исходная задача была однородна по граничным условиям и начальным данным. Проведенный анализ может быть легко распространен на случай неоднородных условий в основной задаче. При этом изменится только вид функционала (5.8.18), в котором будут присутствовать дополнительные слагаемые, связанные с указанной неоднородностью.

Отметим особенности двумерных постановок задачи. Поскольку двумерные основные уравнения уже определены в виде (5.3.34)

и (5.3.35), то методами, изложенными выше, мы можем прийти к соответствующим сопряженным задачам. Так, сопряженной задачей по отношению к задаче (5.3.34) будет задача

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial u \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial v \varphi^*}{\partial y} + \sigma \varphi^* &= \mu \Delta \varphi^* + p, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} + u_n \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\ \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \varphi^* &= \varphi_T^* \text{ при } t = T, \end{aligned} \quad (5.8.19)$$

а к (5.3.35) – сопряженная задача

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial u \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial v \varphi^*}{\partial y} + \sigma \varphi^* &= \mu \Delta \varphi^* + p, \\ \varphi^* &= \varphi_T^* \text{ при } t = T, \\ \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned} \quad (5.8.20)$$

Функционалы для них имеют вид

$$J = \int_0^T \int_G p \varphi dG, \quad (5.8.21)$$

$$J = \int_0^T \int_G f \varphi^* dG. \quad (5.8.22)$$

В заключение рассмотрим задачу об определении количества выпадающей на подстилающую поверхность загрязняющей примеси. Как показано выше, ее решение в предположении

$$\varphi \approx \frac{1}{H} \int_0^H \varphi dz, \quad (5.8.23)$$

где  $H$  – высота цилиндрической области, может быть получено на основе двумерной модели.

Задачу сформулируем следующим образом. Пусть в точке  $r_0 \in G$  в момент времени  $\tau_0 \in [0, T]$  произведен разовый выброс мощностью  $Q$

загрязняющей примеси  $\varphi$ . Требуется найти полное количество примеси, выпавшей на подстилающую поверхность в точке  $r_1 \in G$  в момент времени  $\tau_1 \in [\tau_0, T]$ . В соответствии с результатами предыдущей главы и формулировкой задачи основной функционал (5.8.21) принимает вид

$$J = \frac{\bar{\omega}_g + \alpha\nu}{H} \varphi(\mathbf{r}_1, \tau_1), \quad (5.8.24)$$

где  $\bar{\omega}_g$  – абсолютная величина скорости опускания частиц под действием силы тяжести, а его тождественное двойственное представление имеет вид

$$J = Q\varphi^*(\mathbf{r}_0, \tau_0). \quad (5.8.25)$$

Будем считать, что граница области  $G$  достаточно удалена от рассматриваемых точек  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  и влиянием выброса в окрестности границы можно пренебречь. Тогда приходим к следующей модели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} + (\sigma + \bar{\sigma})\varphi - \mu \Delta \varphi &= Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - \tau_0), \\ \varphi &= 0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi &\rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \\ \bar{\sigma} &= (\bar{\omega}_g + \alpha\nu)/H. \end{aligned} \quad (5.8.26)$$

Соответствующая задаче (5.8.26) сопряженная задача записывается в форме

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial u \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial v \varphi^*}{\partial y} + (\sigma + \bar{\sigma})\varphi^* - \mu \Delta \varphi^* &= \\ &= \bar{\sigma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - \tau_1), \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t = T, \\ \varphi &\rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.8.27)$$

Решения задач (5.8.26), (5.8.27) получим на основе соответствующих фундаментальных решений. Для одномерных уравнений диффузии с учетом адвективных членов фундаментальные решения были получены в § 5.7. Аналогичным образом находим фундаментальные решения  $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*$  для задач (5.8.26), (5.8.27):

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \frac{\theta(t)}{4\mu\pi t} \exp \left\{ - \left[ (\sigma + \bar{\sigma})t + \frac{(x - ut)^2 + (y - \nu t)^2}{4\mu t} \right] \right\}, \quad (5.8.28)$$

$$\tilde{\varphi}^*(x, y, t_1) = \frac{\theta(t)}{4\mu\pi t_1} \times \quad (5.8.29)$$

$$\times \exp \left\{ - \left[ (\sigma + \bar{\sigma})t_1 + \frac{(x + ut_1)^2 + (y + \nu t_1)^2}{4\mu t_1} \right] \right\},$$

где  $t_1 = T - t$ . При выводе формул (5.8.28), (5.8.29) предполагалось, что  $u = \text{const} > 0$ ,  $\nu = \text{const} > 0$ .

Решения прямой и сопряженной задач на основании последних соотношений имеют соответственно вид

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\mu(t-\tau_0)} \exp\{-\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - \tau_0)\}, & t \in (\tau_0, T], \\ 0, & t \in [0, \tau_0], \end{cases} \quad (5.8.30)$$

$$\varphi^*(x, y, t) = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}}{4\pi\mu(\tau_1-t)} \exp\{-\beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau_1 - t)\}, & t \in [0, \tau_1), \\ 0, & t \in [\tau_1, T]; \end{cases} \quad (5.8.31)$$

здесь

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = (\sigma + \bar{\sigma})t + \frac{(x - ut)^2 + (y - \nu t)^2}{4\mu t},$$

$$\beta(\mathbf{r}, t) = (\sigma + \bar{\sigma})t_1 + \frac{(x + ut_1)^2 + (y + \nu t_1)^2}{4\mu t_1}.$$

Таким образом, определить количество загрязняющей примеси, выпадающей в заданной точке, можно в результате подстановки выражения (5.8.30) в (5.8.24) либо выражения (5.8.31) в (5.8.25).

Следует подчеркнуть, что, хотя окончательный результат и не зависит от того, какой из функционалов используется – основной или его двойственное представление, – качество информации, получаемой в результате решения прямой и сопряженной задач, различно. Так, решение основной задачи имеет полную информацию о распределении в пространстве и времени загрязняющей примеси при фиксированном месте и времени разового выброса аэрозоля. Решение же сопряженной задачи в данном случае содержит информацию о том, какое количество примеси выпадает в фиксированной точке пространства и времени при произвольном месте и времени выброса. Отсюда, например, следует, что если при решении подобной задачи для точки  $(\mathbf{r}_1, \tau_1)$  время и координаты разового выброса загрязняющей примеси заранее не известны, то предпочтение при ее решении следует отдать двойственному представлению (5.8.25) исследуемого функционала.

## 5.9. Единственность решения сопряженной задачи

Покажем теперь, что решение сопряженной задачи (5.8.15) единственно. Будем предполагать, что  $\varphi^*(x, y, z, t)$  непрерывно в  $G \times [0, T]$  и является дифференцируемой и периодической по  $t$  функцией. Кроме того, пусть для каждого  $t$  функция  $\varphi^*(x, y, z, t)$  принадлежит множеству  $D(A^*) \subset L_2(G)$ , введенному выше. Умножим уравнение (5.8.15) на  $\varphi^*$  и результат проинтегрируем по всей области определения решения. Тогда

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dG - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* dG + \\
 & + \int_0^T dt \int_G \sigma \varphi^{*2} dG - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG - \\
 & - \mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi^* dG = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG.
 \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

Аналогично предыдущему преобразуем интегралы

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* dG = \int_0^T dt \int_G \operatorname{div} \mathbf{u} \frac{\varphi^{*2}}{2} dG = \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n \varphi^{*2}}{2} d\Sigma, \tag{5.9.2}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG &= \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma - \\
 & - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_G \nu \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 dG,
 \end{aligned} \tag{5.9.3}$$

$$\mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi^* dG = \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma -$$



$$- \mu \int_0^T dt \int_G (\nabla \varphi^*)^2 dG, \quad (5.9.4)$$

где

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (\nabla \varphi)^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2.$$

Используя (5.9.2)–(5.9.4), соотношение (5.9.1) приведем к виду

$$\begin{aligned} & - \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{*2}}{\partial t} dG + \int_0^T dt \left\{ \int_G (\sigma \varphi^{*2} + \nu \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & + \mu (\nabla \varphi^*)^2) dG - \int_{\Sigma} \varphi^* \left( -\frac{u_n \varphi^*}{2} + u_n \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma - \\ & \left. - \int_{\Sigma_H} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma \right\} = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG. \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Поскольку наша задача периодическая, то

$$\int_0^T dt \int_G \frac{\partial \varphi^{*2}}{\partial t} dG = 0. \quad (5.9.6)$$

Далее, в силу условия

$$\varphi^* = 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0 \quad (5.9.7)$$

имеем

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \left( -\frac{u_n^- \varphi^*}{2} + u_n^- \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma = 0, \quad (5.9.8)$$

а в силу условия

$$u_n \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0 \quad (5.9.9)$$

получаем

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma^+} u_n^+ \varphi^{*2} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \mu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma = 0. \quad (5.9.10)$$

Что касается последних членов в левой части (5.9.5), то в соответствии с граничными условиями на  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_H$  имеем

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma = 0, \quad (5.9.11)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu \alpha \varphi^{*2} d\Sigma.$$

Таким образом, с учетом (5.9.7)–(5.9.11) соотношение (5.9.5) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n^+ \varphi^{*2}}{2} d\Sigma + \int_0^T dt \int_G \sigma \varphi^{*2} dG + \\ & + \int_0^T dt \int_G \nu \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 dG + \mu \int_0^T dt \int_G (\nabla \varphi^*)^2 dG + \\ & + \alpha \nu \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \varphi^{*2} d\Sigma = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG. \end{aligned} \quad (5.9.12)$$

Соотношение (5.9.12) будет основным при доказательстве единственности решения задачи (5.8.15). В самом деле, допустим, что задача (5.8.15) имеет два разных решения:  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$ . Составим разность  $\omega^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ . Тогда для  $\omega^*$  имеем однородную задачу

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \omega^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \omega^* + \sigma \omega^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \omega^*}{\partial z} - \mu \Delta \omega^* = 0, \\ & \mu \frac{\partial \omega^*}{\partial n} + u_n \omega^* = 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\ & \omega^* = 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ & \partial \omega^* / \partial z = \alpha \omega^* \text{ на } \Sigma_0, \\ & \partial \omega^* / \partial z = 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (5.9.13)$$

Соответствующее этой задаче соотношение типа (5.9.12) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n^+ \omega^{*2}}{2} d\Sigma + \int_0^T dt \int_G \sigma \omega^{*2} dG + \\
 & + \int_0^T dt \int_G \nu \left( \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 dG + \mu \int_0^T dt \int_G (\nabla \omega^*)^2 dG + \\
 & + \alpha \nu \int_0^T dt \int_{\theta_0} \omega^{*2} d\Sigma = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9.14}$$

Поскольку в этом соотношении  $\sigma, \nu, \mu, \alpha \geq 0$ , То оно выполняется только при условии  $\omega^* = 0$ , т. е.  $\varphi_1^* = \varphi_2^*$ . Таким образом, единственность решения задачи установлена. Естественно, что для этой цели мы неявно предположили необходимую гладкость, обеспечивающую законность всех указанных выше преобразований.

Отметим, что аналогичным образом могла бы быть доказана теорема единственности для смешанной задачи, однако в этом случае следовало бы положить  $\varphi^* = \varphi_T$  при  $t = T$  и решение задачи вести в сторону убывающих  $t$ . Именно в том случае алгоритм решения обеспечивает корректность реализации.

В заключение следует отметить, что основная и сопряженная задачи допускают единственное решение и в этом случае, когда в (5.8.1) вместо условий  $\varphi = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n < 0$  и  $\partial \varphi / \partial n = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n \geq 0$  и в (5.8.15) вместо условий  $\mu \partial \varphi^* / \partial n + u_n \varphi^* = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n \geq 0$  и  $\varphi^* = 0$  на  $\Sigma$  при  $u_n < 0$  будут рассматриваться условия  $\varphi = 0$  на  $\Sigma$  и  $\varphi^* = 0$  на  $\Sigma$  для всех  $u_n$ .

## 5.10. Сопряженное уравнение и тождество Лагранжа

В этой главе был предложен метод построения сопряженных уравнений, соответствующих уравнению переноса и диффузии аэрозолей. Эти же уравнения можно получить из общих соображений на основе тождества Лагранжа. Рассмотрим технику получения сопряженных

уравнений на этом пути для общего эволюционного уравнения. Итак, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \quad (5.10.1)$$

где  $A$  – линейный оператор в гильбертовом пространстве  $H = L_2(G)$ , заданный на множестве функций  $D(A) \in H$ , каждый элемент которого удовлетворяет соответствующим условиям гладкости, дополнительным условиям (например, граничным) и другим требованиям, вытекающим из существа задачи. Здесь  $G$  – область изменения пространственных переменных. Мы считаем задачу (5.10.1) периодической по  $t$  с периодом  $T$ .

Введем гильбертово пространство  $\Phi = L_2(G \times [0, T])$  вещественных периодических по  $t$  функций, суммируемых с квадратом по  $\mathbf{r}$  и  $t$  на  $G \times [0, T]$ , со скалярным произведением

$$(g, h) = \int_0^T dt \int_G gh \, d\mathbf{r}, \quad g, h \in \Phi. \quad (5.10.2)$$

Задачу (5.10.1) еще более формализуем, записав ее в виде

$$L\varphi = f, \quad (5.10.3)$$

где оператор  $L$  действует в гильбертовом пространстве  $\Phi$  и определяется равенством  $L = \partial/\partial t + A$ .

В качестве области определения  $D(L)$  оператора  $L$  мы можем рассматривать множество функций  $\varphi \in \Phi$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$  и таких, что для каждого  $t, \varphi \in D(A)$ .

Линейному оператору  $L$  поставим в соответствие сопряженный оператор  $L^*$  с областью определения  $D(L^*)$  на основе тождества Лагранжа:

$$(Lh, g) = (h, L^*g), \quad (5.10.4)$$

где оператор  $L$  и функции  $h \in D(L), g \in D(L^*)$  предполагаются вещественными. Полагая  $h = \varphi, g = \varphi^*$ , имеем

$$(L\varphi, \varphi^*) = (\varphi, L^*\varphi^*). \quad (5.10.5)$$

Поскольку имеет место уравнение (5.10.3), то при формальной записи

$$L^*\varphi^* = p, \quad (5.10.6)$$

где  $p$  – пока неопределенная функция, соотношение (5.10.5) принимает вид

$$(\varphi^*, f) = (\varphi, p). \quad (5.10.7)$$

Если  $p$  – характеристика измерения (например, прибора) или системы измерений (например, сумма измерений), то нашим основным функционалом будет

$$J = (\varphi, p). \quad (5.10.8)$$

Из (5.10.7) следует двойственная формула

$$J = (\varphi^*, f). \quad (5.10.9)$$

Применим теперь этот метод к конкретной задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi &= f, \\ \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (5.10.10)$$

Как и ранее, будем предполагать, что компоненты  $u, v$  и  $\omega$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \omega &= 0 \text{ при } z = 0, \quad z = H. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что решение  $\varphi(x, y, z, t)$  задачи (5.10.10) непрерывно в  $G \times [0, T]$  и является дифференцируемой и периодической по  $t$  функцией. Кроме того, пусть для каждого  $t$  функция  $\varphi(x, y, z, t)$  принадлежит множеству функций  $D(A)$  из гильбертова пространства  $H = L_2(G)$ , непрерывных и дифференцируемых в  $G$  и таких, что  $-\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi \in L_2(G)$ . При этом каждая функция из  $D(A)$  удовлетворяет граничным условиям (5.10.10). Тогда основную задачу (5.10.10) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \quad (5.10.11)$$

где оператор  $A$  действует в гильбертовом пространстве  $H = L_2(G)$  с областью определения  $D(A)$  и задается равенством

$$A\varphi = \operatorname{div}(\mathbf{u}\varphi) + \sigma\varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi.$$

Как мы видели выше, задача (5.10.11) может быть записана в виде (5.10.3):

$$L\varphi = f, \quad (5.10.12)$$

где оператор  $L$  действует в вещественном гильбертовом пространстве  $\Phi = L_2(G \times [0, T])$  с областью определения  $D(L)$  и определяется равенством  $L = \partial/\partial t + A$ .

Для построения сопряженного оператора  $L^*$  используем тождество Лагранжа (5.10.4) и распишем в явной форме его левую часть при  $h, g \in D(L)$ :

$$\begin{aligned} (Lh, g) &= \int_0^T dt \int_G g \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}h + \sigma h - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial h}{\partial z} - \mu \Delta h \right) dG = \\ &= \int_G g_T h_T dG - \int_G g_0 h_0 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n g h d\Sigma + \sigma \int_0^T dt \int_G g h dG - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu g \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu g \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \\ &\quad + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \nu h \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu h \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_G h \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial g}{\partial z} dG - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} g \frac{\partial h}{\partial n} d\Sigma + \\ &\quad + \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} h \frac{\partial g}{\partial n} d\Sigma - \int_0^T dt \int_G \mu h \Delta g dG - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_G h \frac{\partial g}{\partial t} dG - \int_0^T dt \int_G h \operatorname{div} \mathbf{u}g dG. \end{aligned} \quad (5.10.13)$$

Тождество (5.10.13) переходит в выражение

$$(Lh, g) = \int_0^T dt \int_G h \left( -\frac{\partial g}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} g + \right. \\ \left. + \sigma g - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial g}{\partial z} - \mu \Delta g \right) dG. \quad (5.10.14)$$

Оператор, действующий на функцию  $g$  в выражении в круглых скобках, обозначим через

$$L^* \cdot = -\frac{\partial \cdot}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot) + \sigma \cdot - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \cdot}{\partial z} - \mu \Delta \cdot. \quad (5.10.15)$$

Тогда правая часть выражения (5.10.14) будет скалярным произведением вида  $(h, L^*g)$ . В результате естественно приходим к тождеству (5.10.4) и сопряженному оператору (5.10.15), действующему в гильбертовом пространстве  $\Phi = L_2(G \times [0, T])$  с областью определения  $D(L^*) = D(L)$ .

Формально определим сопряженную задачу

$$L^* \varphi^* = p, \quad (5.10.16)$$

или в развернутом виде

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* = p, \\ \varphi^* = 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi^* / \partial z = \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi^* / \partial z = 0 \text{ на } \Sigma_H, \quad (5.10.17)$$

причем функция  $\varphi^*(x, y, z, t)$  предполагается периодической по  $t$  с периодом  $T$ . Тогда в зависимости от выбранного  $p$  приходим к тому или иному функционалу  $J$ . В самом деле, если выберем  $h = \varphi$ ,  $g = \varphi^*$ , то в соответствии с (5.10.7) приходим к функционалам (5.10.8), (5.10.9).

В заключение отметим, что при использовании тождества Лагранжа (5.10.4) для построения сопряженного оператора существенно использовался тот факт, что начальные и граничные условия основной задачи являются однородными. Именно этим условиям удовлетворяют функции из множества  $D(L)$ , которое в силу однородности этих условий является линейным.

## Глава 6

# Сопряженные уравнения, оптимизация и проблема минимакса

Современные темпы развития экономики требуют строительства все более мощных индустриальных объектов и комплексов. В связи с распределением трудовых ресурсов такие объекты обычно сооружаются в густонаселенных районах или вблизи от них. Это обстоятельство накладывает особые ограничения на размещение объектов, выбрасывающих в атмосферу аэрозоли, вредные для здоровья людей и нарушающие экологические системы, исторически сложившиеся в данном регионе. Проблема оптимального размещения предприятий является многоаспектной и алгоритмически весьма сложной задачей. Для ее решения автору потребовалось разработать математический аппарат сопряженных задач, решения которых являются своеобразными функциями влияния аэрозольного загрязнения на окружающую среду. В настоящей главе результаты исследований, изложенные в главе 5, применены к конкретному объекту исследований оптимального размещения предприятий, рассмотрены различные математические модели наиболее типичных ситуаций, указаны методы решения задач оптимизации и дана интерпретация результатов.



## 6.1. Постановка задачи

Предположим, что требуется разместить новое промышленное предприятие вблизи населенных пунктов, зон отдыха и других экологически значимых зон с таким условием, чтобы суммарное годовое их загрязнение от вредных промышленных выбросов не превышало допустимых санитарных норм и чтобы общая экологическая нагрузка на весь регион  $\Sigma_0$  за счет его загрязнения была минимальной или в пределах глобальных санитарных норм.

Пусть промышленное предприятие выбрасывает в атмосферу в единицу времени на высоте  $z = h$  вредный аэрозоль с интенсивностью  $Q$ , который затем переносится воздушными массами и диффундирует под влиянием мелкомасштабной турбулентности. Предположим, что источник аэрозоля располагается в окрестности точки  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, h)$ . Тогда он может быть описан функцией

$$f(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (6.1.1)$$

и мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\varphi) + \sigma\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu\Delta\varphi = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (6.1.2)$$

В качестве граничных условий примем

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial\varphi/\partial z &= \alpha\varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial\varphi/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Решение задачи (6.1.2), (6.1.3) будем искать на множестве достаточно гладких периодических функций с периодом  $T$  по переменной  $t$ . Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}, T) = \varphi(\mathbf{r}, 0). \quad (6.1.4)$$

Задача состоит том, чтобы выбрать для размещения предприятия такую зону  $\omega_G \subset G$ , в которой будут соблюдены глобальные и локальные санитарные нормы загрязнения как всего региона  $\Sigma_0$ , так и его специально выбранных зон  $\Omega_k$ . При решении задачи о переносе и диффузии загрязняющих субстанций компоненты вектора скорости в планетарном пограничном слое атмосферы в заданном регионе вычисляются методами мезометеорологии. После получения необходимой информации о поле ветра для решения задачи о распространении

промышленного аэрозоля, выбрасываемого в заданной точке  $\mathbf{r}_0 \in G$ , используем методы прямого моделирования. С этой целью возьмем средненедельные климатические данные о компонентах скорости ветра, полученные методами мезометеорологии. После этого решается задача (6.1.2)–(6.1.4).

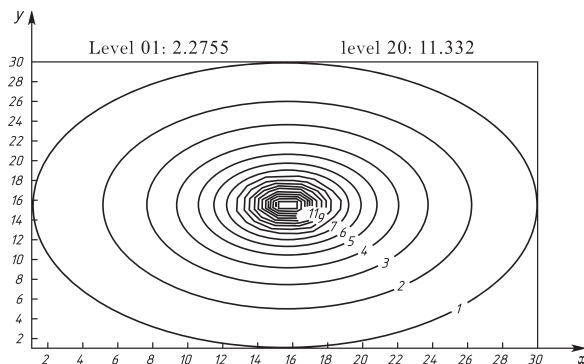


Рис. 6.1

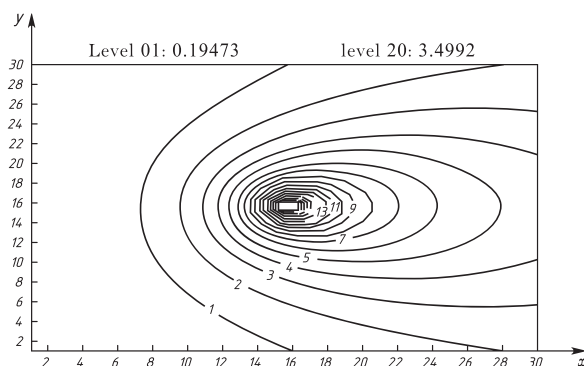


Рис. 6.2

Примеры решения задачи (6.1.2)–(6.1.4) на основе изложенной в главе 5 статистической модели представлены на рисунках 6.1–6.4, где изображены изолинии функций

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{TH} \int_0^T \int_0^H \varphi(x, y, z, t) \, dz dt$$

для различных типов движения воздушных масс. Здесь рисунок 6.1 соответствует случаю  $u = v = \omega = 0$ , а рисунок 6.2 – случаю

$u = 5$  м/с,  $v = \omega = 0$ ; рисунок 6.3 иллюстрирует ситуацию, когда в интервале  $[0, T/2]$  компоненты вектора скорости ветра равны  $u = 5$  м/с,  $v = \omega = 0$ , а в интервале  $[T/2, T]$ ,  $u = 0$  они составляют  $v = 5$  м/с,  $\omega = 0$ . Рисунок 6.4 получен при следующем задании компонент вектора скорости ветра:

$$u = \begin{cases} 5, & t \in [0, T/3), \\ 0, & t \in [T/3, 2T/3), \\ -5, & t \in [2T/3, T]; \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 0, & t \in [0, T/3), \\ 5, & t \in [T/3, 2T/3), \\ 0, & t \in [2T/3, T]; \end{cases}$$

$$\omega = 0.$$

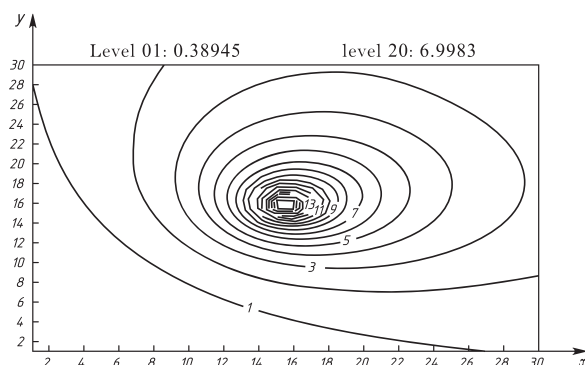


Рис. 6.3

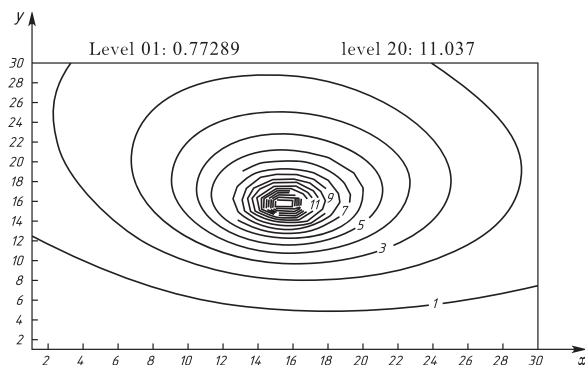


Рис. 6.4

Полученное решение интегрируется в пределах годового интервала  $0 \leq t \leq T$ , и подсчитывается либо среднее за период  $T$  количество аэрозоля в единичном цилиндре над экологически значимой зоной  $\Omega_k \subset \Sigma_0$ :

$$J_k^B = b \int_0^T dt \int_{G_k} \varphi dG, \quad (6.1.5)$$

либо полное количество аэрозоля, осевшего на земной поверхности в той же зоне  $\Omega_k \subset \Sigma_0$ :

$$J_k^A = a \int_0^T dt \int_{\Omega_k} \varphi d\Sigma. \quad (6.1.6)$$

Здесь  $b = 1/T$ ; константа  $a$  отражает ту часть аэрозоля, которая попадает в почву, – прежде всего это тяжелые аэрозоли, которые выпадают на землю под действием собственного веса, а также часть легких, попадающих на поверхность земли за счет вертикальной диффузии. Как было показано в § 5.5, в этом случае  $a$  можно выбрать следующим образом:

$$a = \bar{\omega}_g + \alpha\nu. \quad (6.1.7)$$

Заметим, что оба функционала важны для оценки загрязнения и его воздействия на экологические условия зоны  $\Omega_k$ . Так, функционал (6.1.5) важен для статистической оценки прямого влияния на живую природу, потребляющую кислород, а (6.1.6) – для суждения о загрязнении почвенного покрова и водоемов, влияние которых на экологию окружающей среды может быть также значительным, но опосредованным в рамках соответствующих линий биоценоза. Как отмечено выше, функционалы (6.1.5) и (6.1.6) являются частными случаями более общего функционала

$$J_p = \int_0^T dt \int_G p\varphi dG, \quad (6.1.8)$$

который целесообразно применять при оценке загрязнений в разных случаях с заданными  $p$ . Если выбрать

$$p = \begin{cases} b, & \mathbf{r} \in G_k, \\ 0, & \mathbf{r} \notin G_k, \end{cases}$$

то придем к функционалу (6.1.5). Если же принять

$$p = \begin{cases} \alpha\delta(z), & \mathbf{r} \in \Omega_k, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_k, \end{cases}$$

то придем к функционалу (6.1.6). Напомним, что  $\Omega_k \in \Sigma_0$  является основанием цилиндрической области  $G_k$  на плоскости  $z = 0$ .

Если же промышленный объект поместить в точку  $\mathbf{r}_1 \in G$ , то весь расчет следует повторить. Это значит, что решение вопроса об оптимальном размещении предприятия требует большого перебора вариантов и последующего сравнения функционалов  $J_k^A$  и  $J_k^B$  или их линейных комбинаций с определенными константами  $a$  и  $b$ :

$$J_k = J_k^A + J_k^B. \quad (6.1.9)$$

Имея в виду, что оценка загрязнения в конечном итоге связана с комбинацией функционалов  $J_k^A$  и  $J_k^B$ , введем в рассмотрение обобщенный функционал

$$J_k = \int_0^T dt \int_{G_k} [b + \alpha\delta(z)] \varphi dG_k, \quad (6.1.10)$$

который записывается в форме функционала (6.1.6) при условии, что

$$p_k = \begin{cases} b + \alpha\delta(z) & \text{в } G_k, \\ 0 & \text{вне } G_k, \end{cases}$$

Поэтому в дальнейшем будем иметь дело только с функционалом (6.1.10).

Введем еще один важный функционал  $J_{pk}$ :

$$J_{pk} = \sum_{k=1}^m \int_0^T dt \int_{G_k} [b_k + \alpha_k\delta(z)] \varphi dG. \quad (6.1.11)$$

Здесь мы предположим, что константы  $a_k$  и  $b_k$  могут быть разными для различных (непересекающихся) зон  $G_k$  и могут зависеть, например, от характера подстилающей поверхности. Тогда функционал (6.1.11) можно снова записать в форме

$$J_p = \int_0^T dt \int_G p\varphi dG, \quad (6.1.12)$$

где

$$p = \begin{cases} b_k + \alpha_k \delta(z) & \text{на } G_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{вне } \bigcup_{k=1}^m G_k. \end{cases}$$

Физическая интерпретация функционала  $J_p$  следующая: функционал дает интегральный по всем экологически значимым областям  $G_k$  эффект загрязнения окружающей среды при условии, что источник промышленных выбросов находится в точке  $\mathbf{r}_0 \in G$ . Этот функционал является в известном смысле глобальным для всей области  $G$  и всех регионов  $G_k$ .

Наряду с (6.1.11) рассмотрим другой глобальный функционал:

$$Y_p = \int_0^T dt \int_G p_c \varphi \, dG, \quad (6.1.13)$$

где

$$p_c = \begin{cases} B_k + A_k \delta(z), & \mathbf{r} \in G_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{вне } \bigcup_{k=1}^m G_k. \end{cases}$$

Здесь  $A_k$  и  $B_k$  – величины, связанные с санитарным (физиологическим) воздействием выбрасываемых промышленных аэрозолей на все области  $G_k \subset G$ . Они могут быть выбраны различными способами. Например, константы  $B_k$  могут выражать корреляционные связи между количеством аэрозолей в  $G_k$  и санитарной его вредностью либо прямым способом воздействия на те или иные объекты (включая и живые) в области  $G_k$ . Аналогично дело обстоит и с константами  $A_k$ . Такие сведения получаются на основе экспериментальных данных за несколько лет.

Наконец, приведем еще одно обобщение. Предположим, что мы располагаем всеми сведениями о физиологических зонах  $\Omega_k$ , но и во всех других точках  $\mathbf{r} \in \Sigma_0$ . Тогда величины  $A$  и  $B$  становятся уже функциями:  $A = A(x, y)$ ,  $B = B(x, y)$ . Составим функционал  $Y_p$  с величиной

$$p_c = B + A\delta(z) \text{ в } G. \quad (6.1.14)$$

Функционалы (6.1.13), (6.1.14) будем использовать для оценки экологической нагрузки на регион от загрязнения. Задача состоит в нахождении такой точки  $\mathbf{r}_0 \in G$ , что

$$Y_p = \min_{\mathbf{r}_0 \in G}. \quad (6.1.15)$$

Эта проблема, как было отмечено выше, решается с помощью основной задачи (6.1.2)–(6.1.4) методом перебора  $\mathbf{r}_0$  в области  $G$ . Такой перебор требует огромных вычислений и труден в реализации даже на современных вычислительных машинах. Поэтому на практике осуществляется целенаправленный перебор с учетом розы ветров и других соображений статистического характера. Однако, как будет показано далее, задача (6.1.15) может быть решена однозначно с помощью всего лишь одного варианта расчета сопряженной задачи. В этом заключается одно из замечательных свойств двойственности. Переходим к рассмотрению этого алгоритма.

## 6.2. Сопряженные уравнения и проблема оптимизации

Поскольку основной функционал задачи мы выбрали в форме

$$Y_p = \int_0^T dt \int_G p_c \varphi \, dG, \quad p_c = B + A\delta(z) \text{ в } G, \quad (6.2.1)$$

то в соответствии с результатами главы 5 сопряженной задачей по отношению к основной будет следующая задача:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* &= p_c, \\ \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi^*(\mathbf{r}, 0). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Если уравнение (6.1.2) умножить на  $\varphi^*$ , уравнение (6.2.2) – на  $\varphi$ , результаты проинтегрировать по всему интервалу и области  $G$ , вычесть одно из другого и воспользоваться граничными значениями и начальными данными (6.1.3), (6.1.4) и (6.2.2), то в силу сопряженности задач (см. гл. 5) после преобразований и упрощений придем к двойственному виду функционала  $Y_p$  (см. (5.8.17) и (5.8.18)):

$$Y_p = \int_0^T dt \int_G p_c \varphi \, dG, \quad p_c = B + A\delta(z) \text{ в } G, \quad (6.2.3)$$

$$Y_p = Q \int_0^T \varphi^*(\mathbf{r}_0, t) dt. \quad (6.2.4)$$

Величину  $Y_p$  обозначим через  $Y_p(\mathbf{r}_0)$ , поскольку этот функционал параметрически зависит от местоположения  $\mathbf{r}_0 \in G$  промышленного объекта.

Предположим, что сопряженная задача (6.2.2) решена и найдена функция  $\varphi^*(\mathbf{r}, t)$ . Подставляя ее в (6.2.4), получаем

$$Y_p(\mathbf{r}) = Q \int_0^T \varphi^*(\mathbf{r}, t) dt. \quad (6.2.5)$$

Вспомогательную функцию  $Y_p(\mathbf{r})$  используем для нахождения  $\mathbf{r}_0$  из условия

$$Y_p(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{r} \in G}. \quad (6.2.6)$$

Точкой, минимизирующей  $Y_p(\mathbf{r})$ , и будет  $\mathbf{r}_0$ .

Дальнейший план действий очевиден. Необходимо построить поле функций  $Y_p(x, y, h)$ , где  $h$  – высота выброса, лимитируемая технологией строительства. В результате на плоскости  $(x, y)$  получим поле изолиний  $Y_p(x, y, h) = \text{const}$ .

Однако во многих случаях единственного решения задачи оптимизации не требуется, поскольку при окончательном решении необходимо обеспечить ряд ограничений, определяемых геологией региона, близостью трудовых ресурсов, воды и всевозможных коммуникаций. Поэтому важно выбрать целую область допустимых значений санитарных норм. Обозначим через  $\omega_c$  область, где выполняется условие

$$Y_p \leq c, \quad (6.2.7)$$

которая и будет решением нашей задачи.

Теперь вернемся к классическому решению проблемы оптимизации. Пусть  $\mathbf{r}_0$  найдена. Тогда необходимо для этой фиксированной точки решить основную задачу (6.1.2)–(6.1.4) (см. рис. 6.1–6.4) и получить полную информацию о полях загрязнений уже не в глобальном, а в локальном смысле, т. е. информацию о загрязнении отдельных зон. Если для всех зон удовлетворяются предельно допустимые санитарные дозы загрязнения, то задача решена; если нет, то требуется решать более сложную задачу, о которой речь пойдет в § 6.3.



### 6.3. Многокритериальная задача оптимизации

При глобальной оценке санитарного загрязнения всего региона  $\Sigma_0$  вредными промышленными выбросами некоторые экологически важные зоны  $\Omega_k$  могут оказаться загрязненными сверх предельно допустимых норм. Для того чтобы найти метод расчета, позволяющий избежать этого, решим следующую многокритериальную задачу.

Пусть  $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, m)$  – несколько выбранных на плоскость  $z = 0$  в области  $\Sigma_0$  экологически наиболее значимых зон: населенные пункты, зоны отдыха, резервуары воды и т. п. Требуется определить область расположения нового промышленного объекта с таким расчетом, чтобы загрязнение всех  $m$  зон  $\Omega_k$  не превышало предельно допустимых значений (если вообще такая область  $\Sigma_0$  существует). Если такой области на  $\Sigma_0$  найти не удастся, то можно сформулировать такие ограничения на мощность выбросов  $Q$ , при которых область возможного размещения предприятия появится.

Сначала рассмотрим более простую задачу, когда область  $\Omega_k \subset \Sigma_0$  единственна. Априори потребуем, чтобы санитарное загрязнение в ее пределах было меньше предельно допустимой нормы  $c_k$ , т. е.

$$Y_{pk} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi \, dG_k \leq c_k, \quad (6.3.1)$$

$$p_{ck} = \begin{cases} b_k + \alpha_k \delta(z) & \text{на } G_k, \\ 0 & \text{вне } G_k. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

В отличие от случая, рассмотренного в § 6.2, интегрирование в (6.3.1) проводится уже не по всей области  $G$ , а лишь в ее части  $G_k$ . Тогда вместо задач (6.2.2) имеем следующую:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi_k^* + \sigma \varphi_k^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_k^* &= p_{ck}, \\ \varphi_k^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi_k^* / \partial z &= \alpha \varphi_k^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi_k^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi_k^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi_k^*(\mathbf{r}, 0), \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

где  $p_{ck}$  – функция вида (6.3.2). Поскольку имеет место принцип двойственности:

$$Y_{pk} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi dG_k, \quad Y_{pk} = Q \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_0, t) dt, \quad (6.3.4)$$

то наряду с (6.3.1) имеет место и эквивалентное условие

$$Y_{pk}(\mathbf{r}_0) = Q \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_0, t) dt \leq c_k. \quad (6.3.5)$$

Именно этим соотношением мы воспользуемся для определения области возможного размещения предприятия. В самом деле, предположим, что задача (6.3.3) решена и мы имеем  $\varphi_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ . Найдем величину  $Y_{pk}(\mathbf{r})$  по формуле

$$Y_{pk}(\mathbf{r}) = Q \int_0^T \varphi^*(\mathbf{r}, t) dt \quad (6.3.6)$$

и проведем изолинии  $Y_{pk}(\mathbf{r}) = \text{const}$ .

Искомую область обозначим  $\omega_k \subset \Sigma_0$ . Таким образом, мы в явном виде получили область  $\omega_k$ , где возможно размещение промышленного предприятия. Далее вступают в действие экологические и другие критерии выбора наиболее благоприятного места для строительства. Если окажется, что области  $\omega_k$  внутри  $\Sigma_0$  не существует, то, уменьшая  $Q$ , мы всегда добьемся ее появления. Это, естественно, накладывает определенные ограничения на выбросы, а возможно, и на технологию предприятия. Предположим далее, что таких экологически значимых зон  $\Omega_k$  несколько ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). В таком случае требуется решить уже  $m$  сопряженных задач вида (6.3.3) и получить  $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*$ . С помощью этих решений сформулируем  $m$  функционалов

$$Y_{pk}(\mathbf{r}_0) = Q \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_0, t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6.3.7)$$

и получим соответственно  $m$  ограничений

$$Y_{pk}(\mathbf{r}_0) \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.3.7')$$

Далее, для каждой зоны  $\Omega_k$  найдем область возможного размещения предприятия  $\omega_k$ . Пересечение всех областей  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) и даст нам область  $\omega$  для сооружения предприятия, в котором будут соблюдены санитарные нормы загрязнения всех зон  $\Omega_k$ . Эта ситуация представлена на рисунке 6.5, где изображены поля изолиний, полученные при наличии нескольких охраняемых зон.

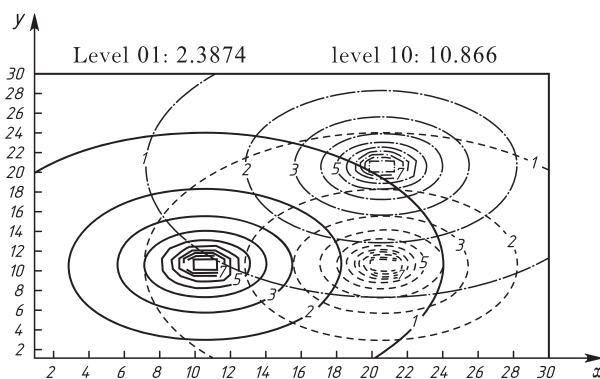


Рис. 6.5

Итак, область  $\omega$  возможного расположения промышленного предприятия найдена. Если при заданном  $Q$  ее не существует, то, уменьшая  $Q$ , мы всегда можем добиться ее появления.

С учетом изложенного, в настоящее время в целях охраны окружающей среды реальна постановка задачи по составлению для каждого экологического района программы размещения промышленных предприятий, выбрасывающих часть отходов производства в виде аэрозолей в атмосферу. Для каждого региона  $\Sigma_0$  необходимо составить климатические карты полей ветра с учетом особенностей рельефа. На основе этих данных следует решить сопряженные задачи и найти функции  $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*$ ; последние используются для получения функционалов  $Y_{pk}(\mathbf{r})$ , которые определяют области возможного строительства объектов и допустимые нормы выбросов. Эту работу в первую очередь нужно осуществлять при планировании строительства объектов во вновь развиваемых экономических регионах, где возможно принятие разумных, с точки зрения охраны окружающей среды, решений; этот критерий в будущем будет становиться приоритетным.

## 6.4. Проблема минимакса

Сформулированные в § 6.3 принципы позволяют подойти к решению проблемы минимакса, которую опишем следующим образом. Пусть  $G$  – замкнутая область пространства с границей  $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_H$ . Внутри области  $G$  на  $\Sigma_0$  располагается  $m$  экологически значимых зон, подлежащих особой охране от промышленных загрязнений; обозначим их  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ . Для каждой из них с помощью решения сопряженных задач (6.3.3) построим функционалы  $Y_{p1}, Y_{p2}, \dots, Y_{pm}$ . Далее для любой точки  $M(\mathbf{r}_0) \in G$  возможного расположения промышленного предприятия, выбрасывающего аэрозоль мощностью  $Q$  в единицу времени на высоте  $h$ , рассмотрим функционал

$$Y_p(\mathbf{r}) = \max_k Y_{pk}(\mathbf{r}). \quad (6.4.1)$$

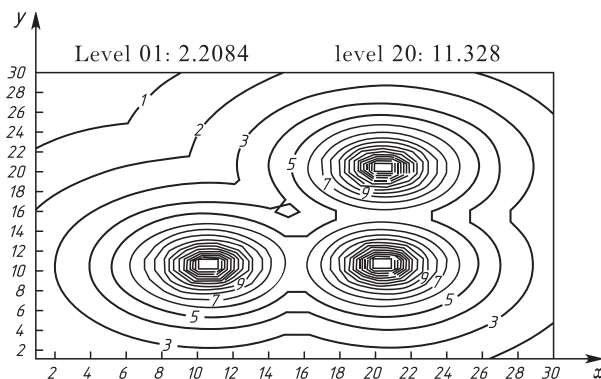


Рис. 6.6

Тогда минимальное для всех зон  $\Omega_k$  загрязнение будет иметь место в том случае, когда точка  $M(\mathbf{r})$  выбирается из условия

$$\max_k Y_{pk}(\mathbf{r}) = \min_{M \in \omega}, \quad (6.4.2)$$

откуда прямым перебором значений функционала  $\max_k Y_{pk}(\mathbf{r})$  во всех точках области  $\omega$  находим точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$ , где выполняется условие (6.4.2). Это тот весьма редкий случай, когда проблема минимакса для сложной задачи математической физики с помощью сопряженной задачи решается в явном виде на основе однократного перебора функционалов. Изолинии функционала  $Y_p(x, y)$ , характеризующие качественную сторону дела при наличии трех экологически значимых

зон, представлены на рисунке 6.6. Типы ветровых циркуляций здесь те же, что и для рисунка 6.5.

## 6.5. Обобщенная задача оптимизации размещения промышленного предприятия

Итак, мы пришли к двум постановкам задачи выбора региона допустимого расположения предприятия с учетом его промышленных выбросов. Глобальная оценка загрязнения в задаче на оптимизацию решается для всего региона  $\Sigma_0$ , но она может не удовлетворять специфическим условиям для всех его экологически значимых зон  $\Omega_k$ . Многокритериальная задача решается в отношении всех экологически значимых зон, но она не полностью учитывает опасность загрязнения в остальных областях этого региона, хотя в принципе весь регион  $\Sigma_0$  можно покрыть зонами  $\Omega_k$ , так что  $\cup \Omega_k = \Sigma_0$ , и для всех зон решить сопряженные задачи. Это путь возможный, но трудный, поскольку таких зон может быть очень много. Между тем комбинация обеих задач может привести нас к успеху. В самом деле, сначала решается многокритериальная задача и находится область  $\omega_k$  возможного расположения промышленного объекта при условии соблюдения санитарных норм для всех зон  $\Omega_k$ . После этого решается задача о глобальной оценке загрязнения всего региона. В результате получаем область допустимого размещения предприятий из условия ограничения экологической нагрузки от загрязнения на всю окружающую среду региона  $\Sigma_0$ . Пусть это будет область  $\omega_G$ . Тогда пересечение областей  $\omega_k, \omega_G$  даст область расположения объекта, для которой удовлетворены оба условия. Обозначим ее  $\omega_c$ .

На рисунке 6.7 иллюстрируется указанная методика. Здесь представлены изолинии функционалов, полученных в результате решениях сопряженных задач с правыми частями вида

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \text{ при } (x, y) \in G, \\ p_2 &= 1 \text{ при } (x, y) \in G_1, \end{aligned}$$

где  $G_1$  – охраняемая зона в центре рисунка. Сплошные линии соответствуют локальному критерию, штриховые – глобальному (1-й уровень 1,0602, 10-й уровень 2,0584). Компоненты вектора скорости полагались равными  $u = 10$  м/с,  $v = 0$ .

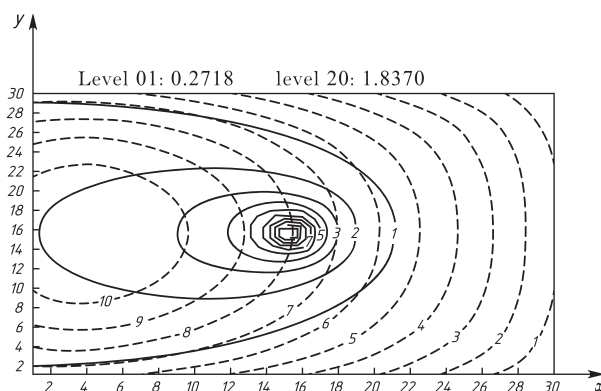


Рис. 6.7

В заключение отметим, что к проблеме оптимизации мы будем возвращаться еще не раз, усиливая ограничения за счет факторов, связанных с восстановлением экологии загрязненной среды, ее амортизацией. Но все это – уже проблемы экономического характера, и они будут изложены в § 6.7–6.9.

## 6.6. Некоторые общие замечания

До сих пор предполагалось, что на границе области  $G$  (на  $\Sigma$ ) плотность аэрозолей равна нулю. Во многих случаях это условие неоправданно, поскольку через границу  $\Sigma$  аэрозоли одного региона могут транспортироваться в другой. Поэтому такой эффект внешнего загрязнения промышленности объектами, расположенными в соседних регионах, должен учитываться. В данном регионе могут уже работать промышленные предприятия, выбрасывающие в атмосферу аналогичный аэрозоль. Учет этого фактора может быть произведен без нарушения принципиальной схемы решения оптимизационных задач, изложенных в § 6.1–6.5. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \text{div} \mathbf{u} \varphi' + \sigma \varphi' - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \mu \Delta \varphi' &= q + Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \\
 \varphi' &= f_s \text{ на } \Sigma, \\
 \partial \varphi' / \partial z &= \alpha \varphi' \text{ на } \Sigma_0, \\
 \partial \varphi' / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\
 \varphi'(\mathbf{r}, T) &= \varphi'(\mathbf{r}, 0),
 \end{aligned}
 \tag{6.6.1}$$

где  $q(x, y, z)$  – источник аэрозоля от действующих промышленных объектов, а  $f_s$  – интенсивность аэрозоля, транспортируемого через границу области  $G$  из областей, соседних с  $\Sigma_0$ . Тогда в силу линейности задачи решение задачи (6.6.1) представимо в виде суммы  $\varphi' = \varphi^0 + \varphi$ , где  $\varphi^0$  – удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^0 + \sigma \varphi^0 - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^0 &= q, \\ \varphi^0 &= f_s \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi^0 / \partial z &= \alpha \varphi^0 \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi^0 / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi^0(\mathbf{r}, T) &= \varphi^0(\mathbf{r}, 0), \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

а  $\varphi$  удовлетворяет уже знакомой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi &= Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \\ \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi(\mathbf{r}, T) &= \varphi(\mathbf{r}, 0). \end{aligned} \tag{6.6.3}$$

Теперь необходимо связать функционалы задачи (6.6.1) с аналогичными функционалами задач (6.6.2), (6.6.3). Рассмотрим функционал

$$Y'_{pk} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi' dG_k, \tag{6.6.4}$$

где

$$p_{ck} = \begin{cases} b_k + \alpha_k \delta(z) & \text{на } G_k, \\ 0 & \text{вне } G_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Предположим, что для функционалов  $Y'_{pk}$  имеются ограничения

$$Y'_{pk} \leq c_k. \tag{6.6.5}$$

Подставим теперь в (6.6.4) вместо  $\varphi'$  сумму  $\varphi^0 + \varphi$ . Получим

$$Y'_{pk} = Y^0_{pk} + Y_{pk}, \tag{6.6.6}$$

где

$$Y_{pk}^0 = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi^0 dG_k, \quad Y_{pk} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi dG_k. \quad (6.6.7)$$

С учетом (6.6.6) ограничение (6.6.5) переписывается в виде

$$Y_{pk}^0 + Y_{pk} \leq c_k, \quad (6.6.8)$$

или  $Y_{pk} \leq c_k - Y_{pk}^0$ . Приняв  $c_k - Y_{pk}^0 = \bar{c}_k$ , приходим к искомому ограничению для задачи (6.6.3)

$$Y_{pk} \leq \bar{c}_k \quad (6.6.9)$$

и к уже изученной нами задаче, но с новыми ограничениями. Функционалы  $Y^0$  находятся в результате решения задачи (6.6.2).

Следующее замечание относится к локальным по времени функционалам. Всюду предполагалось, что основные функционалы являются интегральными величинами по всему интервалу времени  $0 \leq t \leq T$ , т. е. мы исходили из предположения, что оптимизирующий функционал связан с суммарной годовой дозой выпавшего и находящегося во взвешенном состоянии над зоной  $\Sigma_k$  аэрозоля. В этом предположении, однако, не были учтены возможные кратковременные, но очень интенсивные аэрозольные выбросы, связанные с внезапной переменной направления и скорости движения воздушных масс. Они могут существенно влиять на загрязнения зон области  $\Sigma_0$ , хотя в среднем годовая санитарная доза загрязнения от такого аэрозоля не будет превышать установленной. Это значит, что наряду с исследуемыми функционалами суммарной годовой нормы можно ввести в рассмотрение локальные по времени функционалы (за периоды, характерные для изменчивости метеорологических ситуаций).

Пусть в данном регионе осуществляется  $j_0$  типичных метеорологических ситуаций, причем суммарная годовая длительность каждой равна  $\Delta t_j$ . Суммируя по всем  $j = 1, 2, \dots, j_0$ , получаем

$$\sum_{j=1}^{j_0} \Delta t_j = T.$$

Пренебрегая переходными процессами, в предположении аддитивности можно считать общий процесс непрерывным во времени с произвольным чередованием метеорологических ситуаций различного типа и решить  $j_0$  различных основных задач (см. гл. 5):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \varphi_j + \sigma \varphi_j - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_j = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$



$$\begin{aligned}
\varphi_j &= 0 \text{ на } \Sigma, \\
\partial\varphi_j/\partial z &= \alpha\varphi_j \text{ на } \Sigma_0, \\
\partial\varphi_j/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H.
\end{aligned} \tag{6.6.10}$$

Заметим, что если пренебречь переходными эффектами, то решение задачи (6.6.10) может быть получено с помощью следующей нестационарной задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \mu\Delta\varphi &= Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \\
\varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\
\partial\varphi/\partial z &= \alpha\varphi \text{ на } \Sigma_0, \\
\partial\varphi/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\
\varphi(\mathbf{r}, t_{j+1}) &= \varphi(\mathbf{r}, t_j),
\end{aligned} \tag{6.6.11}$$

где  $t_j, t_{j+1}$  – границы обобщенного временного интервала  $\Delta t_j$ , на котором развивается типичная метеорологическая ситуация.

Тогда

$$\varphi_j = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi \, dt. \tag{6.6.12}$$

Наряду с основной задачей (6.6.10) рассмотрим сопряженную задачу

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}\mathbf{u}\varphi_{jk}^* + \sigma\varphi_{jk}^* - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi_{jk}^*}{\partial z} - \mu\Delta\varphi_{jk}^* &= p_{ck}, \\
\varphi_{jk}^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\
\partial\varphi_{jk}^*/\partial z &= \alpha\varphi_{jk}^* \text{ на } \Sigma_0, \\
\partial\varphi_{jk}^*/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H,
\end{aligned} \tag{6.6.13}$$

где

$$p_{ck} = \begin{cases} b_k + \alpha_k\delta(z) & \text{на } G_k, \\ 0 & \text{вне } G_k. \end{cases}$$

Решение задачи (6.6.13) также может быть найдено с помощью нестационарной задачи

$$-\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{u}\varphi_k^* + \sigma\varphi_k^* - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial z} - \mu\Delta\varphi_k^* = p_{ck},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\
\partial\varphi_k^*/\partial z &= \alpha\varphi_k^* \text{ на } \Sigma_0, \\
\partial\varphi_k^*/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\
\varphi_k^*(\mathbf{r}, t_{j+1}) &= \varphi_k^*(\mathbf{r}, t_j).
\end{aligned} \tag{6.6.14}$$

Тогда

$$\varphi_{jk}^* = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_k^* dt.$$

Введем в рассмотрение функционалы

$$\begin{aligned}
Y_{pjk} &= \int_{G_k} p_{ck} \varphi_j dG_k, \quad Y_{pjk} = Q\varphi_{jk}^*(\mathbf{r}_0), \\
j &= 1, 2, \dots, j_0; \quad k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{6.6.15}$$

Имея набор сопряженных задач, введем аналогично предыдущему неравенство

$$Y_{pjh} \leq c_{jk}, \tag{6.6.16}$$

где  $c_{jk}$  – предельно допустимые санитарные дозы загрязнения. В результате задача сводится к нахождению областей  $\omega_{kj}$ , в пределах которых возможно строительство объекта по санитарным нормам в отношении к зоне  $\Omega_k$ . Пересечение областей  $\omega_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0$ ) обозначим через  $\bar{\omega}_k$ . Именно эта область будет удовлетворять всем требованиям с учетом всех типов метеорологических процессов, участвующих в переносе и диффузии аэрозоля.

Отсюда следует, что пересечение всех  $\bar{\omega}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) дает область  $\bar{\omega}_c$ , в которой с точки зрения санитарных норм и с учетом типизации метеорологических процессов можно безопасно выбирать место расположения объекта.

## 6.7. Стоимость потерь продуктов биосферы при загрязнении окружающей среды промышленными выбросами

В предыдущих параграфах была рассмотрена проблема размещения промышленных предприятий с учетом предельно допустимых санитарных доз данного региона. В настоящем параграфе вводится новый

функционал, связанный с экономическими затратами на восстановление окружающей среды, нарушаемой загрязнением предприятий. Этот функционал вместе с рассмотренными выше дает достаточно полное представление о возможных последствиях загрязнения биосферы и экономических затратах на экологическое восстановление окружающей среды.

Поскольку, за редким исключением, промышленные выбросы приводят к угнетению жизни растительного и животного мира – птиц, рыб, моллюсков, насекомых, полезных бактерий и других компонентов биосферы, представляется естественным дать некоторую интегральную по всему региону  $\Sigma_0$  оценку стоимости потерь от загрязнений промышленными выбросами.

С этой целью введем в рассмотрение дифференциальные характеристики, описывающие количество биомассы данного компонента  $l$ , которое теряется в результате загрязнения аэрозолем  $j$  в расчете на единицу площади в единицу времени единичной концентрацией аэрозоля. Обозначим эту величину через  $n_l b_{jl}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, s$ ), где  $n_l(x, y)$  – плотность  $l$ -й популяции в регионе  $\Sigma_0$ ;  $b_{jl}$  – потеря в биомассе этой популяции в расчете на единичную плотность. Тогда полные потери компоненты биомассы  $l$  от загрязнения аэрозолем с концентрацией  $\varphi_j$  в регионе  $\Sigma_0$  за год определяются формулой

$$\beta_{lj} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} n_l b_{lj} \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.7.1)$$

Пусть  $\beta_l$  – цена единицы компоненты биомассы. Тогда стоимость потерь в результате загрязнения будет равна

$$c_{lj} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \beta_l n_l b_{lj} \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.7.2)$$

Просуммируем  $c_{lj}$  по всем компонентам  $l$ :

$$c_j = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_0^j \varphi_j d\Sigma_0, \quad (6.7.3)$$

где

$$p_0^j = \sum_{l=1}^s n_l \beta_l b_{jl}. \quad (6.7.4)$$

Величины  $b_{jl}$ , характеризующие оценку физиологического угнетения компонентов биосферы аэрозолями данного сорта, получаются на основе экспериментальных исследований. Заметим лишь, что при больших концентрациях загрязнений, функции  $b_{jl}$  перестают быть линейными. Если теперь просуммировать результат по всем компонентам аэрозолей, выбрасываемых промышленным предприятием, то получим полную стоимость потерь биосферы в регионе  $\Sigma_0$ :

$$c = \sum_{j=1}^m \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_0^j \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.7.5)$$

Переходим теперь к формулировке задачи на оптимизацию. Рассмотрим  $m$  задач, соответствующих основным компонентам выбросов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi_j + \sigma \varphi_j - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_j &= Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \\ \varphi_j &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi_j / \partial z &= \alpha \varphi_j \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi_j / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi_j(\mathbf{r}, T) &= \varphi_j(\mathbf{r}, 0), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (6.7.6)$$

и  $m$  сопряженных задач:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_j^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi_j^* + \sigma \varphi_j^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_j^* &= p_0^j \delta(z), \\ \varphi_j^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi_j^* / \partial z &= \alpha \varphi_j^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi_j^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi_j^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi_0(\mathbf{r}, 0), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

Будем считать, что задачи (6.7.6) и (6.7.7) решены. Рассмотрим функционал

$$I_j = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_0^j \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.7.8)$$

Двойственная его форма записывается с помощью решения сопряженного уравнения и имеет вид

$$I_j = Q_j \int_0^T \varphi_j^*(\mathbf{r}_0, t) dt. \quad (6.7.9)$$

Важно отметить, что в случае рассматриваемого функционала для фиксированного аэрозоля задача (6.7.7) решается всего один раз. Далее вычисляется функция  $\varphi^*(\mathbf{r}, t)$  и находится область  $\omega_B$ , где обеспечивается минимальная потеря биомассы при загрязнении окружающей среды. Так, наряду с введенной в предыдущих параграфах областью  $\omega_c$ , обеспечивающей удовлетворение санитарных норм для наиболее значимых экологических объектов, появляется область  $\omega_B$ , обеспечивающая выполнение условия допустимой стоимости потерь окружающей среды региона  $\Sigma_0$ . Пересечение этих областей дает наиболее благоприятный район для размещения нового промышленного объекта (рис. 6.8).

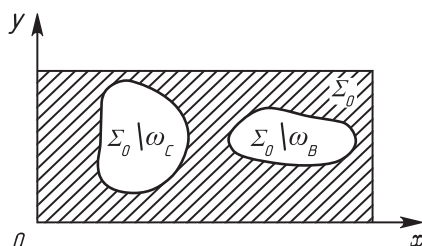


Рис. 6.8

Рассмотрим теперь многокомпонентную смесь пассивного аэрозоля, который при распространении не переходит в другие химические соединения, и поэтому  $\sigma_j = 0$ . Предположим, что аэрозоль легкий и состоит из окислов различных соединений. Это значит, что вся смесь распространяется по одному закону. В этом случае задачи (6.7.6) и (6.7.7) можно сформулировать сразу для плотности смеси.

Пусть выход источников  $Q_j$  данных компонентов аэрозоля нам известен и

$$Q_j/Q = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.7.10)$$

Аналогично полагаем

$$\varphi_j = \gamma_j \varphi, \quad \varphi_j^* = \gamma_j \varphi^*, \quad (6.7.11)$$

где

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1. \quad (6.7.12)$$

Из (6.7.10), (6.7.11) с учетом (6.7.12) следует, что

$$\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j, \quad \varphi^* = \sum_{j=1}^m \varphi_j^*, \quad Q = \sum_{j=1}^m Q_j. \quad (6.7.13)$$

Просуммируем теперь каждое из соотношений (6.7.6) по  $j$  с использованием (6.7.4). Получим задачу распространения смеси аэрозолей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi &= Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \\ \varphi &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi(\mathbf{r}, T) &= \varphi(\mathbf{r}, 0). \end{aligned} \quad (6.7.14)$$

Аналогично приходим к сопряженной задаче для смеси:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* &= p_0 \delta(z), \\ \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi_0(\mathbf{r}, 0), \end{aligned} \quad (6.7.15)$$

где  $p_0 = \sum_{j=1}^m p_0^j$ .

Таким образом, исследуемый функционал – стоимость потерь биосферы в регионе  $\Sigma_0$  – имеет вид

$$I = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_0 \varphi \, d\Sigma_0, \quad (6.7.16)$$

или

$$I = Q \int_0^T \varphi^*(\mathbf{r}_0, t) dt; \quad (6.7.17)$$

здесь

$$p_0 = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^s n_l \beta_l b_{jl} = \sum_{l=1}^s n_l \beta_l b_l, \quad b_l = \sum_{j=1}^m b_{jl}. \quad (6.7.18)$$

После того как задача (6.7.15) решена и расположение планируемого объекта определено, находится решение  $\varphi$  задачи (6.7.14) и далее с помощью (6.7.11) производится пересчет на покомпонентные плотности  $\varphi_j = \gamma_j \varphi$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Вместе с этим уточняется дифференциальное распределение плотности аэрозолей в рассматриваемом регионе  $\Sigma_0$ . Если законы распространения аэрозолей  $\varphi_j$  различны, то задача нахождения полной дозы  $s$  потребует решения  $m$  задач.

В заключение отметим следующее. Для проведения указанных расчетов наиболее существенным звеном во входных задачах является определение коэффициентов  $b_{lj}$ . Эта задача весьма нетривиальна, поскольку требует либо одновременного слежения за всеми компонентами биосферы, находящимися в зоне загрязнений в течение многих лет, либо построения сложных биоценозных математических моделей, которые учитывали бы взаимодействие компонентов биосферы возможно полнее. Приведем пример. Предположим, что аэрозоль  $\varphi_j$  оказался губительным для насекомых. Это повлечет за собой резкое уменьшение популяции насекомоядных птиц, что в свою очередь отразится на хищных птицах, питающихся насекомоядными птицами и грызунами. В результате возрастет популяция грызунов и увеличатся потери зерна на полях и т. д. Поэтому проблеме определения коэффициентов  $b_{jl}$  следует уделить самое пристальное внимание, поскольку она имеет важное значение для планирования развития промышленности и прогноза экологического ее воздействия на окружающую среду.

## 6.8. Экономика природных ресурсов

Мы коснулись вопроса стоимости потерь в различных компонентах биосферы при загрязнении окружающей среды. Но это только одна сторона дела. Другая состоит в проведении восстановительных работ по улучшению или по крайней мере по сохранению экологического

режима регионов. В самом деле, если, например, загрязнение водоемов уменьшает воспроизводство рыбы в результате угнетения нереста, то строятся рыбзаводы по выращиванию молоди, которая пополняет популяцию рыбы в водоеме до оптимальных масштабов, связанных с ресурсом корма для рыб. Если уменьшается урожай сельскохозяйственных культур, то он должен быть поднят улучшением агротехники, внесением органических и минеральных удобрений, мелиорацией. Если уменьшается популяция зверей, то создаются особые условия подкормки, ухода, устанавливается запрет на отстрел и т. д.

Таким образом, ущерб, нанесенный природе (особенно живой) за счет загрязнения, должен компенсироваться планируемыми дополнительными отчислениями предприятий из прибыли от производства. Эти отчисления должны быть так же обязательны, как и отчисления на амортизацию оборудования.

Сформулируем математическую модель оценки таких обязательных затрат. Пусть  $p_l$  – стоимость мероприятий, направленных на восстановление единицы массы  $l$ -го компонента биосферы, угнетенного вредными промышленными выбросами, до первоначального уровня. Подсчитаем потерю  $j$ -го компонента биомассы:

$$\Delta M = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} n_l b_{jl} \varphi_j d\Sigma. \quad (6.8.1)$$

Тогда стоимость восстановительных мероприятий будет равна

$$R_{jl} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_l n_l b_{jl} \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.8.2)$$

Суммируя (6.8.2) по  $l$  и  $j$ , получаем

$$R_g = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^s \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} p_l n_l b_{jl} \varphi_j d\Sigma_0. \quad (6.8.3)$$

Это выражение запишем в виде

$$R_g = \sum_{j=1}^m \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \xi_j \varphi_j d\Sigma_0, \quad (6.8.4)$$



где

$$\xi_j = \sum_{l=1}^s p_l n_l b_{jl}. \quad (6.8.5)$$

Если предположить, что вредные промышленные выбросы легкие и неразложимые, то  $\sigma_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Тогда с учетом (6.7.11) запишем

$$R_g = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \xi \varphi \, d\Sigma_0, \quad (6.8.6)$$

где

$$\xi = \sum_{j=1}^m \gamma_j \xi_j. \quad (6.8.7)$$

Теперь можно сформулировать сопряженную задачу по отношению к функционалу  $R_g$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* &= \xi \delta(z), \\ \varphi^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= \alpha \varphi^* \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi^* / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H, \\ \varphi^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi^*(\mathbf{r}, 0). \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

Тогда на основе общей теории имеем два равенства:

$$R_g = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \xi \varphi \, d\Sigma, \quad R_g = Q \int_0^T \varphi^*(\mathbf{r}_0, t) dt. \quad (6.8.9)$$

Для решения  $\varphi^*(\mathbf{r}, t)$  построим график функции  $R_g(\mathbf{r}_0)$ , представленный на рис. 6.9.

С помощью указанного алгоритма найдем область  $\omega_R$ , для которой при эксплуатации промышленного объекта амортизационные расходы по восстановлению загрязнений окружающей среды будут меньше некоторой установленной нормы:  $R_g \leq B_R$ . Итак, при планировании размещения индустриального объекта, выбрасывающего вредные аэрозоли, приходим к трем критериям.

1. Загрязнение наиболее важных в экологическом аспекте зон должно удовлетворить предельно допустимым санитарным нормам. В результате приходим к области  $\omega_c \subset \Sigma_0$ .

2. Стоимость потерь биологических ресурсов при загрязнении должна быть минимальной. Здесь приходим к области  $\omega_B \subset \Sigma_0$ .

3. Стоимость амортизационных расходов на восстановление биологических ресурсов, сниженных за счет загрязнения окружающей среды, должна быть минимальной. Отсюда приходим к области  $\omega_R \subset \Sigma_0$ .

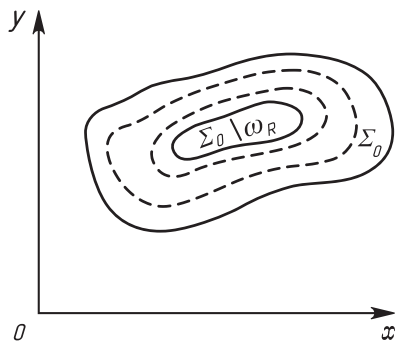


Рис. 6.9

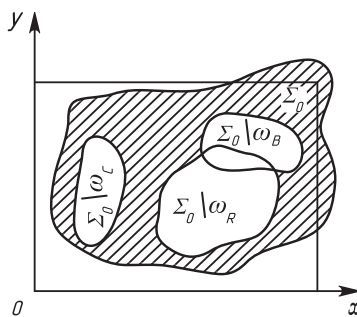


Рис. 6.10

При пересечении названных областей получаем наиболее удобную для строительства нового промышленного предприятия область, которая на рисунке 6.10 заштрихована. Если пересечение областей пусто, то необходимо изменить предельно допустимые экономические критерии.

Был рассмотрен случай, когда каждый компонент аэрозоля ведет себя как вся смесь. Если имеется разнообразие в распространении отдельных компонентов аэрозоля, то необходимо все задачи решать для каждого компонента  $j$ . В результате приходим к более сложной, но более общей задаче пересечения  $3j$  отдельных областей.

## 6.9. Общий экономический критерий

Может случиться, что пересечение областей, для которых в заданном регионе  $\Sigma_0$  выполняются все критерии оптимизации, пусто. Тогда необходимо либо ослаблять те или иные ограничения на исследуемые функционалы, либо увеличивать размеры рассматриваемого региона. Такие изменения оптимизационной задачи в принципе носят эвристический характер и не являются строго детерминированным процессом.

С другой стороны, сформулированные в предыдущих главах критерии оптимизации, строго говоря, позволяют однозначно выделить зоны, в которых размещение промышленных предприятий недопустимо. Для локализации областей, в которых размещение промышленных предприятий экономически оправдано, необходима дополнительная информация. Поэтому в настоящем параграфе введем в рассмотрение единый экономический критерий полных затрат на восстановление окружающей среды, нарушаемой в результате промышленных загрязнений, с учетом оптимального взаимного расположения индустриальных объектов и экологически важных зон.

Проблема оптимальности взаимного расположения объектов включает в себя учет значительного числа факторов, связанных с экономическими затратами на строительство в данном месте, стоимостью сооружения и эксплуатации коммуникационных линий (железных и автомобильных дорог, водопроводов, линий связи и т. д.) в конкретных условиях, перспективами развития региона в целом. Методологически эта проблема может быть типизирована следующим образом:

- планирование размещения индустриальных объектов в регионе в соответствии со сформировавшейся экологической структурой (например, строительство крупного комбината в окрестностях того или иного города);
- формирование экологической структуры вокруг промышленных объектов (например, строительство населенных пунктов в связи с предполагаемым сооружением индустриальных объектов, эксплуатирующих месторождения полезных ископаемых и поэтому «привязанных» к той или иной местности);
- одновременное планирование размещения индустриальных объектов и экологически значимых зон.

Сформулируем общий экономический критерий с учетом ситуации первого типа. Итак, обратимся к затратам на восстановление окружающей среды, в которые включаются отчисления на охрану здоровья людей, проживающих в рассматриваемом регионе, на дополнительное питание и повышение его качественного содержания, на профилактории, дома отдыха, пансионаты и лечебные учреждения.

Обозначим через  $a_{jk}$  затраты на восстановление здоровья людей в экологически значимом регионе с номером  $k$  в расчете на одного человека в год и на единичную концентрацию аэрозоля  $j$ . Пусть  $N_k$  – общая численность населения в данном регионе. Тогда стоимость восстановления здоровья людей в связи с загрязнением будет равна

$$c_{jk} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_k} a_{jk} N_k \varphi_j d\Sigma_k. \quad (6.9.1)$$

Просуммируем это выражение по всем экологически важным регионам. В результате получим

$$R_{pj} = \sum_{k=1}^n c_{jk} = \sum_{k=1}^n \int_0^T dt \int_{\Sigma_k} a_{jk} N_k \varphi_j d\Sigma_k, \quad (6.9.2)$$

или

$$R_{pj} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} P_p^j \varphi_j d\Sigma_0, \quad (6.9.3)$$

где

$$P_p^j = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{jk} N_k, & \mathbf{r} \in \bigcup_{k=1}^n \Sigma_k, \\ 0, & \text{вне области.} \end{cases}$$

Вторая часть затрат связана с уменьшением биомассы всех компонентов окружающей среды (животного мира, растительного покрова и т. д.) за счет уменьшения площадей продуктивного покрова почвы. Обозначим их через  $R_{bj}$ . В соответствии с результатами § 6.7 запишем

$$R_{bj} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} P_b^j \varphi_j d\Sigma_0, \quad (6.9.4)$$

где  $P_b^j = \sum_{l=1}^s n_l \beta_l b_{jl}$ .

Третья часть затрат связана с постоянным поддержанием продуктивности биоресурсов на заданном уровне:

$$R_{gj} = \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} P_g^j \varphi_j d\Sigma_0, \quad (6.9.5)$$

где  $P_g^j = \sum_{l=1}^s p_l n_l b_{jl}$ .

Тогда для  $m$  различных компонентов токсических примесей получим  $m$  функционалов

$$R_j = R_{pj} + R_{bj} + R_{gj}. \quad (6.9.6)$$

После суммирования имеем

$$R = \sum_{j=1}^m R_j. \quad (6.9.7)$$

Обозначим через  $c_i(\mathbf{r})$  стоимость сооружения в точке  $\mathbf{r}$  области  $\Sigma_0$  промышленного предприятия с номером  $i$ , через  $c_{ik}(\mathbf{r})$  – стоимость сооружения и эксплуатации коммуникационных линий в расчете на единицу кратчайшего расстояния между точкой  $\mathbf{r}$  сооружения  $i$ -го объекта и  $k$ -й охранной зоной (включая среднюю стоимость планируемых перевозок грузов и пассажиров), а через  $r_{ik}(\mathbf{r})$  – совокупность таких расстояний. Рассмотрим функционал

$$E_{ik}(\mathbf{r}) = c_i(\mathbf{r}) + c_{ik}(\mathbf{r})r_{ik}(\mathbf{r}), \quad (6.9.8)$$

характеризующий стоимость сооружений  $i$ -го предприятия и необходимых его связей с  $k$ -й экологической зоной. Значение функционала возрастает по мере удаления точки расположения предприятия от охраняемой зоны. Суммируя (6.9.8) по всем  $k$  и учитывая функционал (6.9.7), приходим к единому функционалу

$$I_i(\mathbf{r}_0) = R(\mathbf{r}_0) + \sum_{k=1}^n E_{ik}(\mathbf{r}_0), \quad (6.9.9)$$

линии уровней которого  $I(\mathbf{r}) = \text{const}$  дают нам локализованную область, наиболее подходящую для размещения промышленного предприятия.

Рассмотрим следующую модельную ситуацию. В точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  расположены два населенных пункта, причем население первого вдвое больше населения второго. Преобладающим в рассматриваемом регионе в течение временного цикла  $[0, T]$  является ветер, параллельный оси  $x$ . Точка с координатами  $(x_2, y_1)$  – место, где стоимость возведения промышленного предприятия минимальна. По мере удаления от этой точки стоимость увеличивается пропорционально функции вида  $\Psi(x, y) = 2 - \exp\{-\alpha[(x - x_2)^2 + (y - y_1)^2]\}$ . И наконец,

стоимость коммуникационных линий в области  $x > (x_1 + x_2)/2$  вдвое превышает стоимость коммуникаций в области  $[0, (x_1 + x_2)/2]$ .

На рисунках 6.11–6.14 показаны изолинии функционала вида (6.9.9). Разные варианты соответствуют преобладанию различных видов рассмотренных стоимостей. Рисунок 6.11 соответствует преобладанию стоимости проведения коммуникаций, т. е.

$$I_i(\mathbf{r}_0) = R(\mathbf{r}_0) + \sum_{k=1}^n (2c_i(\mathbf{r}_0) + 20c_{ik}(\mathbf{r}_0)r_{ik}(\mathbf{r}_0)).$$

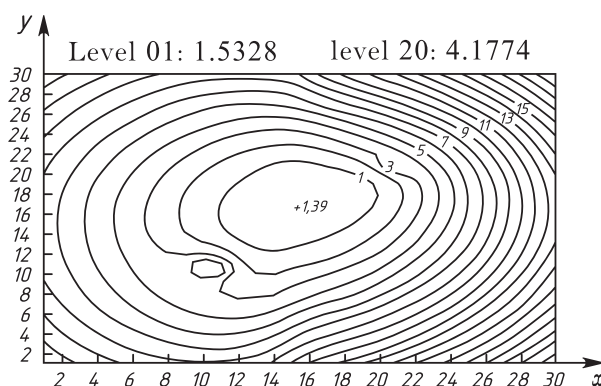


Рис. 6.11

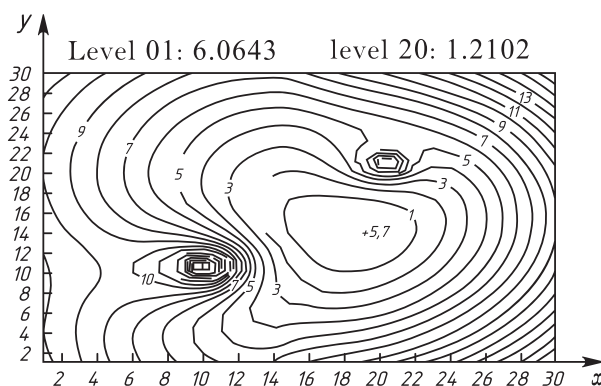


Рис. 6.12

Рисунок 6.12 соответствует большему весу стоимости возведения предприятия, причем стоимость коммуникаций сравнима со стоимостью возведения, т. е.

$$I_i(\mathbf{r}_0) = R(\mathbf{r}_0) + \sum_{k=1}^n (10c_i(\mathbf{r}_0) + 8c_{ik}(\mathbf{r}_0)r_{ik}(\mathbf{r}_0)).$$

На рисунке 6.13 изображена ситуация, при которой стоимость коммуникаций почти не превосходит остальных стоимостей, т. е.

$$I_i(\mathbf{r}_0) = R(\mathbf{r}_0) + \sum_{k=1}^n (2c_i(\mathbf{r}_0) + 4c_{ik}(\mathbf{r}_0)r_{ik}(\mathbf{r}_0)).$$

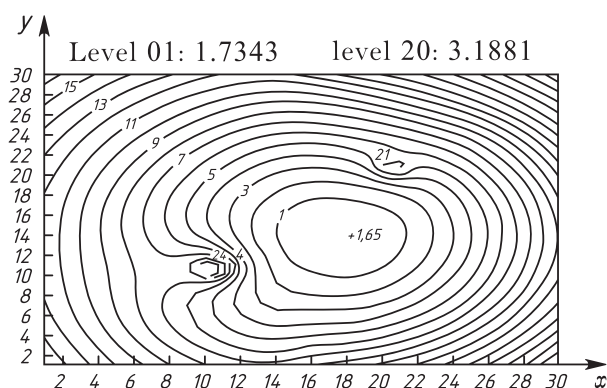


Рис. 6.13

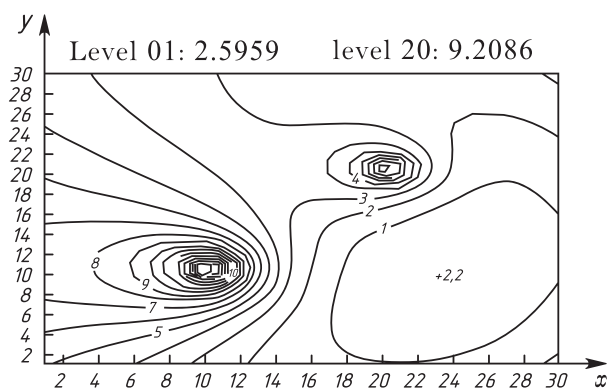


Рис. 6.14

Наконец, рисунок 6.14 соответствует случаю равенства всех видов стоимостей. Места расположения предприятий, в которых общие затраты с учетом перечисленных факторов минимальны, отмечены на рисунках крестиком с указанием суммарных для этой точки затрат в выбранных единицах измерения.

## 6.10. Математические проблемы оптимизации выбросов действующих промышленных предприятий

Охрана окружающей среды от загрязнений промышленными предприятиями становится одной из наиболее актуальных проблем науки и техники. В предыдущих параграфах был рассмотрен аспект проблемы, связанный с размещением новых индустриальных объектов, выбрасывающих в атмосферу вредные аэрозоли, с учетом минимального загрязнения близлежащих населенных пунктов, зон отдыха, сельскохозяйственных угодий и других экологически важных объектов. В настоящем параграфе будет рассмотрен другой аспект проблемы. Будем предполагать, что все промышленные предприятия в данном районе уже существуют и выбрасывают в атмосферу заданное количество вредных аэрозолей. Задача состоит в определении для каждого предприятия такого допустимого количества выбрасываемых аэрозолей, чтобы их сумма не превышала санитарно допустимых норм. В то же время существенно занижать суммарные выбросы нельзя, поскольку это приведет к снижению экономических показателей деятельности индустриальных объектов. Таким образом, речь будет идти о таких ограничениях на выбросы, которые все же обеспечат максимум экономического эффекта при заданных ограничениях.

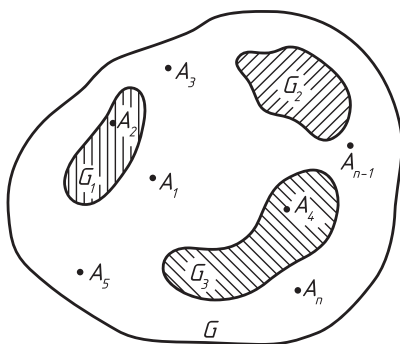


Рис. 6.15

Пусть в заданном регионе  $G$  с границей  $S$  в точках  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) расположены  $n$  промышленных объектов  $A_i$ , ежесекундно выбрасывающих  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) аэрозолей, состав которых для простоты будем считать одинаковым (рис. 6.15). В области  $G$  выделим  $m$  эко-



логических зон  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), для каждой из которых заданы предельно допустимые концентрации выпавшего за интервал времени  $[0, T]$  аэрозоля. В результате приходим к следующей математической постановке задачи.

Дано уравнение диффузии субстанций от  $n$  индустриальных объектов

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi = \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (6.10.1)$$

при условии

$$\begin{aligned} \varphi &= f_s \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi / \partial z &= \alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{aligned} \quad (6.10.2)$$

Считая задачу (6.10.1), (6.10.2) климатически периодической (с периодом, равным году), получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, T) = \varphi(\mathbf{r}, 0). \quad (6.10.3)$$

Здесь компоненты вектора скорости ветра  $\mathbf{u}$  связаны в каждый момент времени соотношением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

при условии, что  $\omega = 0$  при  $z = 0$ ,  $z = z_H$ ;  $\nu, \mu$  – коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена,  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ . Коэффициент  $\alpha$  характеризует вероятность выпавшей на поверхность земли субстанции аэрозоля снова попасть в атмосферу, а  $f_s$  – источники аэрозоля на  $\Sigma$ .

Рассмотрим функционал

$$Y_k = \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \varphi dG_k, \quad (6.10.4)$$

который характеризует санитарную долю аэрозоля, выпавшего на поверхность земли ( $z = 0$ ) в области экологической зоны  $G_k$ . Задача состоит в том, чтобы найти такую совокупность планируемых выбросов аэрозолей  $Q_i$ , которая обеспечивала бы среднегодовые предельно допустимые дозы аэрозольного загрязнения

$$Y_k \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10.5)$$

при минимальных экономических затратах на технологическую реконструкцию предприятий, обеспечивающую установленный объем выпуска продукции при заданном уменьшении выбросов.

Естественно, что в данной задаче наряду с ограничениями (6.10.5) необходимо ввести в рассмотрение минимизирующий функционал; в качестве такового примем

$$I = \sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i), \quad (6.10.6)$$

где  $\bar{Q}_i$  – исходная, а  $Q_i$  – планируемая мощность выбросов, коэффициент  $\xi_i$  определяет капитальные вложения в технологию, обеспечивающую выпуск того же объема продукции при уменьшении выбросов (в расчете на единицу мощности выбросов). Тогда функционал  $I$  представляет собой полные затраты, необходимые для улучшения технологии всех предприятий  $A_i$  при переходе от выбросов  $\bar{Q}_i$  к планируемым выбросам  $Q_i$ . В результате приходим к задаче о нахождении в (6.10.1)–(6.10.3) таких выбросов  $Q_i$ , чтобы выполнялись условия

$$I = \sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i) = \min, \quad (6.10.7)$$

$$Y_k \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Задачу (6.10.1)–(6.10.3), (6.10.7) можно свести к задаче линейного программирования. При этом возможны два различных подхода, один из которых реализуем с помощью основных уравнений, другой – с помощью сопряженных уравнений.

Сначала осуществим оптимизацию с помощью основных уравнений. С этой целью решение задачи (6.10.1)–(6.10.3) представим в виде суперпозиции решений элементарных задач. Пусть

$$\varphi = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i(\mathbf{r}, t) + \varphi_S, \quad (6.10.8)$$

где  $\varphi_i(\mathbf{r}, t)$  есть решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \sigma \varphi_i - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (6.10.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\varphi_i &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial\varphi_i/\partial z &= \alpha\varphi_i \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial\varphi_i/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H\end{aligned}\tag{6.10.10}$$

и условием

$$\varphi_i(\mathbf{r}, T) = \varphi_i(\mathbf{r}, 0).\tag{6.10.11}$$

Наряду с задачей (6.10.9)–(6.10.11) для  $i = 1, 2, \dots, n$ , введем в рассмотрение еще одну задачу для определения фона аэрозолей, приходящих в область  $G$  через границу  $S$ :

$$\frac{\partial\varphi_S}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u}\varphi_S + \sigma\varphi_S - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi_S}{\partial z} - \mu\Delta\varphi_S = 0\tag{6.10.12}$$

при условиях

$$\begin{aligned}\varphi_S &= f_s \text{ на } \Sigma, \\ \partial\varphi_S/\partial z &= \alpha\varphi_S \text{ на } \Sigma_0,\end{aligned}\tag{6.10.13}$$

$$\begin{aligned}\partial\varphi_S/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H; \\ \varphi_S(\mathbf{r}, T) &= \varphi_S(\mathbf{r}, 0).\end{aligned}\tag{6.10.14}$$

Предположим, что каждая из задач (6.10.9)–(6.10.11) при  $i = 1, 2, \dots, n$ , а также задача (6.10.12)–(6.10.14) решены. Тогда правомочно представление (6.10.8), которое теперь используем для вычисления функционалов  $Y_k$ . В самом деле, подставляя (6.10.8) в (6.10.4), получаем

$$Y_k = \sum_{i=1}^n Q_i a_{ik} + b_k,\tag{6.10.15}$$

где

$$\begin{aligned}a_{ik} &= \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \varphi_i(\mathbf{r}, t) dG_k, \quad b_k = \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \varphi_S(\mathbf{r}, t) dG_k, \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Теперь  $a_{ik}, b_k$  – уже известные константы. Объединяя (6.10.14) и (6.10.15), приходим к задаче

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i) &= \min, \\ \sum_{i=1}^n Q_i a_{ik} + b_k &\leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{6.10.16}$$

От  $Q_i$  удобно перейти к  $q_i = \bar{Q}_i - Q_i \geq 0$ . Тогда приходим к задаче линейного программирования по отысканию оптимального набора на основе решения задачи

$$\sum_{i=1}^n \xi_i q_i = \min, \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} q_i \geq R_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10.17)$$

$$q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$R_k = \sum_{i=1}^N a_{ik} \bar{Q}_i + b_k - c_k.$$

Естественно, что количество ограничений может быть увеличено за счет требований социального и экономического характера, вытекающих из тех или иных приоритетных соображений. Теперь проведем оптимизацию с помощью сопряженной задачи. В соответствии с результатами главы 5 сопряженная по отношению к (6.10.9)–(6.10.11) задача имеет вид

$$-\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{u} \varphi_k^*) - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_k^* = p_k, \quad (6.10.18)$$

$$\varphi_k^* = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\partial \varphi_k^* / \partial z = \alpha \varphi_k^* \text{ на } \Sigma_0, \quad (6.10.19)$$

$$\partial \varphi_k^* / \partial z = 0 \text{ на } \Sigma_H;$$

$$\varphi_k^*(\mathbf{r}, T) = \varphi_k^*(\mathbf{r}, 0).$$

Правая часть  $p_k$  уравнения (6.10.18) определяет функционал  $Y_p$  из (6.10.4), так что

$$p_k = \begin{cases} p_c & \text{на } G_k, \\ 0 & \text{вне } G_k. \end{cases}$$

Рассмотрим функционал  $a_{ik}$  из (6.10.15):

$$a_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \varphi_i(\mathbf{r}, t) dG_k, \quad (6.10.20)$$

где  $\varphi_i$  – решение основной задачи (6.10.9)–(6.10.11). Обычным образом (см. гл. 5) приходим к двойственному виду для функционала (6.10.20):

$$a_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \varphi_i(\mathbf{r}, t) dG_k = \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_i, t) dt, \quad (6.10.21)$$

где  $\varphi_k^*$  – решение сопряженной задачи (6.10.18), (6.10.19). Примем обозначения

$$a_{ik}^* = \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_i, t) dt, \quad b_k^* = \int_0^T dt \int_G p_k \varphi_S(\mathbf{r}, t) dG. \quad (6.10.22)$$

Тогда из (6.10.15) приходим к другой формуле для вычисления функционала  $Y_k$ :

$$Y_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}^* Q_i + b_k^*. \quad (6.10.23)$$

Таким образом, аналогично случаю основной задачи, приходим к оптимизационной задаче для сопряженных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i) = \min, \quad \sum_{i=1}^n Q_i a_{ik}^* + b_k^* \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10.24)$$

или, вводя  $q_i = \bar{Q}_i - Q_i \geq 0$ , преобразуем задачу (6.10.24) в следующую:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i q_i = \min, \quad \sum_{i=1}^n a_{ik}^* q_i \leq R_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10.25)$$

$$q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $R_k^* = \sum_{i=1}^n a_{ik}^* \bar{Q}_i + b_k^* - c_k$ . Итак, мы снова пришли к задаче линейного программирования.

В различных случаях удобно формулировать оптимизационную задачу с помощью решения либо основных уравнений, либо сопряженных. Если количество предприятий, выбрасывающих в атмосферу аэрозоль, невелико, а количество экологически значимых зон большое, то удобнее пользоваться основными уравнениями; если же наоборот, то удобнее брать сопряженные уравнения.

## 6.11. Теория возмущений

Ценность сопряженной задачи далеко не исчерпывается возможностью независимой формулировки оптимизационной проблемы. Во многих случаях, не решая проблему в целом, можно получить очень ценную информацию о чувствительности функционалов вида  $Y_k$  к отклонению отдельных параметров задачи от «нормы». Рассмотрим простейший случай теории возмущений, используя вариации выбросов аэрозолей.

Пусть вместо  $Q_i$  предприятие выбрасывает  $Q'_i = Q_i + \delta Q_i$  аэрозолей. Тогда мы имеем задачу

$$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} + \sigma \varphi'_i - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} - \mu \Delta \varphi'_i = Q'_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (6.11.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi'_i / \partial z &= \alpha \varphi'_i \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi'_i / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H; \\ \varphi'_i(\mathbf{r}, T) &= \varphi'_i(\mathbf{r}, 0), \end{aligned} \quad (6.11.2)$$

где  $\varphi'_i = \varphi_i + \delta \varphi_i$ .

Рассмотрим функционал

$$Y_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k \varphi_i \, dG_k, \quad (6.11.3)$$

для  $Y'_{ik}$  имеем

$$Y'_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k \varphi'_i \, dG_k = Y_{ik} + \delta Y_{ik}, \quad (6.11.4)$$

где

$$\delta Y_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k \delta \varphi_i \, dG. \quad (6.11.5)$$

Функционал  $\delta Y_k$  можно вычислить и другим способом – через решение  $\varphi_k^*$  сопряженной задачи, которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{u} \varphi_k^*) - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi_k^* = p_k, \quad (6.11.6)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k^* &= 0 \text{ на } \Sigma, \\
\partial\varphi_k^*/\partial z &= \alpha\varphi_k^* \text{ на } \Sigma_0, \\
\partial\varphi_k^*/\partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H; \\
\varphi_k^*(\mathbf{r}, T) &= \varphi_k^*(\mathbf{r}, 0).
\end{aligned} \tag{6.11.7}$$

Из (6.11.1), (6.11.2), (6.11.6), (6.11.7) обычным образом получаем соотношение двойственности

$$(Q_i + \delta Q_i) \int_0^T \varphi_k^* dt - \int_0^T dt \int_{G_k} p_k(\varphi_i + \delta\varphi_i) dG_k = 0. \tag{6.11.8}$$

Поскольку

$$Q_i \int_0^T \varphi_k^* dt = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k \varphi_i dG_k = Y_{ik}, \tag{6.11.9}$$

$$\delta Y_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k \delta\varphi_i dG_k,$$

то с помощью (6.11.8) приходим к формуле теории возмущений

$$\delta Y_{ik} = \delta Q_i \int_0^T \varphi_k^* dt, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{6.11.10}$$

Подсчитав величины  $\int_0^T \varphi_k^* dt$  и построив изолинии  $\int_0^T \varphi_k^* dt = const$ , можно определить области максимальной опасности аэрозольного загрязнения. Предприятия, расположенные именно в этих областях, вносят наибольший вклад в аэрозольное загрязнение. Поэтому для них предельно допустимые выбросы необходимо рассчитывать в первую очередь. Конечно, это не решает всей проблемы оптимизации, однако в некоторой степени проясняет суть дела.

Наконец, обсудим еще один важный вопрос. До сих пор мы предполагали, что входные параметры основной и сопряженной задач постоянны. Однако при решении оптимизационных задач концентрация аэрозолей над областью  $G$  изменяется, что обуславливает некоторое

изменение локальной циркуляции атмосферы. Это значит, что могут измениться компоненты вектора  $\mathbf{u}$ :  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ , а также коэффициенты турбулентного обмена:  $\nu' = \nu + \delta\nu$ ,  $\mu' = \mu + \delta\mu$ . В результате возмущений основная задача принимает вид

$$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}' \varphi'_i + \sigma \varphi'_i - \frac{\partial}{\partial z} \nu' \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} - \mu' \Delta \varphi'_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (6.11.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \partial \varphi'_i / \partial z &= \alpha \varphi'_i \text{ на } \Sigma_0, \\ \partial \varphi'_i / \partial z &= 0 \text{ на } \Sigma_H; \\ \varphi'_i(\mathbf{r}, T) &= \varphi'_i(\mathbf{r}, 0), \end{aligned} \quad (6.11.12)$$

К этой задаче присоединим невозмущенную сопряженную задачу (6.11.6), (6.11.7). Умножим решение (6.11.11) на  $\varphi_k^*$ , уравнение (6.11.6) – на  $\varphi'_i$ , результаты проинтегрируем по всей области изменения переменных и вычтем один из другого. Затем, пользуясь граничными условиями (6.11.12), (6.11.7), интегрированием по частям получаем соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_G \left( \operatorname{div} \delta \mathbf{u} \varphi'_i - \frac{\partial}{\partial z} \delta \nu \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} - \delta \mu \Delta \varphi'_i \right) \varphi_k^* dG &= \\ &= \delta Q_i \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_i, t) dt - \delta Y_{ik}; \end{aligned} \quad (6.11.13)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \delta Y_{ik} &= \delta Q_i \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_i, t) dt - \\ &- \int_0^T dt \int_G \left( \operatorname{div} \delta \mathbf{u} \varphi'_i - \frac{\partial}{\partial z} \delta \nu \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} - \delta \mu \Delta \varphi'_i \right) \varphi_k^* dG. \end{aligned} \quad (6.11.14)$$

Если считать возмущения  $\delta \varphi_i$ ,  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \nu$ ,  $\delta \mu$  малыми, то с точностью до малых второго порядка придем к формуле теории малых возмущений



$$\begin{aligned} \delta Y_{ik} = & \delta Q_i \int_0^T \varphi_k^*(\mathbf{r}_i, t) dt - \\ & - \int_0^T dt \int_G \left( \operatorname{div} \delta \mathbf{u} \varphi_i - \frac{\partial}{\partial z} \delta \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \delta \mu \Delta \varphi_i \right) \varphi_k^* dG. \end{aligned} \quad (6.11.15)$$

Полученная формула для  $\delta Y_{ik}$  позволяет оценивать «обратную связь» атмосферных процессов, порождаемую изменением аэрозольного фона в  $G$ .

Рассматриваемую в § 6.10 и в настоящем параграфе проблему оптимизации можно распространить на функционалы подобно тому, как это было сделано в § 6.1–6.6.

В заключение скажем несколько слов о численной реализации алгоритмов. Поскольку основная и сопряженная задачи линейные и периодические по времени, то их можно решить методом периодизации, начиная с некоторых начальных данных и продолжая до наступления периодичности. Обычно для этого достаточно 2–3-годовых циклов расчета. Важно отметить, что сопряженная задача должна решаться в обратном направлении времени, поскольку, как уже отмечалось ранее, в этом случае при счете будет соблюдена корректность задачи. Что касается задач линейного программирования, то они решаются стандартными приемами. Поскольку  $q_i \geq 0$  и все коэффициенты  $a_{ik}$ ,  $a_{ik}^*$  также положительны, решение задачи находится на гранях многогранников, образующихся при построении области ограничений.

## Глава 7

# Сопряженные уравнения и модели общей циркуляции атмосферы и океана

Проблема изменения климата принадлежит к числу наиболее сложных задач современной науки. Это объясняется тем, что в формировании климата участвует большое число различных процессов, таких как гидродинамические течения, турбулентный обмен, взаимодействие процессов в атмосфере и океане, радиационный режим системы, фазовые переходы воды из одних состояний в другие с выделением или поглощением тепла и многие другие. Более того, гидротермодинамические процессы, происходящие в атмосфере и океане, чрезвычайно нелинейны и слабо неустойчивы. Причем потеря устойчивости решений может произойти в результате весьма слабых возмущений. Неустойчивые движения обычно разрешаются в виде волновых движений циклонического масштаба в атмосфере и мезомасштабах вихрей в океане. Все это делает задачу предвычисления изменений климата особенно сложной.

Однако если речь идет о фоновом изменении климатических состояний атмосферы и океана, осредненном по большим регионам – порядка нескольких тысяч квадратных километров – за срок от месяца до сезона, то в этом случае атмосферные и океанические процессы масштабов циклонов и типичных океанических вихрей можно рассматривать в среднестатистическом смысле. Поэтому можно ожидать, что быстрая изменчивость атмосферных процессов с учетом

непрерывного взаимодействия с океаном уже не окажет существенного влияния на осредненный фон, который будет определяться в основном медленно протекающими и устойчивыми процессами, и именно этот компонент должен быть выделен как решающий на изменение климатического состояния системы.

Но и в этом случае климатическая система атмосфера – океан называется все еще очень сложной и требует тщательного анализа чувствительности к различным действующим факторам. Прямой расчет прогностической задачи обычно здесь не может дать ответа на этот вопрос. Именно поэтому мы снова, как и в проблеме окружающей среды, сталкиваемся с необходимостью включить в рассмотрение новый математический аппарат сопряженных уравнений.

Наше рассмотрение проблемы чувствительности климата мы начнем с простейших моделей и, постепенно усложняя их, придем к практически интересным математическим описаниям.

Поскольку задача исследования вариаций климата является очень сложной, то в настоящей главе мы ограничимся предположением, что составляющие вектора скорости воздуха в атмосфере и вектора скорости течений в океане нам заранее известны из наблюдений, и свою задачу сведем к расчету аномалий температуры на определенных более или менее крупных регионах континентов и за длительный период времени – порядка месяца.

Решение такой задачи позволит нам оценить чувствительность климатических изменений в поле температуры на основе экспериментальных данных наблюдений в зависимости от различных входных параметров задачи – скоростей ветра и течений, радиационного потока тепла, турбулентного обмена и др.

Изложение мы начнем с простейшей диагностической задачи климата, которая будет рассмотрена в § 7.1, 7.2.

Дальше в этой главе будут рассмотрены проблемы, связанные с общей циркуляцией атмосферы и океана.

Решение проблем общей циркуляции атмосферы и океана, а также влияния деятельности человека на изменения климата требует создания такого математического аппарата, который бы позволил на основе решения задач динамики атмосферы и океана, а также использования априорной информации о климатическом состоянии атмосферы и фактической информации об отклонениях полей метеорологических элементов от климатических дать оценку аномалий температуры и других элементов в заданных районах земного шара. Районы,

для которых дается эта оценка, должны иметь характерный размер, уточняющийся на основе анализа чувствительности. Важно отметить лишь то, что локальная метеорологическая информация очень чувствительна к непрогнозируемым «метеорологическим шумам», которые свойственны любой, даже самой «богатой» модели. Такие шумы обычно являются результатом разрешения физических неустойчивостей, непрерывно реализуемых в атмосфере. Потеря информации происходит и за счет не очень точных моделей, используемых в расчете. Эту потерю также можно условно отнести к метеорологическим шумам. Поэтому выбор характерных масштабов регионов является одной из центральных задач теории предсказуемости.

Другой задачей является построение таких теорий, которые позволили бы исследователям получить результаты оценки вариации общей циркуляции непосредственно для отклонений некоторых функционалов от метеорологических элементов в сопоставлении с их климатическими значениями. Если для линейных моделей такая постановка задачи является тривиальной, то для полной нелинейной задачи она требует разработки нового математического аппарата на основе специальным образом определенных сопряженных уравнений, связанных с прогнозируемыми функционалами задач.

В настоящей главе (в § 7.3–7.6) мы изложим более или менее общий подход к построению сопряженных уравнений общей циркуляции атмосферы и океана и получим формулы теории возмущений, которые будут основными как для анализа предсказуемости, так и для оценки аномалий.

В качестве основного функционала мы будем рассматривать аномалию температуры на земной поверхности для того или иного региона. Распространение теории на другие линейные функционалы от полей метеорологических элементов не представляет большого труда. Рассмотрим как линейную, так и нелинейную постановку задачи.

Следует также подчеркнуть, что в настоящей главе сначала рассматриваются довольно простые модели динамики атмосферы и океана, а затем они постепенно усложняются. Конечно, в реальных задачах они будут еще более сложными и разнообразными. Автор полагает, что общие идеи легче воспринять на простых моделях, а переход к более сложным, реальным уже не внесет принципиально новых проблем, и они могут быть рассмотрены с учетом предложенных идей.

При изложении настоящей главы мы акцентировали внимание на алгебраической стороне дела. Что касается теоретического обоснова-

ния этих алгоритмов, то они могут быть выполнены, как и в главе 1, начиная от формирования гильбертовых пространств функций, в которых содержатся решения основных и сопряженных задач, и предположений о гладкости функций, обеспечивающих указанные в этой главе преобразования. Мы будем полагать, что все эти требования выполнены.

## 7.1. Температурные аномалии атмосферы

Простейшей постановкой задачи о температурных аномалиях в атмосфере может быть следующая.

Рассмотрим сначала уравнение

$$L\vartheta \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = q \quad (7.1.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \vartheta(0, z, t) &= \vartheta(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= f(x, t) \text{ при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

и начальных данных

$$\vartheta(x, z, 0) = g(x, z). \quad (7.1.3)$$

Будем считать, что заданные периодические по  $x$  с периодом  $l$  функции  $u$  и  $\omega$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \text{ при всех } (x, z, t), \quad (7.1.4)$$

$$\omega(x, 0, t) = \omega(x, h, t) = 0.$$

Функции  $q(x, z, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $g(x, z)$  будем считать заданными. Относительно решения  $\vartheta$ , функций  $u, \omega, f$  и  $g$  будем полагать, что они обладают достаточной гладкостью, так что задача (7.1.1)–(7.1.4) имеет единственное решение в некотором классе периодических по  $x$  функций  $D(L)$ , свойства элементов которого определим ниже.

Итак, сначала остановимся на вопросе о единственности решения указанной задачи. С этой целью, как обычно, предположим, что существует два решения  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , удовлетворяющих задаче (7.1.1)–(7.1.4). Рассмотрим их разность

$$\psi = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

Тогда для  $\psi$  получаем следующую однородную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \\ \vartheta(0, z, t) &= \vartheta(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h, \\ \psi &= 0 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Уравнение из (7.1.5) умножим почленно на  $\psi$  и результат проинтегрируем по всей области определения решения:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial z} - \right. \\ \left. - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = 0. \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Примем далее во внимание следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int_0^l dx \int_0^h dz \int_0^T \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^h [\psi^2(x, z, T) - \psi^2(x, z, 0)] dz = \\ = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^h \psi^2(x, z, T) dz. \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Здесь мы воспользовались начальным значением  $\psi = 0$  при  $t=0$ .  
Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \left( u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( u \frac{\partial \psi^2}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi^2}{\partial z} \right) dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left[ \left( \frac{\partial(u\psi^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega\psi^2)}{\partial z} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \psi^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

Поскольку компоненты  $u$  и  $\omega$  удовлетворяют уравнению неразрывности (7.1.4), то окончательно соотношение (7.1.8) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \left( u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( u \frac{\partial \psi^2}{\partial x} + \omega \frac{\partial \psi^2}{\partial z} \right) dz = \\
 & \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^h u \psi^2 \Big|_{x=0}^{x=l} dz + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^l \omega \psi^2 \Big|_{z=0}^{z=h} dx.
 \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Действительно, каждое из последних двух слагаемых в (7.1.9) обращается в нуль: первое вследствие периодичности подынтегральной функции, а второе вследствие равенства нулю  $\omega$  при  $z = 0$  и  $z = h$ .

Преобразуя остальные слагаемые в (7.1.6), имеем

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dz =$$

$$= \int_0^T dt \int_0^h \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dz - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dz. \quad (7.1.10)$$

Внеинтегральный член в (7.1.10) вследствие периодичности обращается в нуль. Поэтому

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dz = - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dz. \quad (7.1.11)$$

И, наконец,

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \\ & = \int_0^T dt \int_0^l \nu \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=h} dx - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \nu \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz, \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

первый интеграл справа в (7.1.12) обращается в нуль вследствие условия

$$\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, z = h.$$

В результате получим

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \psi \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \nu \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (7.1.13)$$

Принимая во внимание соотношения (7.1.7), (7.1.9), (7.1.11) и (7.1.13), соотношение (7.1.6) переписываем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^h \psi^2(x, z, T) dz + \\ & + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left[ \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (7.1.14)$$



Очевидно, что в классе функций непрерывных, квадратично-суммируемых вместе со своими первыми и вторыми производными по пространственным переменным, из соотношения (7.1.14) следует, что равенство нулю левой части (7.1.14) возможно только в случае  $\psi = 0$ , т. е. при  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ . А это доказывает единственность решения поставленной задачи. Вместе с тем при установлении единственности решения мы определили множество функций  $\varphi \subset D(L)$  – область определения оператора задачи. Дополнительные условия на функции из  $D(L)$  определяются однородными граничными условиями из (7.1.2), включая условие периодичности.

Итак, снова возвратимся к исходной задаче (7.1.1)–(7.1.4). Мы видели, что единственное решение этой задачи определяется начальным условием  $\vartheta(x, z, 0) = g(x, z)$  и потоком тепла на границе

$$\nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = f(x, t) \text{ при } z = 0.$$

Что касается начального поля тепла в атмосфере, то его влияние на термический режим атмосферы затухает через одну-две недели, им в большинстве случаев можно пренебречь. Это значит, что в данной модели установление температурного режима в атмосфере в основном определяется потоками тепла через поверхность  $z = 0$ , главным образом в энергоактивных областях Мирового океана, и реальными потоками воздушных масс, которые будут перемещать воспринятое тепло от океана со скоростями атмосферных движений. Поскольку мы ставим своей задачей не прогноз поля температуры в атмосфере, а лишь анализ чувствительности модели к тем или иным возмущающим факторам, то компоненты вектора скорости воздушных потоков в атмосфере  $u$  и  $\omega$  мы можем брать из реальных наблюдений. Кроме того, теплообмен между океаном и атмосферой осуществляется не только регулярными течениями в океане типа Гольфстрим и Куроисио, транспортирующими тепло в северные широты, где из-за неустойчивой стратификации океана в северных широтах они отдают свой запас тепловой энергии в атмосферу, но и штормовыми процессами, когда теплопередача на границе атмосфера – океан резко увеличивается, она должна быть учтена в наших моделях. Ведь известно, что в зонах штормов атмосфера получает до 40% всей энергии передаваемой океаном.

Переходим теперь к построению теории возмущений для избранных функционалов и оценке чувствительности модели. С этой целью прежде всего определим функционал, которым будем заниматься.

Наш исследуемый функционал определим пока в общем виде, положив

$$J = \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, T) dz -$$

$$- \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta dz, \quad (7.1.15)$$

где  $g^*(x, z)$ ,  $f^*(x, t)$  и  $p^*(x, z, t)$  – некоторые пока неопределенные функции, конкретный вид которых мы предложим исходя из физического смысла измеряемых полей. А пока мы их будем называть функциями, связанными с характеристиками измерений поля температуры  $\vartheta$ .

Для построения формулы теории возмущений для  $J$  необходимо прежде всего сформулировать сопряженную задачу. Для этого уравнение (7.1.1) умножим на сопряженную функцию  $\vartheta^* \in D(L^*)$ , причем свойства множества  $D(L^*)$  определим в дальнейшем по мере выполнения преобразований. Потребуем лишь, чтобы  $\vartheta^*$  была периодической по  $x$  с периодом  $l$ . Результат проинтегрируем по всей области определения функций  $\vartheta$  и  $\vartheta^*$ . Получим соотношение

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - q \right) dz = 0. \quad (7.1.16)$$

Рассмотрим последовательно слагаемые в формуле (7.1.16) и преобразуем их к виду, удобному для определения сопряженной задачи:

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dz =$$

$$\int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \vartheta \Big|_{t=0}^{t=T} dz - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, T) dz - \\
&\quad - \int_0^l dx \int_0^h g(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} dz.
\end{aligned} \tag{7.1.17}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\vartheta^*(x, z, T) = g^*(x, z). \tag{7.1.18}$$

Пусть  $g^*$  будет пока неопределенной функцией.

Рассмотрим другое слагаемое:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dz = \\
&= \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( \frac{\partial}{\partial x} (u \vartheta \vartheta^*) + \frac{\partial}{\partial z} (\omega \vartheta \vartheta^*) \right) dz - \\
&\quad - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left( \frac{\partial u \vartheta^*}{\partial x} + \frac{\partial \omega \vartheta^*}{\partial z} \right) dz.
\end{aligned} \tag{7.1.19}$$

Первый интеграл справа после интегрирования обратится в нуль вследствие условия периодичности функций  $u, \vartheta$  и  $\vartheta^*$  по  $x$  и того, что  $\omega = 0$  при  $z = 0$  и  $z = h$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dz = \\
&= - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left( \frac{\partial u \vartheta^*}{\partial x} + \frac{\partial \omega \vartheta^*}{\partial z} \right) dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left[ \left( u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \vartheta^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right] dz.
\end{aligned} \tag{7.1.20}$$

Имея в виду, что  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ , окончательно получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dz = \\
&= - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left( u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) dz.
\end{aligned} \tag{7.1.21}$$

Преобразуем теперь следующее слагаемое:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dz = \\
&= \int_0^T dt \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dz \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} dz = \\
&= \int_0^T dt \int_0^l \vartheta^* \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dz \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^T dt \int_0^h \vartheta \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} dz \Big|_{x=0}^{x=l} + \\
&\quad + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} dx.
\end{aligned} \tag{7.1.22}$$

Первые два интеграла в правой части (7.1.22) обращаются в нуль вследствие условия периодичности по  $x$ , и мы имеем

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dz = \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} dx. \tag{7.1.23}$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz &= \int_0^T dt \int_0^l \vartheta^* \left( \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}^{z=h} dx - \\ &- \int_0^T dt \int_0^l \vartheta \left( \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}^{z=h} + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (7.1.24)$$

Введем обозначение

$$\nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = f^* \text{ при } z = 0 \quad (7.1.25)$$

и потребуем, чтобы

$$\nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h. \quad (7.1.26)$$

Функцию  $f^*$  пока будем считать произвольной. Ее конкретный вид свяжем в дальнейшем с выбором интересующего нас функционала. Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz &= - \int_0^T dt \int_0^l f(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx + \\ &+ \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Имея в виду последнее соотношение, а также преобразования (7.1.17), (7.1.21), (7.1.23), выражение (7.1.16) представим в виде

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left( -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \right. \\ \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - p^* \right) dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, T) dz - \int_0^l dx \int_0^h g(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz + \\
& + \int_0^T dt \int_0^l f(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta(x, 0, t) dx - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h q \vartheta^* dz + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta dz = 0.
\end{aligned} \tag{7.1.27}$$

Здесь мы вычли и добавили член  $\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta dz$ .

Полагая

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta \left( -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \right. \\
& \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - p^* \right) dz = 0
\end{aligned} \tag{7.1.28}$$

и учитывая обозначение для  $J$  в форме (7.1.15), из (7.1.27) получаем формулу взаимности для  $J$ :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^l dx \int_0^h g(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l f(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dt + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h q \vartheta^* dz.
\end{aligned} \tag{7.1.29}$$

Итак, формулы (7.1.15) и (7.1.29) эквивалентны, но для вычисления функционала  $J$  по формуле (7.1.15) необходимо знание самого поля температуры  $\vartheta$ , тогда как при использовании формулы (7.1.29) требуется знание сопряженной функции  $\vartheta^*$ . Соотношение (7.1.28) будет выполнено, если мы положим

$$L^* \vartheta^* \equiv -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = p^*. \tag{7.1.30}$$

К уравнению (7.1.30) присоединим условия, которые по ходу преобразований были введены в рассмотрение. Это прежде всего граничные условия

$$\begin{aligned}\vartheta^*(0, z, t) &= \vartheta^*(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= f^* \text{ при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h\end{aligned}\tag{7.1.31}$$

и начальные данные

$$\vartheta^* = g^* \text{ при } t = T.\tag{7.1.32}$$

Теперь несколько слов о множестве функций  $D(L^*)$ . Можно аналогично основной задаче показать, что решение сопряженной задачи единственно в классе непрерывных функций, квадратично суммируемых вместе со своими первыми и вторыми производными по пространственным переменным. Дополнительные условия на эти функции определяются граничными условиями, включая условие периодичности.

Переходим к формулировке теории возмущений. С этой целью будем считать, что наряду с невозмущенной задачей (7.1.1)–(7.1.4) рассматривается задача возмущенная

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + \omega' \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} = q' \tag{7.1.33}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}\vartheta'(0, z, t) &= \vartheta'(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} &= f' \text{ при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h\end{aligned}\tag{7.1.34}$$

и начальных данных

$$\vartheta'(x, z, 0) = g'(x, z).\tag{7.1.35}$$

Будем полагать, что компоненты возмущенного вектора скорости также удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \omega'}{\partial z} = 0.\tag{7.1.36}$$

Задачу (7.1.33)–(7.1.36) будем рассматривать вместе с невозмущенной задачей для сопряженного уравнения

$$L^* \vartheta^* \equiv -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = p^*. \quad (7.1.37)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \vartheta^*(0, z, t) &= \vartheta^*(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= f^* \text{ при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h \end{aligned} \quad (7.1.38)$$

и начальных данных

$$\vartheta^*(x, z, T) = g^*(x, z). \quad (7.1.39)$$

Пусть  $\vartheta \in D(L)$ ,  $\vartheta' \in D(L)$  и  $\vartheta^* \in D(L^*)$ . Уравнение (7.1.33) умножим на  $\vartheta^*$ , а уравнение (7.1.37) – на  $\vartheta'$ , результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по всей области определения решения. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + \omega' \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - \right. \\ & \quad \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - q' \right) dz - \\ & - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta' \left( -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \right. \\ & \quad \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - p^* \right) dz = 0. \end{aligned} \quad (7.1.40)$$

Первый интеграл в (7.1.40) преобразуем таким же образом, как и (7.1.16), где лишь вместо  $\vartheta$ ,  $u$ ,  $\omega$ ,  $f$ ,  $g$  и  $q$  теперь будем иметь  $\vartheta'$ ,  $u'$ ,  $\omega'$ ,  $f'$ ,  $g'$  и  $q'$ . В результате получим



$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta^* \left( \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + \omega' \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - \right. \\
& \quad \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - q' \right) dz = \\
& = \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta' \left( -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \right. \\
& \quad \left. - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - p^* \right) dz + \\
& \quad + \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta'(x, z, T) dz - \\
& \quad \int_0^l dx \int_0^h g'(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz + \\
& \quad + \int_0^T dt \int_0^l f'(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx - \\
& \quad - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta'(x, 0, t) dx - \\
& \quad - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h q' \vartheta^* dz + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta' dz.
\end{aligned} \tag{7.1.41}$$

Из (7.1.40) и (7.1.41) приходим к соотношению

$$\int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \vartheta' \left( -(u' - u) \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - (\omega' - \omega) \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta'(x, z, T) dz - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta'(x, 0, t) dx + \\
& + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta' dz - \int_0^l dx \int_0^h g'(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz + \\
& + \int_0^T dt \int_0^l f'(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx - \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h q' \vartheta^* dz = 0.
\end{aligned} \tag{7.1.42}$$

Примем обозначение

$$\begin{aligned}
J' &= \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta'(x, z, T) dz - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta'(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta' dz.
\end{aligned} \tag{7.1.43}$$

Имея в виду выражение для  $J$  из (7.1.15), получаем

$$J' = J + \delta J, \tag{7.1.44}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \delta \vartheta(x, z, T) dz - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \delta \vartheta(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \delta \vartheta dz, \quad \delta \vartheta = \vartheta' - \vartheta.
\end{aligned}$$

Далее, используя формулу двойственности (7.1.29), имеем

$$\int_0^l dx \int_0^h g'(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz - \int_0^T dt \int_0^l f'(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h q' \vartheta^* dz = J + \int_0^l dx \int_0^h \delta g \vartheta^*(x, z, 0) dz - \\
& \int_0^T dt \int_0^l \delta f \vartheta^*(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \delta q \vartheta^* dz,
\end{aligned} \tag{7.1.45}$$

где  $\delta g = g' - g$ ,  $\delta f = f' - f$ ,  $\delta q = q' - q$ . Учитывая (7.1.42)–(7.1.45) и полагая  $u' = u + \delta u$ ,  $\omega' = \omega + \delta \omega$ , после простейших преобразований получаем формулу теории возмущений

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( \delta u \vartheta' \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} + \delta \omega \vartheta' \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) + \\
& + \int_0^l dx \int_0^h \delta g \vartheta^*(x, z, 0) dz - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l \delta f \vartheta^*(x, 0, t) dt + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \delta q \vartheta^* dz.
\end{aligned} \tag{7.1.46}$$

Если в (7.1.46) возмущения  $\delta \vartheta$  будут малыми, то  $\vartheta'$  всюду можно заменить на  $\vartheta$ , и мы приходим к формуле малых возмущений

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \left( \delta u \vartheta \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} + \delta \omega \vartheta \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) + \\
& + \int_0^l dx \int_0^h \delta g \vartheta^*(x, z, 0) dz - \\
& - \int_0^T dt \int_0^l \delta f \vartheta^*(x, 0, t) dt + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h \delta q \vartheta^* dz.
\end{aligned} \tag{7.1.47}$$

До сих пор мы не фиксировали конкретного вида функционала  $J$  и принимали лишь

$$J' = \int_0^l dx \int_0^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, T) dz - \int_0^T dt \int_0^l f^*(x, t) \vartheta(x, 0, t) dx + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_0^h p^* \vartheta dz. \quad (7.1.48)$$

Предположим теперь, что нас интересует средняя за интервал времени  $T - \tau \leq t \leq T$  и по области  $x_1 \leq x \leq x_2$  температура на поверхности  $z = 0$ . Тогда нашим функционалом будет

$$J = \frac{1}{\Delta x \tau} \int_{T-\tau}^T dt \int_{x_1}^{x_2} \vartheta(x, 0, t) dx. \quad (7.1.49)$$

Это значит, что мы должны «функции измерений»  $g^*$ ,  $f^*$  и  $p^*$  выбрать следующим образом:

$$g^*(x, z) = 0, \quad p^* = 0, \quad f^* = \begin{cases} \frac{1}{\tau \Delta x} & \text{при } T - \tau \leq t \leq T, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7.1.50)$$

Решая сопряженную задачу (7.1.37)–(7.1.39) с «источником»  $f^*$  из (7.1.50), получаем функцию  $\vartheta^*$ , которая будет отражать чувствительность вариации функционала  $\delta J$ , вычисляемого по формуле (7.1.46), в зависимости от вариаций входных данных основной задачи.

## 7.2. Температурные аномалии в атмосфере и океане

В § 7.1 мы на простейшей модели провели исследование основной и сопряженной задач в атмосфере, считая заданными на нижней границе атмосферы при  $z = 0$  потоки тепла. Такая постановка задачи не дает возможности определить те наиболее важные регионы океана,

где аккумулируется тепло и затем с течениями переносится в зоны его выброса в атмосферу. В исследуемой ранее задаче мы лишь имеем некоторую интегральную функцию потока тепла  $f$  как обобщенный результат в проблеме взаимодействия атмосферы и океана.

Поэтому нам исходную математическую модель следует обобщить, рассматривая атмосферу и океан совместно. С этой целью рассмотрим следующую модельную задачу:

$$L\vartheta \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = q(x, t) \delta(z) \quad (7.2.1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \vartheta(0, z, t) &= \vartheta(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h, \\ \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = -h_0 \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

и начальных данных

$$\vartheta = g(x, z) \text{ при } t = 0. \quad (7.2.3)$$

Как и прежде, будем полагать, что вектор скорости течений в атмосфере при  $z \geq 0$  и в океане при  $z < 0$  удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \text{ при всех } (x, z, t) \quad (7.2.4)$$

и, кроме того,

$$\omega = 0 \text{ при } z = h \text{ и } z = -h_0. \quad (7.2.5)$$

Относительно функций  $u, \omega, \mu$  и  $\nu$  будем ради простоты считать, что они непрерывны, хотя и быстро меняются при переходе через поверхность океана.

Отметим, что в данной модельной задаче предполагается, что вся нижняя поверхность атмосферы граничит с океаном постоянной глубины  $h_0$ .

Переходим теперь к рассмотрению сопряженной задачи. С этой целью будем считать, что решение основной задачи принадлежит множеству периодических по  $x$  функций  $D(L)$ , свойства которого при заданных условиях относительно коэффициентов уравнения и других входных параметров предполагают существование единственного

решения. Такое множество  $D(L)$  можно определить методом, изложенным в § 7.1.

Умножим теперь уравнение (7.2.1) на функцию  $\vartheta^*$  из множества  $D(L^*)$ , свойства которого будут уточнены в дальнейшем, и проинтегрируем по всей области определения решения. Получим

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_{-h_0}^h \vartheta^* \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dz - \\ - \int_0^T dt \int_0^l q(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

При сделанных предположениях относительно решения  $\vartheta$ , граничных условиях и начальных данных (7.2.2), (7.2.3) методом интегрирования по частям выражение (7.2.6) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^l dx \int_{-h_0}^h \vartheta \left( -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} \right) dz - \\ - \int_0^T dt \int_0^l q(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx + \int_0^l dx \int_{-h_0}^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, t) dz - \\ - \int_0^l dx \int_{-h_0}^h g(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz = 0. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Здесь мы воспользовались необходимой гладкостью  $\vartheta^*$  и ее периодичностью и ввели обозначение

$$\vartheta^* = g^*(x, z) \text{ при } t = T. \quad (7.2.8)$$

Кроме того, при получении (7.2.7) мы предполагаем выполненными условия

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h, \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение основной функционал

$$J = \int_0^l dz \int_{-h_0}^h g^*(x, z) \vartheta(x, z, T) dz + \int_0^T dt \int_0^l dx \int_{-h_0}^h p^* \vartheta dz \quad (7.2.9)$$

и положим

$$L^* \vartheta^* \equiv -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = p^*. \quad (7.2.10)$$

Тогда соотношение (7.2.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^l dx \int_{-h_0}^h p^* \vartheta dz + \int_0^l dx \int_{-h_0}^h g^* \vartheta(x, z, t) dz = \\ & = \int_0^T dt \int_0^l q(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx + \int_0^l dx \int_{-h_0}^h g \vartheta^*(x, z, 0) dz. \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Имея в виду обозначение (7.2.9), приходим к формуле двойственности для функционала  $J$ :

$$J = \int_0^l dx \int_{-h_0}^h g(x, z) \vartheta^*(x, z, 0) dz + \int_0^T dt \int_0^l q(x, t) \vartheta^*(x, 0, t) dx. \quad (7.2.12)$$

Итак, функционал  $J$ , определяемый формулой (7.2.12), выражается через начальные поля функции  $\vartheta$ , т. е.  $g(x, z)$  и поток радиации на поверхности океана  $q(x, t)$ , взятые с соответствующими весами, которые являются значениями сопряженной функции  $\vartheta^*(x, z, 0)$  и  $\vartheta^*(x, 0, t)$  соответственно.

Суммируя все сказанное выше в этом параграфе, мы приходим к следующей сопряженной задаче:

$$L^* \vartheta^* \equiv -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - u \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x} - \omega \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = p^* \quad (7.2.13)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \vartheta^*(0, z, t) &= \vartheta^*(l, z, t), \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h, \\ \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = -h_0 \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

и начальных данных

$$\vartheta^*(x, z, T) = g^*(x, z). \quad (7.2.15)$$

В качестве функций  $g^*$  и  $p^*$  выберем, например, следующие:

$$g^*(x, z) = 0,$$

$$p^*(x, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau h \Delta x} & \text{при } T - \tau \leq t \leq T, \ x_1 \leq x \leq x_2, \ 0 \leq z \leq h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7.2.16)$$

В этом случае

$$J = \frac{1}{\tau h \Delta x} \int_{T-\tau}^T dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^h \vartheta(x, z, t) dz \quad (7.2.17)$$

и функционал (7.2.17) описывает среднюю температуру области

$$R(T - \tau \leq t \leq T, \ x_1 \leq x \leq x_2, \ 0 \leq z \leq h).$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (7.2.12), теперь следует найти решение  $\vartheta^*$  сопряженной задачи (7.2.13)–(7.2.15), где в правой части уравнения (7.2.13) следует взять в качестве «источника» функцию  $p^*$  из (7.2.16).

### 7.3. Сопряженные функции в задаче формирования среднемесячных аномалий температуры воздуха

В этом параграфе рассматривается упрощенная модель теплового взаимодействия атмосферы, океана и почвы, с помощью которой можно изучать механизм формирования среднемесячных аномалий температуры воздуха ограниченных регионов (см. [236, 120–122]).

Приведем математическую постановку упрощенной задачи теплового взаимодействия атмосферы с океанами и почвой (см. [121]). Введем



сферическую систему координат  $(\lambda, \vartheta, z)$ , где  $\lambda$  – долгота;  $\vartheta$  – дополнение до широты;  $z$  – высота, отсчитываемая от поверхности Земли. Будем обозначать через  $\mathbf{x}$  точку области с координатами  $(\lambda, \vartheta, z)$ . Пусть  $D_1 = \{\mathbf{x} : (\lambda, \vartheta) \in S; 0 < z < H\}$  – область атмосферы,  $D_2 = \{\mathbf{x} : (\lambda, \vartheta) \in S_0; -h_0 < z < 0\}$  – область верхнего деятельного слоя океана;  $S$  – поверхность Земли;  $S_0$  – поверхность океанов ( $S_0 \in S$ );  $H$  – высота слоя атмосферы и  $h_0$  – глубина слоя океана. На интервале времени  $(0, \bar{t})$  в областях  $D_1$  и  $D_2$  рассматривается задача переноса и турбулентной диффузии тепла для малых отклонений  $T(\mathbf{x}, t)$  поля температуры от некоторого базисного состояния  $\mathbf{u}(x, t)$ ,  $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\alpha T_t + \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u} T) - (\nu T_z)_z - \mu \Delta T = 0, \quad (7.3.1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = \delta g(\mathbf{x}). \quad (7.3.2)$$

Здесь  $T_t = \partial T / \partial t$ ;  $T_z = \partial T / \partial z$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа на сфере;  $\mu(z)$  и  $\nu(\mathbf{x}, t)$  – горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентного обмена тепла;  $\alpha = c_p \rho(z)$  (где  $c_p$  – удельная теплоемкость среды,  $\rho(z)$  – стандартная плотность);  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – поле скорости ветра в  $D_1$  и течений в  $D_2$  базисного состояния системы. Кроме того, в области  $D_3 = \{\mathbf{x} : (\lambda, \vartheta) \in S_k; -h_k < z < 0\}$  (т.е. в верхнем слое почвы) решается одномерное (по  $z$ ) уравнение теплопроводности почвы, которое совпадает по своей структуре с уравнением (7.3.1), если в последнем положить  $\mathbf{u} \equiv 0$  и  $\mu \equiv 0$ . Здесь  $S_k$  – часть поверхности  $S$ , принадлежащая континентам и свободная от снега и льда;  $h_k$  – глубина слоя почвы.

Считается, что на интервале времени  $(0, \bar{t})$  все поля  $\alpha(z)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\nu(\mathbf{x}, t)$  и  $\mu(z)$  – известные функции. Поле  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет в областях  $D_1$  и  $D_2$  уравнению неразрывности

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{u}) = 0, \quad (7.3.3)$$

и его нормальная компонента  $u_n$  равна нулю на боковой поверхности океанов и на поверхностях  $z = 0$ ,  $z = -h_0$  и  $z = H$ .

На поверхности раздела атмосфера – океан (атмосфера – почва), т. е. при  $z = 0$  и одновременно  $(\lambda, \vartheta) \in S_0 \cup S_k$ , ставятся условия сопряжения (см. [121])

$$[T] = 0, \quad [\nu T_z] = \delta F, \quad (7.3.4)$$

типичные для задач дифракции. Здесь  $[f] = f(-0) - f(+0)$  есть скачок функции  $f$  по  $z$  в точке  $z = 0$ , а  $\delta F(\lambda, \vartheta, t)$  – малые возмущения тех притоков тепла, которые поступают в систему, когда она находится в основном состоянии. Таким образом, равенства (7.3.4) представляют собой соответственно условие непрерывности по  $z$  функции  $T(\mathbf{x}, t)$  в точке  $z = 0$  и уравнение баланса тепла на поверхности раздела двух сред.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\nu T_z = 0 \text{ при } z = H, \ z = -h_0, \ z = -h_k, \quad (7.3.5)$$

$$\nu T_z + \delta F = 0 \text{ при } z = 0, \ (\lambda, \vartheta) \in S_\pi, \quad (7.3.6)$$

где  $S_\pi = S \setminus (S_0 \cup S_k)$  – часть Земли, покрытая снегом и льдом.

Изложим кратко подход к изучению чувствительности и модели (7.3.1)–(7.3.6), основанный на применении сопряженных уравнений. Задавая конкретную структуру характеристик  $p^*(\mathbf{x}, t)$  и  $F^*(\lambda, \vartheta, t)$ , определяем два вида линейных функционалов:

$$J_{p^*}(T) = \int_0^{\bar{t}} \int_D p^*(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt, \quad (7.3.7)$$

$$J_{F^*}(T) = \int_0^{\bar{t}} \int_S F^*(\lambda, \vartheta, t) T(\lambda, \vartheta, 0, t) dS dt. \quad (7.3.8)$$

В области  $(0, \bar{t}) \times D$  рассмотрим сопряженную задачу (см. [121]) с оператором, сопряженным к оператору задачи (7.3.1) – (7.3.6):

$$-\alpha T_t^* - \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u} T^*) - (\nu T_z^*)_z - \mu \Delta T^* = p^*, \quad (7.3.9)$$

$$T^*(\mathbf{x}, \bar{t}) = 0; \quad (7.3.10)$$

$$[T^*] = 0, \ [\nu T_z^*] = F^* \text{ при } z = 0 \text{ и } (\lambda, \vartheta) \in S_0 \cup S_k; \quad (7.3.11)$$

$$\nu T_z^* = 0 \text{ при } z = H, \ z = -h_0, \ z = -h_k; \quad (7.3.12)$$

$$\nu T_z^* + F^* = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } (\lambda, \vartheta) \in S_\pi. \quad (7.3.13)$$

Отметим, что в формулировке сопряженной задачи (7.3.9) – (7.3.13) учтено условие (7.3.3) бездивергентности полей скорости ветра и течений.

Нетрудно показать, что для основной и сопряженной задач справедливы соотношения (см. [121])

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \alpha T \, d\mathbf{x} = \int_S \delta F \, dS, \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_D \alpha T^* \, d\mathbf{x} = \int_S \delta F^* \, dS, \quad (7.3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \alpha T^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_S T \delta F \, dS, \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_D \alpha (T^*)^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_S T^* \delta F^* \, dS. \quad (7.3.15)$$

Уравнения (7.3.14) представляют собой интегральные балансные соотношения. В силу неравенств (7.3.15) прямая задача поставлена корректно, если решается на интервале времени  $(0, \bar{t})$  от момента  $t = 0$  до момента  $t = \bar{t}$ , а сопряженная задача будет корректной, если решается в обратном направлении времени, т. е. от  $t = \bar{t}$  до  $t = 0$ .

В работе [121] доказана теорема существования и единственности обобщенного решения задачи (7.3.1)–(7.3.6) и построена балансная, абсолютно устойчивая конечно-разностная схема второго порядка точности, основанная на двуциклическом методе покоординатного расщепления и применения схемы Кранка-Николсона на каждом дробном шаге по временной переменной.

Умножая уравнение (7.3.1) и (7.3.9) на функции  $T^*$  и  $T$  соответственно, вычитая один результат из другого и интегрируя полученное соотношение по области  $(0, \bar{t}) \times D$ , имеем

$$\begin{aligned} J(T) = & \int_0^{\bar{t}} \int_S T^*(\lambda, \vartheta, 0, t) \delta F(\lambda, \vartheta, t) \, dS \, dt + \\ & + \int_D \alpha T^*(\mathbf{x}, 0) \delta g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

где

$$J(T) \equiv J_{F^*}(T) + J_{p^*}(T). \quad (7.3.17)$$

Следовательно, функционалы  $J_{p^*}(T)$  и  $J_{F^*}(T)$  можно вычислить способом, отличным от (7.3.7) и (7.3.8). Первый интеграл в правой части (7.3.16) отражает вклад аномалий внешних притоков тепла в величину функционала  $J(T)$ , а второй интеграл учитывает влияние возмущений начальных данных. Чтобы определить только функционал  $J_{F^*}(T)$  (или только функционал  $J_{p^*}(T)$ ), необходимо в уравнении

(7.3.16) использовать решение сопряженной задачи (7.3.9)–(7.3.13), вычисленное при условии, что  $p^*(x, t) \equiv 0$  (или  $F^*(\lambda, \vartheta, t) \equiv 0$ ).

Если интервал  $(0, \bar{t})$  разбить на  $N$  подынтервалов  $I_n = (\bar{t} - n\tau, \bar{t} - (n-1)\tau)$  малой длины  $\tau$  ( $n = 1, \dots, N$ ;  $\bar{t} = N\tau$ ), то функционал (7.3.16) можно аппроксимировать функционалом

$$J_\tau(T) = \tau \sum_{n=1}^N \int_S T_n^*(\lambda, \vartheta) \delta F_n(\lambda, \vartheta) dS + \int_D \alpha T^*(\mathbf{x}, 0) \delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (7.3.18)$$

где  $T_n^*(\lambda, \vartheta)$  и  $\delta F_n(\lambda, \vartheta)$  – средние на интервале  $I_n$  значения функций  $T^*(\lambda, \vartheta, 0, t)$  и  $\delta F(\lambda, \vartheta, t)$  соответственно, а интегрирование по сфере  $S$  сводится к интегрированию только по зоне влияния  $S_n \subset S$ , содержащей ненулевые значения функций  $T_n^*(\lambda, \vartheta)$  и  $\delta F_n(\lambda, \vartheta)$  одновременно ( $n = 1, \dots, N$ ). Отметим, что размеры зон влияния в значительной степени зависят от структуры функций  $F^*(\lambda, \vartheta, t)$  и  $p^*(x, t)$ , т. е. от природы функционалов (7.3.7) и (7.3.8), а также от величин коэффициентов турбулентного обмена тепла.

Формулы (7.3.16), (7.3.18) показывают, что пространственно-временная структура решения сопряженной задачи позволяет понять механизм формирования линейного отклика системы. Действительно, для фиксированного  $n$  рассмотрим интервал времени  $I_n \subset (0, \bar{t})$ . Вклад возмущений внешних притоков тепла на этом интервале в значение функционала (7.3.18) определяется скалярным произведением (в пространстве  $L_2(S)$ )

$$(T_n^*, \delta F) = \int_S T_n^*(\lambda, \vartheta) \delta F_n(\lambda, \vartheta) dS = \int_{S_n} T_n^* \delta F_n dS. \quad (7.3.19)$$

Поэтому, если пространственные структуры сопряженной функции  $T_n^*(\lambda, \vartheta)$  и соответствующих аномалий притоков тепла  $\delta F_n(\lambda, \vartheta)$  таковы, что они ортогональны в смысле скалярного произведения (7.3.19), то аномалии притоков тепла на интервале времени  $I_n$  не вносят никакого вклада в формирование функционала (7.3.18). Другой предельный случай, когда локальные максимумы (и минимумы) функций  $T_n^*(\lambda, \vartheta)$  и  $\delta F_n(\lambda, \vartheta)$  совпадают и имеют одинаковый знак, соответствует наибольшему вкладу интеграла (7.3.19) в величину функционала (7.3.18).

В связи с этим решение  $T^*(\mathbf{x}, t)$  сопряженной задачи (7.3.9)–(7.3.13) называется функцией влияния возмущений начальных данных  $\delta g(\mathbf{x})$

и притоков тепла  $\delta F(\lambda, \vartheta, t)$  на величину функционала  $J(T)$ , или функцией чувствительности.

Сделаем несколько замечаний.

1. Для оценки чувствительности модели обычно необходимо использовать набор функционалов  $J_k(T)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) и множество пар входных данных  $\{\delta g_m, \delta F_m\}$ , а затем вычислить функционалы  $J_k(T)$  по формулам (7.3.7), (7.3.8). Однако при изучении чувствительности модели к вариациям входных данных зачастую  $K \ll M$ . В этом случае проще найти  $K$  решений сопряженных задач (7.3.9)–(7.3.13), а потом вычислить функционалы  $J_k(T)$  для каждой пары  $\{\delta g_m, \delta F_m\}$ , используя формулу (7.3.18).

2. Задача (7.3.1)–(7.3.6) рассматривается для отклонений  $T(\mathbf{x}, t)$  поля температуры от базисного состояния, в качестве которого могут рассматриваться некоторые климатические, аналитические или полученные в результате наблюдений реальные поля  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \tilde{T}(\mathbf{x}, t)\}$ . С этой точки зрения изучения возможностей прогноза среднемесячных аномалий полезно проанализировать предлагаемым методом типичные, т. е. наиболее часто повторяющиеся, состояния физической системы  $\{\mathbf{u}, \tilde{T}\}$ , чтобы изучить их устойчивость, структуру отклика системы на локализованные возмущения, оценить относительный вклад возмущений притоков тепла различной физической природы в формирование среднемесячных аномалий и определить разумную длину рассматриваемого интервала времени  $(0, \bar{t})$ .

3. Источник возмущений  $\delta F$  можно ввести в модель (7.3.1)–(7.3.6) не через условия (7.4.4), (7.4.6), а через правую часть уравнения (7.3.1) (см. [120]). В этом случае в общей ситуации первый интеграл в правой части равенства (7.3.16) имеет вид

$$\int_0^{\bar{t}} \int_D T^*(\mathbf{x}, t) \delta F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \quad (7.3.20)$$

## 7.4. Сопряженные уравнения динамики атмосферы

Рассмотрим систему уравнений динамики атмосферных процессов в адиабатическом приближении и исследуем структуру оператора задачи. Исследования начнем с простейшего случая баротропной атмосферы. В этом случае имеем задачу

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Здесь предполагается, что  $\bar{u}, \bar{v}$  известны за счет линейаризации и удовлетворяют уравнению неразрывности  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$ ,  $R\bar{T} = \text{const}$ , а  $\varphi(x, y, t)$  играет роль относительного отклонения давления от стандартного. Будем считать, что областью определения решения является квадрат  $\Omega$ . На границе  $\partial\Omega$  предположим, что поставлены условия периодичности решения. Введем в рассмотрение вектор решения и матрицу

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ R\bar{T}\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{array}{ccc} \Lambda & -l & \frac{\partial}{\partial x} \\ l & \Lambda & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{array} \right\|.$$

Здесь  $l$  – параметр Кориолиса,

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \cdot + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \cdot.$$

Используя это обозначение, имеем

$$\Lambda u = \text{div} \bar{\mathbf{u}} u, \quad \Lambda v = \text{div} \bar{\mathbf{u}} v, \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (7.4.1) можно записать в операторной форме

$$L\varphi \equiv \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A}\varphi = 0, \tag{7.4.2}$$

где  $\mathbf{B}$  – матрица следующего вида:

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Скалярное произведение в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  введем следующим соотношением при любом  $t \in [0, T]$ :

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} g_i h_i d\Omega.$$

Здесь  $g_i$  и  $h_i$  – соответственно компоненты вектор-функций  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{h}$  из  $H$ .

Найдем теперь сопряженный оператор по отношению к  $\mathbf{A}$ . С этой целью рассмотрим тождество Лагранжа

$$(\mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{g})_{\Omega} = (\mathbf{h}, \mathbf{A}^*\mathbf{g})_{\Omega},$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{g})_{\Omega} = & \int_{\Omega} \left[ \left( \Lambda u + lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) u^* + \right. \\ & \left. + \left( lu + \Lambda v + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) v^* + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) R\bar{T} \varphi^* \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Для простоты примем

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ R\bar{T}\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ R\bar{T}\varphi^* \end{bmatrix}.$$

В (7.4.3) предполагается, что  $\mathbf{h}$  при любом  $t \in [0, T]$  принадлежит  $D(\mathbf{A})$  – области определения оператора  $\mathbf{A}$ . Относительно свойств функций, принадлежащих множеству  $D(\mathbf{A})$ , предположим, что они имеют такую необходимую гладкость, что все последующие преобразования в области  $\Omega$  имеют смысл. Мы не будем точно формулировать эти свойства, имея в виду, что они могут быть получены без труда аналогично тому, как это имело место в предыдущих параграфах.

С помощью интегрирования по частям в предположении о периодичности решений и некоторых очевидных преобразований интеграл в правой части (7.4.3) можно привести к виду

$$(\mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{g})_{\Omega} = \int_{\Omega} \left[ \left( \Lambda^* u^* + lv^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) u + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -lu^* + \Lambda^* v^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right) v - \\
& - \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) R\bar{T} \varphi \Big] d\Omega = (\mathbf{h}, \mathbf{A}^* \mathbf{g})_{\Omega},
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

где

$$\Lambda^* = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \cdot + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \cdot \right) = - \left( \bar{u} \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) = -\Lambda. \tag{7.4.5}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  удовлетворяют уравнению неразрывности  $\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y = 0$ . Учитывая соотношения (7.4.4) и (7.4.5), приходим к выражениям

$$\varphi^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ R\bar{T} \varphi^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \left\| \begin{array}{ccc} -\Lambda & l & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -l & -\Lambda & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{array} \right\| = -\mathbf{A}.$$

Функция  $\varphi^*$  при любом  $t \in [0, T]$  принадлежит множеству  $D(\mathbf{A}^*)$  – области определения оператора  $\mathbf{A}^*$ . Свойства элементов из  $D(\mathbf{A}^*)$  нетрудно получить, анализируя необходимые требования для выполнения преобразований при получении оператора  $\mathbf{A}^*$  из  $\mathbf{A}$ .

До сих пор предполагалось, что  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  – заданные функции  $x$ ,  $y$  и времени. И это было серьезным ограничением построения теории сопряженных задач. Автор в 1974 г. в монографии [76] построил сопряженные уравнения для нелинейных задач гидродинамики. Суть метода в следующем. Предположим, что мы имеем дело с квазилинейной системой

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

и нашли решение этой системы при условии периодичности на границе с учетом начальных данных

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t = 0. \tag{7.4.7}$$



Полученные при решении этой задачи функции  $u$  и  $v$  будем рассматривать в качестве коэффициентов в нелинейных операторах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^*$ . В результате получим

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{ccc} \Lambda & -l & \frac{\partial}{\partial x} \\ l & \Lambda & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{A}^* = -\mathbf{A},$$

где  $\Lambda$  теперь оператор вида

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} u \cdot + \frac{\partial}{\partial y} v \cdot.$$

Наряду с задачей (7.4.6) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - v \frac{\partial u^*}{\partial y} + l v^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - u \frac{\partial v^*}{\partial x} - v \frac{\partial v^*}{\partial y} - l u^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

при условии

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (7.4.9)$$

Задачи (7.4.6), (7.4.7) и (7.4.8), (7.4.9) запишем в операторной форме.

Тогда

$$L\varphi \equiv \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A}\varphi = 0, \quad \mathbf{B}\varphi = \mathbf{B}\varphi_0 \quad \text{при } t = 0, \quad (7.4.10)$$

$$L^*\varphi^* \equiv -\mathbf{B} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \mathbf{A}\varphi^* = 0, \quad \mathbf{B}\varphi^* = \mathbf{B}\varphi_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (7.4.11)$$

Умножим далее уравнение (7.4.10) скалярно на  $\varphi^*$ , уравнение (7.4.11) – на  $\varphi$  и результаты вычтем один из другого. Тогда приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B}\varphi, \varphi^*) = 0. \quad (7.4.12)$$

Интегрируя это уравнение при заданных условиях при  $t = 0$  и  $t = T$ , имеем

$$(\mathbf{B}\varphi_T, \varphi_T^*)_\Omega = (\mathbf{B}\varphi_0, \varphi_0^*)_\Omega. \quad (7.4.13)$$

Это условие нам пригодится в дальнейшем. А пока перепишем его в покомпонентной форме:

$$\int_{\Omega} (u_T u_T^* + v_T v_T^*) d\Omega = \int_{\Omega} (u_0 u_0^* + v_0 v_0^*) d\Omega. \quad (7.4.14)$$

Следует отметить, что если в качестве  $u_T^*$  и  $v_T^*$  выбрать  $u_T$  и  $v_T$ , то мы приходим к закону сохранения кинетической энергии:

$$\int_{\Omega} E_T d\Omega = \int_{\Omega} E_0 d\Omega.$$

В этом случае имеет место полная обратимость решения. Это значит, что, решив задачу (7.4.6), (7.4.7) и положив  $u_T^* = u_T$ ,  $v_T^* = v_T$ , можно решить задачу (7.4.8), (7.4.9) в обратном направлении (по времени). В результате приходим к тем же решениям основной системы, что и при решении основной задачи.

В заключение покажем, что для наших исследований иногда предпочтительно пользоваться более общим вещественным фазовым пространством  $H$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_{\Omega \times \Omega_t} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} d\Omega \int_0^T g_i h_i dt.$$

Введем в рассмотрение операторы

$$\mathbf{L} = \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{L}^* = -\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{A}.$$

Тогда нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$(\mathbf{L}\varphi, \varphi^*)_{\Omega \times \Omega_t} = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*)_{\Omega \times \Omega_t} - (\mathbf{B}\varphi_T, \varphi_T^*)_{\Omega} + (\mathbf{B}\varphi_0, \varphi_0^*)_{\Omega}. \quad (7.4.15)$$

Учитывая равенство (7.4.13), окончательно приходим к

$$(\mathbf{L}\varphi, \varphi^*)_{\Omega \times \Omega_t} = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*)_{\Omega \times \Omega_t}, \quad (7.4.16)$$

где

$$\mathbf{L}^* = -\mathbf{L}.$$

Переходим теперь к рассмотрению системы основных уравнений с вязкостью, т. е. пусть

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu \Delta v &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

при условии

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (7.4.18)$$

и в предположении о периодическом характере решений. Тогда методом, изложенным выше, полагая

$$\Lambda = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \mu \Delta, \quad \Lambda^* = -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - \mu \Delta,$$

приходим к системе сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - v \frac{\partial u^*}{\partial y} + lv^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - u \frac{\partial v^*}{\partial x} - v \frac{\partial v^*}{\partial y} - lu^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \mu \Delta v^* &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

при условии

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (7.4.20)$$

Анализ задач (7.4.17), (7.4.18) и (7.4.19), (7.4.20) показывает, что основная задача должна решаться при возрастании  $t$  в интервале  $0 \leq t \leq T$ , а сопряженная задача – при убывании  $t$  в интервале  $T \geq t \geq 0$ . Только такой счет будет корректным для каждой из задач. Это связано с наличием в уравнениях сил вязкости. Смысл введения сопряженных задач нам будет ясен в дальнейшем из анализа формул теории возмущений.

## 7.5. Сопряженные уравнения для бароклинной атмосферы

Рассмотрим теперь модель бароклинной атмосферы в адиабатическом приближении:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \Lambda u - l \bar{\rho} v + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + \Lambda v + l \bar{\rho} u + \bar{p} \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\
 -g \bar{\rho} \vartheta + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial t} + \Lambda \vartheta + \frac{\gamma_\alpha - \gamma}{\bar{T}} \bar{\rho} \omega &= 0
 \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

при условии

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho} \omega &= 0 \text{ при } z = 0, \\
 \bar{\rho} \omega &= 0 \text{ при } z = H.
 \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Решение предполагается периодическим в плоскости  $(x, y)$  и удовлетворяет начальным данным

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \text{ при } t = 0. \tag{7.5.3}$$

Предположим далее, что  $R\bar{T} = \text{const}$ ,  $(\gamma_\alpha - \gamma)/\bar{T} = \text{const}$ ,  $\bar{p} = R\bar{\rho}\bar{T}$ . Оператор  $\Lambda$  определим формулой

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} u + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} v + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \omega.$$

Следовательно,

$$\Lambda u = \text{div} \bar{\rho} \mathbf{u} u, \quad \Lambda v = \text{div} \bar{\rho} \mathbf{u} v, \quad \Lambda \vartheta = \text{div} \bar{\rho} \mathbf{u} \vartheta.$$

Введем далее в рассмотрение следующие вектор-функции и матрицы:

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{array}{ccccc} \Lambda & -\bar{\rho}l & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \bar{\rho}l & \Lambda & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & -g\bar{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\bar{\rho} & 0 & \frac{\bar{T}g}{\gamma_\alpha - \gamma}\Lambda \end{array} \right\|,$$

$$B\varphi_0 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}u_0 \\ \bar{\rho}v_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{T}g}{\gamma_\alpha - \gamma}\bar{\rho}\vartheta_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{array}{ccccc} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{T}g}{\gamma_\alpha - \gamma}\bar{\rho} \end{array} \right\|.$$

Тогда задача (7.5.1), (7.5.2) перепишется в виде

$$\mathbf{L}\varphi \equiv \mathbf{B}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{A}\varphi = 0, \quad \mathbf{B}\varphi = B\varphi_0 \text{ при } t = 0. \quad (7.5.4)$$

Здесь предполагается, что решение принадлежит множеству непрерывных и дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (7.5.2) и предположению о периодичности. Скалярное произведение для вещественных  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{h}$  введем соотношением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_\Omega = \sum_{i=1}^5 \int_{\Omega} g_i h_i \, d\Omega.$$

Рассмотрим оператор  $\mathbf{A}$  и найдем ему сопряженный с помощью тождества Лагранжа.

В результате выкладок, аналогичных рассмотренным ранее, получим

$$\varphi^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ \omega^* \\ \varphi^* \\ \vartheta^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \left\| \begin{array}{ccccc} -\Lambda & \bar{\rho}l & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -\bar{\rho}l & -\Lambda & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & g\bar{\rho} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g\bar{\rho} & 0 & -\frac{\bar{T}g}{\gamma_\alpha - \gamma}\Lambda \end{array} \right\|.$$

При построении сопряженного оператора мы воспользовались легко проверяемым фактом, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} u + v^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} v + \omega^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} \omega) d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} (u \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} u^* + v \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} v^* + \omega \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} \omega^*) d\Omega. \end{aligned}$$

Это соотношение справедливо при выполнении нескольких условий: предположения, что

$$\operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u}^* = 0;$$

требования, чтобы компоненты решения  $\varphi^*$  удовлетворяли условиям гладкости, предельным соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \omega^* &= 0 \text{ при } z = 0, \\ \bar{\rho} \omega^* &= 0 \text{ при } z = H; \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

наконец, условия периодичности решений в плоскости  $(x, y)$ . Мы видим, что в этом случае имеет место соотношение

$$\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}. \tag{7.5.6}$$

Таким образом, оператор  $\mathbf{A}$  является кососимметричным. Нашей задачей является построение сопряженных уравнений, соответствующих эволюционным задачам. С этой целью наряду с (7.5.4) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$\mathbf{L}^* \varphi^* \equiv -\mathbf{B} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \mathbf{A} \varphi^* = 0, \tag{7.5.7}$$

$$\varphi^* = \varphi_T^* \text{ при } t = T. \tag{7.5.8}$$

Для нее, как нетрудно убедиться, будем иметь тождество, аналогичное (7.4.13), однако же для нового пятимерного фазового пространства

$$(\mathbf{B} \varphi_T, \varphi_T^*)_{\Omega} = (\mathbf{B} \varphi_0, \varphi_0^*)_{\Omega}. \tag{7.5.9}$$

Это соотношение в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \bar{\rho} u_T u_T^* + \bar{\rho} v_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_{\alpha} - \gamma} \bar{\rho} \vartheta_T \vartheta_T^* \right) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left( \bar{\rho} u_0 u_0^* + \bar{\rho} v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_{\alpha} - \gamma} \bar{\rho} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

Если выбрать  $u_T^* = u_T$ ,  $v_T^* = v_T$ ,  $\vartheta_T^* = \vartheta_T$ , то приходим к закону сохранения полной энергии

$$\int_{\Omega} \bar{\rho} \pi_T d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\rho} \pi_0 d\Omega,$$

где

$$\pi = u^2 + v^2 + \frac{g\bar{T}}{\gamma_{\alpha} - \gamma} \bar{\rho} \vartheta^2.$$

Предположим, что значения  $u_T^*$ ,  $v_T^*$  и  $\vartheta_T^*$  выбраны следующим образом:

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0, \quad \vartheta_T^* = \frac{\gamma_{\alpha} - \gamma}{g\bar{T}} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (7.5.11)$$

Тогда на основе (7.4.10) получаем

$$\bar{\rho} \vartheta_T(x_0, y_0, z_0) = \int_{\Omega} \left( \bar{\rho} u_0 u_0^* + \bar{\rho} v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_{\alpha} - \gamma} \bar{\rho} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) d\Omega. \quad (7.5.12)$$

Эта формула указывает на связь между температурой в заданной точке пространства в момент времени  $t = T$  и начальным (при  $t = 0$ ) состоянием атмосферы. Напомним, что в формуле (7.5.12)  $u_0, v_0$  и  $\vartheta_0$  заданы в начальный момент времени, а  $u_0^*, v_0^*$  и  $\vartheta_0^*$  – решения сопряженных уравнений при условии (7.5.11).

## 7.6. Задачи чувствительности климатической изменчивости для различных регионов мира

При математическом моделировании изменений климата для различных регионов Земли, чувствительность выбранного функционала

связана с континентами, Мировым океаном, начальными данными, внешними источниками и внутренними параметрами задачи. Задача чувствительности климата позволяет, основываясь на реальных данных, ретроспективно устанавливать качество моделей и находить новые механизмы, ответственные за формирование климата.

В этом параграфе мы обсудим общие подходы к оценке чувствительности на примере простых теоретических моделей. Эти результаты далее могут быть обобщены для более сложных постановок задач.

Рассмотрим термическое взаимодействие атмосферы с Мировым океаном и континентами. Рассмотрим трехмерную модельную область  $\Omega$  в сферической системе координат  $(\lambda, \psi, z)$ , где  $\lambda$  – долгота,  $\psi$  – широта и  $z$  – высота, отсчитываемая от Земной поверхности, которая считается сферической, как и океан. Пусть  $h_1$  – высота атмосферного слоя;  $h_2$  – толщина деятельного океанического слоя;  $h_3$  – толщина слоя почвы;  $S$  – земная поверхность;  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ;  $S_1$  – часть Земли, покрытая льдом и/или снегом;  $S_2$  – океаническая поверхность;  $S_3$  – континентальная поверхность, свободная ото льда и снега.

Область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  состоит из:

– атмосферного слоя

$$\Omega_1 = \{(\lambda, \psi, z) : (\lambda, \psi) \in S_1, 0 < z < h_1\};$$

– активного океанического слоя

$$\Omega_2 = \{(\lambda, \psi, z) : (\lambda, \psi) \in S_2, -h_2 < z < 0\};$$

– верхнего слоя почвы

$$\Omega_3 = \{(\lambda, \psi, z) : (\lambda, \psi) \in S_3, -h_3 < z < 0\}.$$

Рассмотрим следующую задачу для поля температуры  $T(\lambda, \psi, z, t)$  на интервале  $\Omega_t = (0, T)$ :

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u} T) - \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\nu} \frac{\partial T}{\partial z}) - \bar{\mu} \Delta T = \varepsilon \quad (7.6.1)$$

с начальным условием

$$T = T_0(\mathbf{r}) \text{ при } t = 0, \quad (7.6.2)$$

где  $\mathbf{r} = (\lambda, \psi, z)^T$ ,  $\bar{\nu} = \alpha \nu$ ,  $\bar{\mu} = \alpha \mu$  и  $\nu$ ,  $\mu$  – коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена соответственно, зависящие от высоты  $z$  в связи с их различием для атмосферы и океана.



Функция  $\nu$  зависит также от горизонтальных координат и времени. Значения других величин в уравнении (7.6.1):  $\varepsilon$  – источник радиационной энергии, функция которой отлична от нуля только в области  $\Omega_1$ ;  $\alpha = c_p \rho(z)$ , где  $c_p$  удельная теплоемкость среды, а  $\rho(z)$  – стандартная плотность атмосферы (при  $z > 0$ ) и океана (при  $z < 0$ );  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  – вектор скорости воздушных потоков в области  $\Omega_1$  и течений в океане в области  $\Omega_2$ .

Предположим, что  $\mathbf{u}$ ,  $\nu$  и  $\mu$  заданы в области решения задачи с  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mu = 0$  в  $\Omega_3$ . Предположим также, что вектор-функция  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет в атмосфере и океане простейшему уравнению неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (7.6.3)$$

и ее нормальный компонент равен нулю на боковой поверхности Мирового океана, а также на поверхностях  $z = 0$ ,  $z = h_1$ ,  $z = -h_2$ . Конечно, для атмосферы, если необходимо, может быть рассмотрено нестационарное уравнение неразрывности.

Уравнение (7.6.1) рассматривается в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  при  $t \in \Omega_t = (0, \bar{t})$ . Граничные условия должны быть сформулированы на границе области  $\Omega$  при  $z = 0$ ,  $z = h_1$ ,  $z = -h_2$ ,  $z = -h_3$  и на поверхности раздела атмосфера-континент, что обеспечит существование единственного решения данной начально-краевой задачи.

На поверхности раздела атмосфера – океан и атмосфера – континент задаются условия равенства температур и скачок потоков тепла ( $z = 0$ ):

$$[T] = 0, \quad [\bar{\nu} \frac{\partial T}{\partial z}] = F(\lambda, \psi, z) \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_2 \cup S_3, \quad (7.6.4)$$

где  $[f] = f|_{z=-0} - f|_{z=+0}$  – скачок функции  $f$  по  $z$  в точке  $z = 0$ , а  $F(\lambda, \psi, z)$  – известная функция из данных наблюдений.

На границе атмосферы и части земной поверхности, покрытой льдом и/или снегом, ставится следующее условие:

$$\bar{\nu} \frac{\partial T}{\partial z} + F = 0 \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_1. \quad (7.6.5)$$

На верхней границе атмосферы (при  $z = h_1$ ), на нижней границе донного океана и нижнем слое почвы задаются условия отсутствия потоков тепла:

$$\bar{\nu} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad z = -h_2, \quad z = -h_3. \quad (7.6.6)$$

Предположим, для упрощения, что границы между континентами и Мировым океаном – цилиндрические и

$$\bar{\mu} \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ при } \partial\Omega_2, \quad (7.6.7)$$

где  $\partial\Omega_2$  – боковая поверхность области  $\Omega_2$  и  $n$  – нормаль к  $\partial\Omega_2$ .

Итак, задача (7.6.1)–(7.6.7) поставлена полностью, и мы предположим, что начальные условия задачи определяют ее единственное решение, которое принадлежит Гильбертову пространству  $L_2(\Omega \times \Omega_t)$ . Предположим, что решение является достаточно гладкой функцией, так что все дальнейшие преобразования справедливы. Вопросы существования и единственности решения задачи (7.6.1)–(7.6.7) обсуждены в [121].

Перейдем к рассмотрению чувствительности решения задачи (7.6.1)–(7.6.7).

Рассмотрим следующий, наиболее интересный для нас функционал:

$$J = \int_0^{\bar{t}} dt \int_S F^*(\lambda, \psi, t) T(\lambda, \psi, 0, t) dS, \quad (7.6.8)$$

где  $F^*(\lambda, \psi, t)$  – некоторая весовая функция, связанная с полем температуры на поверхности  $z = 0$ . Например, если мы хотим определить среднюю температуру в некотором выделенном регионе континента  $\omega$  при  $z = 0$  на интервале времени  $\bar{t} - \tau \leq t \leq \bar{t}$ , то выберем в качестве  $F^*$  функцию

$$F^*(\lambda, \psi, t) = \begin{cases} 1/(\tau \text{ mes } \omega), & \text{если } (\lambda, \psi) \in \omega, \bar{t} - \tau \leq t \leq \bar{t} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7.6.9)$$

где  $\text{mes } \omega$  означает, как обычно, площадь региона  $\omega$ . Тогда функционал (7.6.8) может быть переписан в форме

$$J = \frac{1}{\tau} \int_{\bar{t}-\tau}^{\bar{t}} dt \left( \frac{1}{\tau \text{ mes } \omega} \int_{\omega} T(\lambda, \psi, 0, t) dS \right). \quad (7.6.10)$$

Выражение (7.6.10) описывает среднюю температуру на интервале  $\bar{t} - \tau \leq t \leq \bar{t}$  для выбранного региона  $\omega$ . Эти типы функционалов наиболее интересны в теории изменений климата.

После того, как мы определили функционал задачи в виде (7.6.8) или (7.6.10), мы можем сформулировать сопряженную задачу к (7.6.1)–(7.6.7), используя методы, которые мы рассматривали в предыдущих главах. Она будет иметь следующий вид:

$$-\alpha \frac{\partial T^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u} T^*) - \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\nu} \frac{\partial T^*}{\partial z}) - \bar{\mu} \Delta T^* = \varepsilon \quad (7.6.11)$$

с «начальным» условием

$$T^*(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ при } t = \bar{t}. \quad (7.6.12)$$

Уравнение (7.6.11) рассматривается в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  при  $t \in \Omega_t$ . Как для поверхности  $z = 0$ , так и для других «специальных» поверхностей, где не требуется выполнения условий дифференцируемости решения  $T^*$  и его производных, следует определить дополнительные граничные условия:

$$[T^*] = 0, \quad [\bar{\nu} \frac{\partial T^*}{\partial z}] = F^* \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_2 \cup S_3, \quad (7.6.13)$$

где  $F^*$  задается функционалом (7.6.8) или, в частности, (7.6.10).

На границе между атмосферой и частью Земной поверхности покрытой льдом и/или снегом задается следующее условие:

$$\bar{\nu} \frac{\partial T^*}{\partial z} + F^* = 0 \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_1. \quad (7.6.14)$$

Условия на верхней границе атмосферы (при  $z = h_1$ ) и на нижних границах деятельных слоев океана и почвы следующие:

$$\bar{\nu} \frac{\partial T^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad z = -h_2, \quad z = -h_3. \quad (7.6.15)$$

Предположим, что на границах между континентами и Мировым океаном выполняется

$$\bar{\mu} \frac{\partial T^*}{\partial n} = 0 \text{ при } \partial\Omega_2, \quad (7.6.16)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе цилиндрической поверхности «океан – континент».

В [121] доказана теорема существования и единственности обобщенного решения прямой задачи (7.6.1)–(7.6.7) и сопряженной задачи (7.6.11)–(7.6.16).

С учетом (7.6.3) и того, что решения прямой и сопряженной задач принадлежат  $L_2(\Omega \times \Omega_t)$ , обладают необходимой гладкостью и удовлетворяют сформулированным граничным условиям, вытекают следующие соотношения:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha T \, d\Omega = \int_S F \, dS - \int_{\Omega_1} \varepsilon \, d\Omega_1, \quad (7.6.17)$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha T^* \, d\Omega = \int_S F^* \, dS,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha T^2 \, d\Omega \leq \int_S FT \, dS - \int_{\Omega_1} \varepsilon T \, d\Omega_1; \quad (7.6.18)$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha T^{*2} \, d\Omega = \int_S F^* T^* \, dS.$$

В (7.6.17), (7.6.18) учтен тот факт, что нормальный компонент вектора скорости на границе континентов и океанов обращается в ноль.

Из (7.6.18) следует, что решение прямой задачи устойчиво, так же как и сопряженной, которая решается в обратном времени от  $t = \bar{t}$  до  $t = 0$ .

Рассмотрим теперь другую форму функционала (7.6.8), выраженную через решение сопряженной задачи  $T^*$ . Умножим уравнение (7.6.1) на  $T^*$  и уравнение (7.6.11) на  $T$ , проинтегрируем по времени в  $\Omega_t$  и по всей области  $\Omega$  с учетом начальных данных (7.6.2), (7.6.12) и граничных условий (7.6.4)–(7.6.7), (7.6.13)–(7.6.16), а затем возьмем разность результатов. Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} J = & \int_{\Omega} \alpha T^*(\mathbf{r}, 0) T_0(\mathbf{r}) \, d\Omega + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_S F(\lambda, \psi, t) T^*(\lambda, \psi, 0, t) dS + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega_1} \varepsilon T^*(\lambda, \psi, z, t) \, d\Omega_1. \end{aligned} \quad (7.6.19)$$

Заметим, что левая часть соотношения точно совпадает с функционалом, определенным формулой (7.6.8).

Выражение (7.6.19) описывает функционал чувствительности  $J$  к локальным регионам и входным данным, поскольку весовая функция  $T^*$  отражает влияние начальных данных  $T_0(\mathbf{r})$ , потоков тепла  $F(\lambda, \psi, t)$  на границе  $z = 0$  и источников радиации в атмосфере  $\varepsilon$ .

Представляя функции  $T$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\varepsilon$ ,  $F$  исходной задачи (7.6.1)–(7.6.7) как сумму стандартных климатических величин и отклонений

$$T = \bar{T} + \delta T, \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta \varepsilon, \quad F = \bar{F} + \delta F, \quad (7.6.20)$$

придем к более сложной формуле для этого функционала, основанной на теории возмущений.

Предположим, что климатические величины удовлетворяют задаче

$$\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha \bar{\mathbf{u}} \bar{T}) - \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}) - \bar{\mu} \Delta \bar{T} = \bar{\varepsilon} \quad (7.6.21)$$

с начальными условиями

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \text{ при } t = 0 \quad (7.6.22)$$

и граничными условиями

$$[\bar{T}] = 0, \quad \left[ \bar{\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] = \bar{F}(\lambda, \psi, z) \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_2 \cup S_3;$$

$$\bar{\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \bar{F} = 0 \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_1; \quad (7.6.23)$$

$$\bar{\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad z = -h_2, \quad z = -h_3;$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial \Omega_2. \quad (7.6.24)$$

Сформулируем задачу для отклонений  $\delta T$  следующим образом:

$$\alpha \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha \bar{\mathbf{u}} \delta T) - \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\nu} \frac{\partial \delta T}{\partial z}) - \bar{\mu} \Delta \delta T = \varepsilon_1, \quad (7.6.25)$$

где

$$\varepsilon_1 = \delta \varepsilon - \operatorname{div}(\alpha \bar{T} \delta \mathbf{u}). \quad (7.6.26)$$

Добавим к (7.6.25) соответствующие начальные условия

$$\delta T = \delta T_0 \text{ при } t = 0 \quad (7.6.27)$$

и граничные условия

$$[\delta T] = 0, \quad \left[ \bar{\nu} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right] = \delta F \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_2 \cup S_3;$$

$$\bar{\nu} \frac{\partial \delta T}{\partial z} + \delta F = 0 \text{ при } z = 0, \quad (\lambda, \psi) \in S_1; \quad (7.6.28)$$

$$\bar{\nu} \frac{\partial \delta T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad z = -h_2, \quad z = -h_3;$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial \delta T}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial \Omega_2. \quad (7.6.29)$$

Разложим функцию  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}$ , стоящую во втором слагаемом уравнения (7.6.25) под знаком дивергенции. Запишем вариацию функционала  $\delta J = J - \bar{J}$  в следующем виде:

$$\delta J = J - \bar{J} = \int_0^{\bar{t}} dt \int_S F^*(\lambda, \psi, t) \delta T(\lambda, \psi, 0, t) dS, \quad (7.6.30)$$

или, используя предыдущие преобразования,

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \alpha T^*(\mathbf{r}, 0) \delta T_0(\mathbf{r}) d\Omega + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_S \delta F(\lambda, \psi, t) T^*(\lambda, \psi, 0, t) dS + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega_1} \delta \varepsilon T^*(\lambda, \psi, z, t) d\Omega_1 - \\ & - \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha \bar{T} \delta \mathbf{u}) T^*(\lambda, \psi, z, t) d\Omega. \end{aligned} \quad (7.6.31)$$

Если вариации вектора скорости  $\delta \mathbf{u}$  малы, т. е.  $\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}$ , то последним слагаемым в (7.6.31) можно пренебречь, и мы получим приближенную формулу:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \alpha T^*(\mathbf{r}, 0) \delta T_0(\mathbf{r}) d\Omega + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_S \delta F(\lambda, \psi, t) T^*(\lambda, \psi, 0, t) dS + \\ & + \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega_1} \delta \varepsilon T^*(\lambda, \psi, z, t) d\Omega_1. \end{aligned} \quad (7.6.32)$$

Будем использовать эту упрощенную формулу в дальнейшем для иллюстрации результатов простых моделей, в которых вариация  $\delta \mathbf{u}$  в океане неизвестна. Более того, как для океана, так и для атмосферы мы будем использовать согласованные климатические данные и предполагать, что  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ .

Представляя временной интервал в уравнении (7.6.32) как сумму подынтервалов  $I_k = (t_k, t_{k-1})$ , перепишем формулу (7.6.32) в виде

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \alpha T^*(\mathbf{r}, 0) \delta T_0(\mathbf{r}, 0) d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k-1}} dt \int_S \delta F T^* dS + \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k-1}} dt \int_{\Omega_1} \delta \varepsilon T^* d\Omega_1, \end{aligned} \quad (7.6.33)$$

где  $t_0 = \bar{t}$ ,  $t_N = 0$ ,  $t_k = t_{k-1} - \tau_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Рассмотрим теперь проблему вертикального турбулентного обмена в системе атмосфера – океан, которая играет важную роль во взаимодействии двух сред.

В численных экспериментах с моделью термического взаимодействия между атмосферой и подстилающей поверхностью, мы учитывали поля коэффициентов вертикальной турбулентной диффузии в океане рассчитанные с помощью метода, изложенного в [113]. Опишем этот метод для верхнего деятельного слоя океана.

Введем оператор осреднения для произвольной интегрируемой функции  $b = b(t)$  на характерном временном масштабе  $\tau$ :

$$\bar{b} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} b(t') dt' \quad (7.6.34)$$

и представим  $b = \bar{b} + b'$ , где средняя величина обозначена чертой, а отклонение от среднего - штрихом.

Пусть интегральный коэффициент вертикального перемешивания в океане определяется на сезонном масштабе времени ( $\tau \sim 1-3$  месяцев) вертикальным сдвигом скорости течений  $\Sigma$ , вертикальным градиентом температуры  $\gamma$ , его сезонной изменчивостью  $\sigma$  и параметром плавучести  $\lambda$  таким образом, что можно записать

$$\Sigma = \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}, \quad (7.6.35)$$

$$\sigma = (\overline{T'^2})^{1/2}, \quad \lambda = g\alpha_T,$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\alpha_T$  – коэффициент термического расширения воды;  $\lambda = 0,2 \text{ см}/(c^2 \text{ град.})$ ;  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  – средние горизонтальные компоненты вектора скорости течений.

Из набора этих параметров может быть получен только один безразмерный параметр – число Ричардсона:

$$Ri = \frac{\lambda \gamma}{\Sigma^2} \quad (7.6.36)$$

и только одна размерная комбинация для коэффициента перемешивания ( $\text{см}^2/\text{с}$ ):

$$\nu = C(Ri) \lambda^{1/2} |\gamma|^{-3/2} \sigma^2, \quad \bar{\nu} = \alpha \nu, \quad (7.6.37)$$

где  $C$  – безразмерная величина, зависящая от  $Ri$ .

Оценка коэффициента  $C(Ri)$  в (7.6.37) получена в работе [113] в предположении о малости его вариаций для крупномасштабных характеристик  $\sigma$  и  $\gamma$  и с использованием данных наблюдений в некоторых точках в океане. Оценка параметра дает величину  $C = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Используем формулу (7.6.37) для расчета коэффициента вертикального перемешивания (для сезонного масштаба времени) на основе наблюдений крупномасштабных характеристик верхнего пограничного слоя океана и диагностического метода. Используем данные



пространственного распределения сезонной изменчивости температуры поверхности моря  $\sigma$  в узлах сетки  $10^\circ \times 10^\circ$  [136] и рассчитаем температурный градиент  $\gamma$  в верхнем слое океана для климатических полей температуры в зимний и летний сезоны по данным Хеллермана (версия нефiltroванных данных опубликована в [222]).

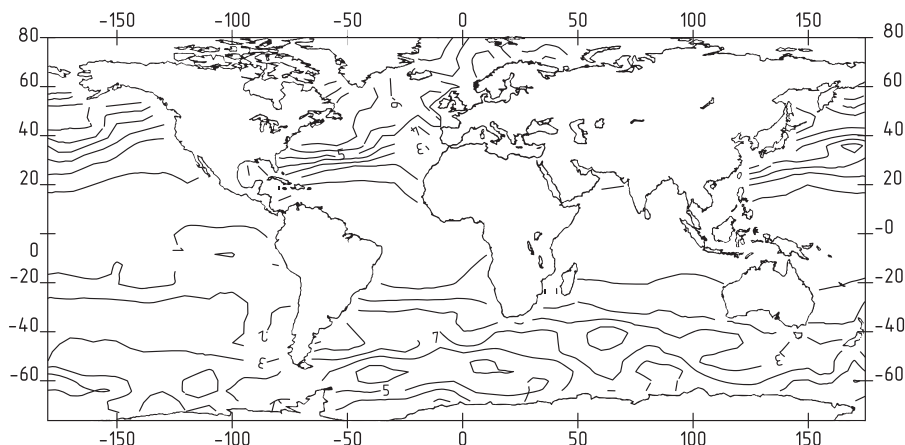


Рис. 7.1

Рисунок 7.16 отражает результаты расчета пространственного распределения коэффициента  $\nu$  в зимний сезон (изолинии  $\ln(1 + \nu)$  приведены в верхнем слое океана, контуры нумеруются от 0 с интервалом 0,7). Максимум величины  $\nu(\lambda, \vartheta)$  расположен в зимний период в Атлантике, южнее острова Ньюфаундленд. Можно видеть, что положение локальных максимумов коэффициента  $\nu$  совпадает с известными климатическими энергоактивными зонами Мирового океана: Ньюфаундлендской, Норвежской, Алеутской и энергоактивными зонами течений Гольфстрим и Куроисио, где теплообмен между атмосферой и океаном (в Северном полушарии) наиболее активный.

Для вычисления термических функций влияния была выбрана численная модель основанная, на методе расщепления. Исходная трехмерная задача (7.6.1)–(7.6.7) была сведена к набору простых одномерных задач переноса-диффузии вдоль направлений  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $z$  и решалась с помощью безытерационных алгоритмов. Для решения задачи по времени был использован двуциклический метод расщепления с аппроксимацией Кранка – Николсона, что дает устойчивый алгоритм второго порядка точности по времени.

При решении одномерной задачи переноса-диффузии вдоль  $\lambda$  и  $\vartheta$ , использован метод ричардсоновской экстраполяции [79] для увели-

чения порядка аппроксимации, в котором соответствующая линейная комбинация двух решений на сетках с шагами  $h$  и  $h/3$  обеспечивает точность порядка  $O(h^4)$ . В модели использована широтно-долготная сетка разрешением  $5^\circ \times 4^\circ$ . В вертикальном направлении использована неравномерная сетка с расчетными уровнями на геопотенциальных поверхностях 850, 500, 300 мб в атмосфере, на глубинах 25, 75, 150 м в океане и на глубинах 0,5, 1,0 и 2,0 м в почве.

Основные параметры модели были следующими:

$$h_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}, \quad h_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ см}, \quad h_3 = 300 \text{ см};$$

в атмосфере:

$$c_p = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad 0 \leq \rho \leq 1.2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \mu = 10^9 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad 10^4 \leq \nu \leq 10^5 \frac{\text{см}^2}{\text{с}};$$

в океане:

$$c_p = 4,2 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad \rho = 1,0 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \mu = 10^8 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad \nu = \nu(\lambda, \psi, t);$$

в почве:

$$c_p = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad \rho = 2,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \mu = 0, \quad \nu = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$

Поле океанических течений, использованное в этих расчетах, было рассчитано на основе климатических данных о температуре и солености [272], среднемесячных полей  $u$  и  $v$  в атмосфере по данным наблюдений 1961–1970 гг., из массива Мирового центра данных (Обнинск, Российская Федерация).

Представим результаты решения сопряженных задач для климатических среднедекабрьских аномалий температуры поверхности земли для территорий Европы и Северной Америки. Было изучено поведение функционалов вида (7.6.8) с характеристическими функциями (7.6.9). Интервал  $I_1 = (\bar{t} - \tau, \bar{t})$  равнялся одному месяцу – декабрю. Полный временной интервал  $(0, \bar{t})$  соответствовал 12 месяцам, так что в формуле (7.6.33)  $N = 12$ ,  $\tau_k = 30$  дней.

Для того чтобы проиллюстрировать картину, ограничимся осредненными характеристиками для всего атмосферного слоя ( $0 < z < h_1$ ):

$$T_k^* = \frac{1}{\tau_k} \frac{1}{h_1} \int_{t_k}^{t_{k-1}} \int_0^{h_1} T^*(\lambda, \psi, z, t) \, dz dt \quad (7.6.38)$$

и для океанического слоя ( $-h_2 < z < 0$ ):

$$T_k^* = \frac{1}{\tau_k} \frac{1}{h_2} \int_{t_k}^{t_{k-1}} \int_{-h_2}^0 T^*(\lambda, \psi, z, t) dz dt, \quad (7.6.39)$$

хотя, конечно, интерес представляет также структура функций  $T_k^*$  на всех уровнях атмосферы и океана. Изучим структуру функций влияния (7.6.38), (7.6.39) для атмосферы и океана.

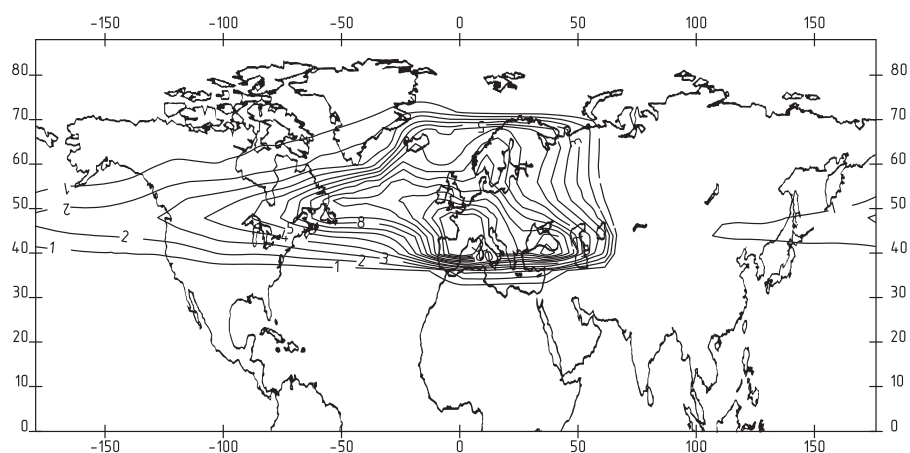


Рис. 7.2

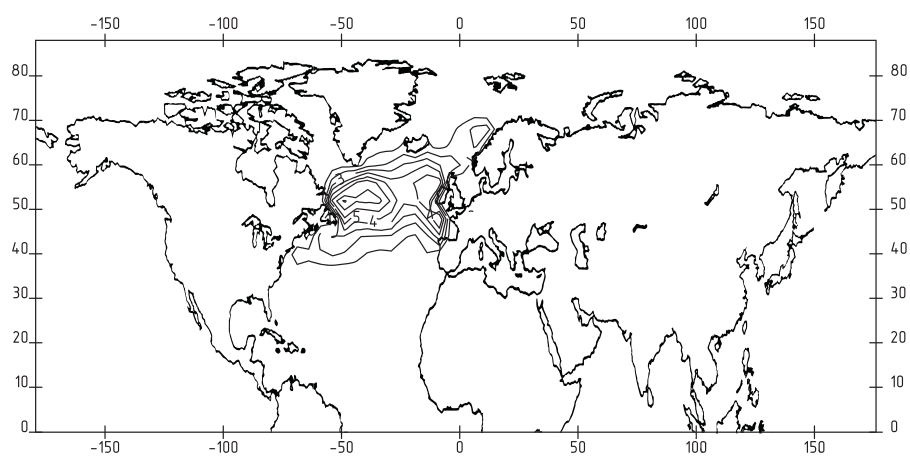


Рис. 7.3

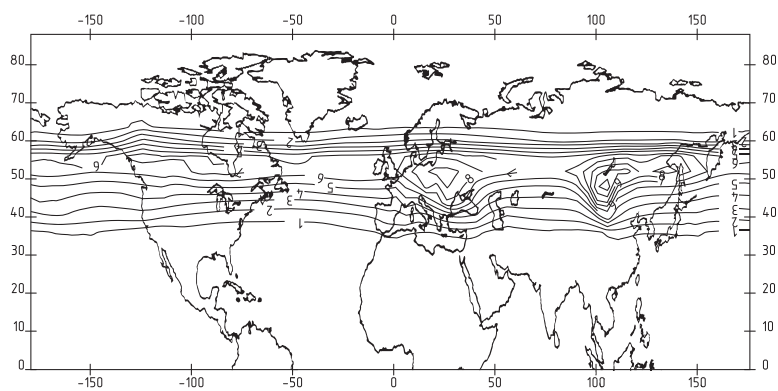


Рис. 7.4

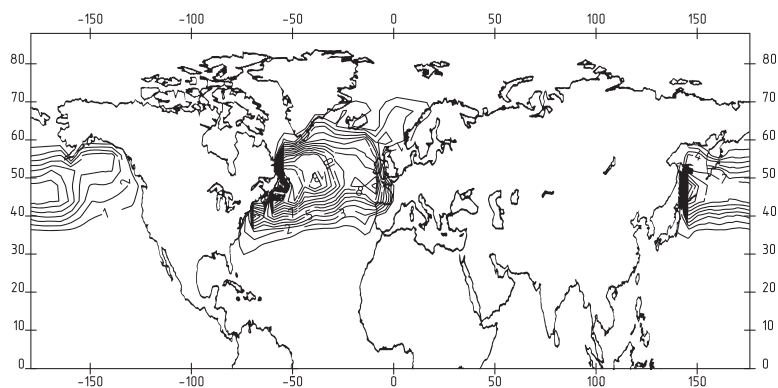


Рис. 7.5

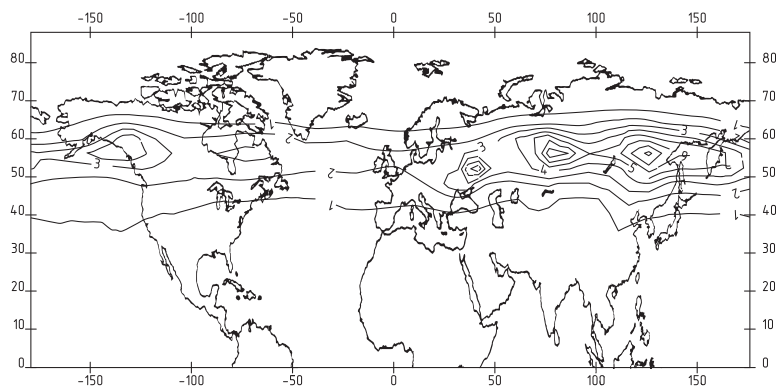


Рис. 7.6

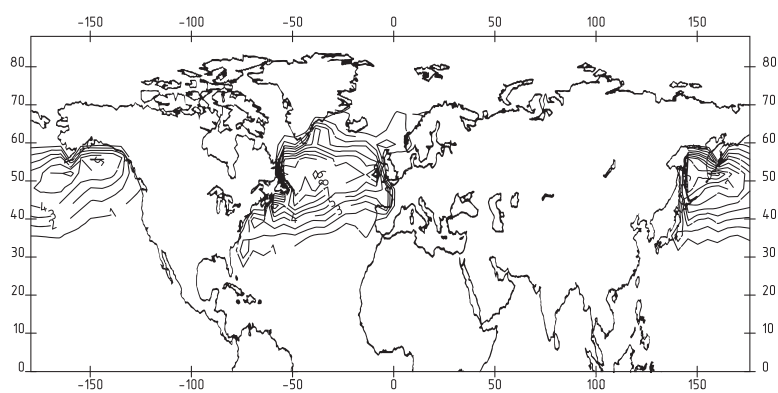


Рис. 7.7

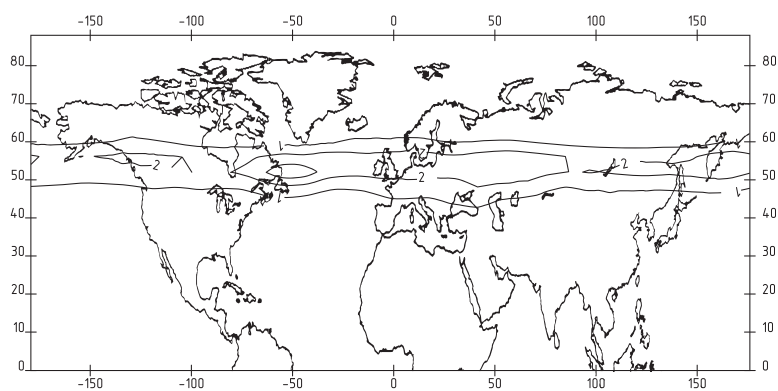


Рис. 7.8

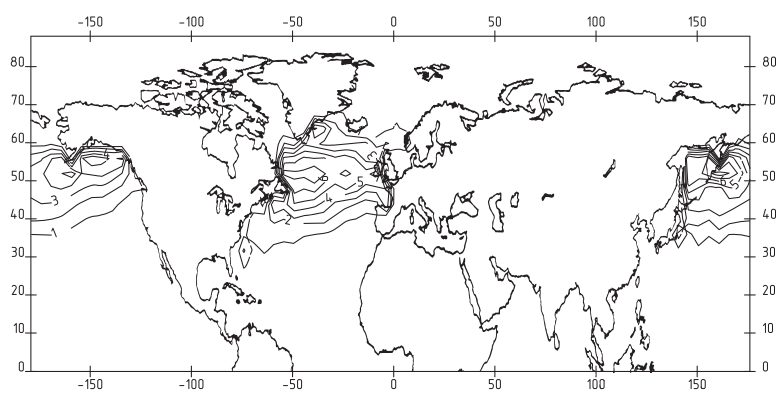


Рис. 7.9

Рассмотрим два эксперимента. В первом эксперименте источник  $F^*(\lambda, \psi, t)$  (см. (7.6.9)) ненулевой в декабре в Европе, во втором – в Северной Америке. Рисунки 7.17, 7.19, 7.21, 7.23 отражают функции влияния для атмосферы в первом эксперименте при  $k = 1, 3, 6, 9$  соответственно. Рисунки 7.18, 7.20, 7.22, 7.24 показывают эволюцию интегральной функции влияния в верхнем 200-метровом слое океана в этом же эксперименте (изолинии нумеруются от 0 с интервалом 0,2).

Так как сопряженная задача решалась в обратном направлении времени, локальные максимумы функции  $T_k^*$  (и, соответственно, зоны влияния) развиваются назад по времени (с ростом  $k$ ), следуя движению потоков воздушных и водных масс.

В соответствии с (7.6.9) источник  $F^*(\lambda, \psi, t)$  расположен в регионе  $\omega$  и отличается от нуля только на интервале  $I_1 = (\bar{t} - \tau, \bar{t})$ . Функция атмосферного влияния в первом эксперименте для этого времени простирается на всю Европу, часть Атлантики и Северной Америки (см. рис. 7.17). Функция атмосферного влияния  $T_3^*$  (см. рис. 7.19) посредством западно-восточного переноса в атмосфере распространяется по всей широтной зоне между  $35^\circ$  и  $65^\circ$  с небольшим локальным максимумом в Европе (в окрестности  $52^\circ$  и  $25^\circ$  E) и в регионе Монголии ( $48^\circ$  C и  $105^\circ$  B). Первый максимум появляется в результате остаточного воздействия источника  $F^*(\lambda, \psi, t)$ , а второй – в результате локальной конвергенции климатического ветра в этом регионе. Ввиду большой диссипации в атмосфере наблюдается уменьшение амплитуды на шестом временном интервале в 5 раз, по сравнению с амплитудой  $T_1^*$  на девятом временном интервале (отсчет интервалов идет в обратном времени). Как можно видеть на рисунке 7.23, интегральная функция влияния для атмосферы диссипирует практически полностью в течение девяти интервалов по времени.

Пространственно-временная структура функции  $T_k^*$  в верхнем 200-метровом слое океана (рис. 7.18, 7.20, 7.22, 7.24) с ростом числа  $k$  обусловлена процессами адвекции, турбулентным перемешиванием и вертикальным обменом на поверхности раздела взаимодействующих сред. Следует отметить совпадение расположений локальных максимумов сопряженной задачи и пространственного распределения вертикального турбулентного коэффициента перемешивания  $\nu$  в океане (см. рис. 7.16). Поэтому в течение первого интервала по времени начинается постепенное «проникновение» функции влияния в верхние слои океана Северной Атлантики (см. рис. 7.18). В течение трех

интервалов по времени локальные максимумы  $T_3^*$  в океане (см. рис. 7.20) начинают отчетливо проявляться в главных энергоактивных зонах (Ньюфаундленд, Гольфстрим, Куроисио). Таким образом, энергоактивные зоны отчетливо влияют на расположение и развитие локальных максимумов функций  $T_k^*$  и, как следствие, на формирование среднемесячных аномалий температуры воздуха в Европе.

Рисунки 7.18, 7.20, 7.22, 7.24 показывают эволюцию функции влияния в океане в соответствии с основными течениями, что особенно проявляется вдоль восточных берегов Северной Америки в окрестности течения Гольфстрим. Амплитуды  $T_k^*$  постепенно уменьшаются, их интенсивности в Северной Атлантике и Западной части Тихого океана становятся сравнимыми (при  $k = 6, 9$ ; см. рис. 7.22, 7.24).

Аналогичные процессы наблюдаются во втором эксперименте, проведенном для территории Северной Америки. На рис. 7.25 показана функция влияния в атмосфере для первого интервала по времени. Ее структура соответствует структуре климатического ветра над Североамериканским континентом. Затем она заполняет широтный пояс  $20^\circ\text{--}65^\circ\text{ N}$  ( $k = 3$ , рис. 7.27) и постепенно диссипирует при  $k = 6, 9$  (рис. 7.29, 7.31). На рис. 7.26, 7.28, 7.30, 7.32 показана динамика функции влияния во втором эксперименте в верхнем слое океана при  $k = 1, 3, 6, 9$  соответственно (контуры нумеруются от 0 с интервалом 0,2). Она растет на всем первом интервале по времени в Тихом океане в регионе Куроисио и Алеутских островов. При  $k = 3, 6, 9$  функция влияния распространяется вдоль широтного пояса в атмосфере и начинает проникать в Северную Атлантику, хотя максимумы ее амплитуды остаются в энергоактивных зонах Тихого океана.

Анализ результатов расчетов показывает, что в течении первого интервала по времени в формировании аномалий над Европой и Северной Америкой доминируют атмосферные процессы, затем постепенно растет роль океана, а с шестого интервала по времени амплитуда численного решения начинает уменьшаться.

Вычисляя  $T^*$  на всех уровнях в атмосфере, океане и континентах, можно получить более точную информацию о чувствительности регионов. Естественно, вычисления требуют знания текущих полей скорости ветра и океанических течений, радиационных потоков тепла при  $z = 0$  и величин коэффициентов  $\nu$  и  $\mu$ .

Анализируя результаты расчетов пространственно-временной структуры решений сопряженных задач, можно определить, какая энергоактивная зона Мирового океана и в какой промежуток времени

воздействует на формирование среднемесячных аномалий температуры в выбранном регионе. Это открывает возможность определить пространственно-временные характеристики процессов формирования линейного отклика совместной системы атмосфера – океан – почва к возмущениям начальных полей температуры и внешних источников. Это также дает основу для развития оптимальной сети наблюдений в Мировом океане и адаптации этих данных к процессам, протекающим в атмосфере.

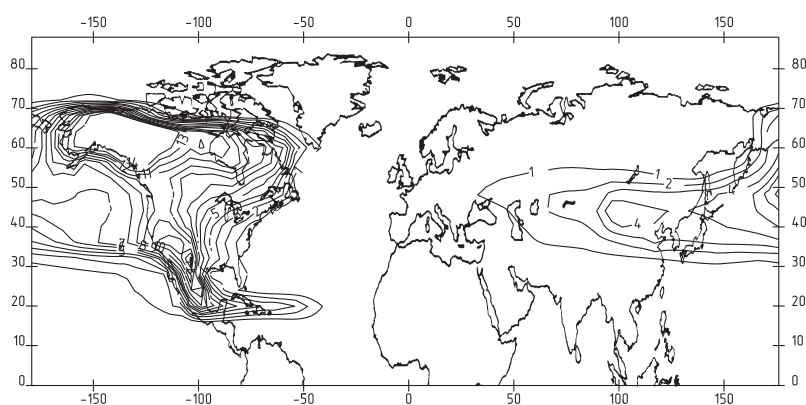


Рис. 7.10

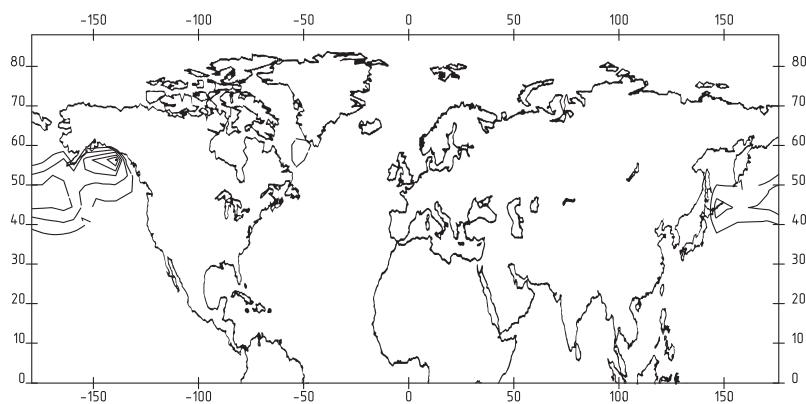


Рис. 7.11



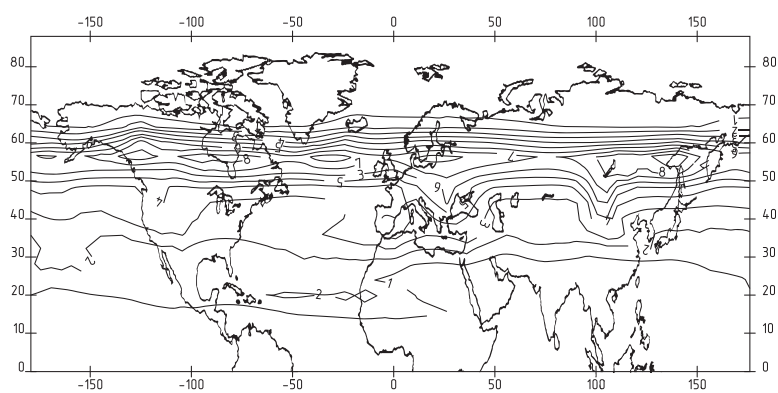


Рис. 7.12

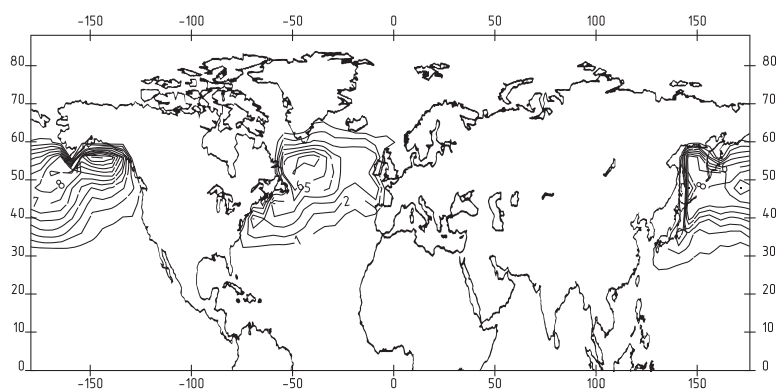


Рис. 7.13

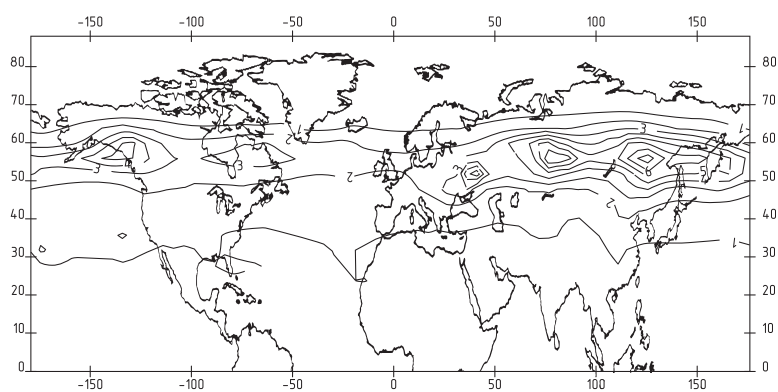


Рис. 7.14

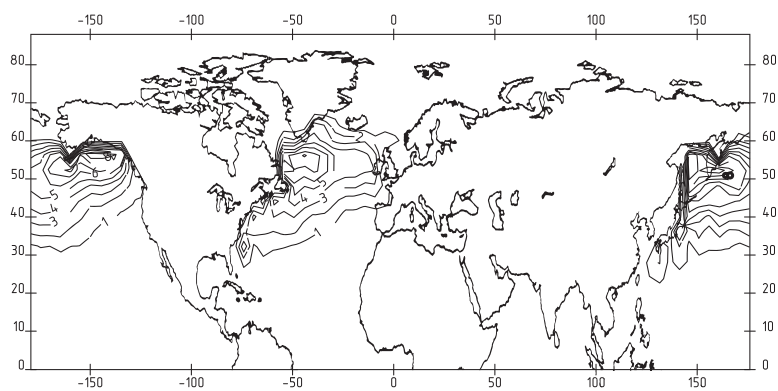


Рис. 7.15

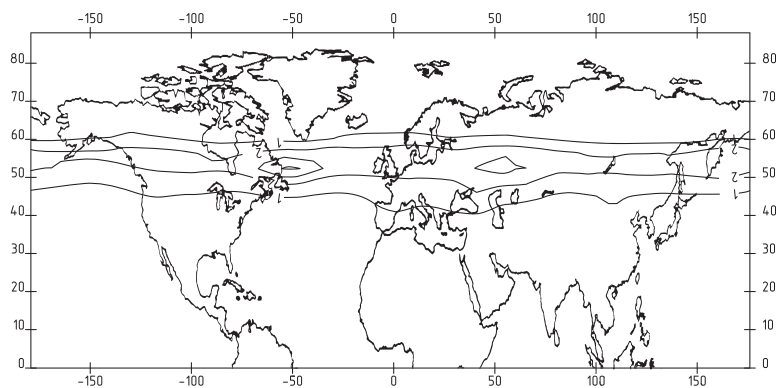


Рис. 7.16

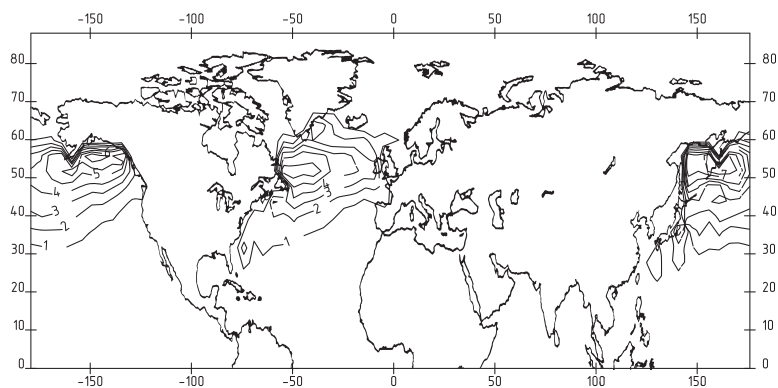


Рис. 7.17

## 7.7. Применение теории чувствительности к сравнению математических моделей

Спектр исследований, проводимых с помощью различных математических моделей, описывающих те или иные процессы в науке и технике, очень широк, и исследователи используют для решения одной задачи разные модели, параметризации и численные алгоритмы. Например, для изучения процессов общей циркуляции атмосферы используются более 30 различных моделей. Хотя они дают различные результаты, многие из них адекватно отображают основные особенности атмосферной динамики. В. Л. Гейтс [205] предложил идею сравнения результатов моделей и сформулировал для этого несколько общих принципов. Под его руководством в Ливерморской национальной лаборатории (США) проведены многочисленные эксперименты с различными моделями и дано сравнение результатов их расчетов. В лаборатории собран обширный материал, позволяющий оценить качество и особенности этих моделей. Так, например, отмечено, что выполнение законов сохранения является важной характеристикой модели и позволяет улучшить оценку их качества. Таким образом, успешно начато сравнение результатов решения сложных задач.

В связи с этим рассмотрим две различные линейные модели с несколько отличающимися друг от друга операторами. Пусть с их помощью решаются эволюционные задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A_1 \varphi_1 &= f, \quad t \in (0, \bar{t}) \\ \varphi_1 &= g \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + A_2 \varphi_2 &= f, \quad t \in (0, \bar{t}) \\ \varphi_2 &= g \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Предположим, что правые части уравнений, описывающие внешние источники, совпадают и равны  $f$ . Начальные условия также пусть совпадают и равны  $g$ . Пусть  $f = f(t)$  и  $g$  – заданные функции из гильбертова пространства  $H$ . Пусть  $A_1, A_2$  – линейные операторы из гильбертова пространства  $H$  с областями определения  $D(A_1)$  и  $D(A_2)$  соответственно. Пусть каждый элемент множеств  $D(A_1)$  и  $D(A_2)$  удовлетворяет условиям гладкости, дополнительным условиям (напри-

мер, граничным) и некоторым другим требованиям, отражающим специфику задачи. Предположим, что решения  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  задач (7.7.1) и (7.7.2) существуют, единственны, лежат в  $D(A_1)$  и  $D(A_2)$  соответственно при любом  $t \in [0, \bar{t}]$  и достаточно гладки.

Рассмотрим следующий функционал:

$$J = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi) dt, \quad (7.7.3)$$

где  $\varphi$  – решение задачи (7.7.1) или (7.7.2);  $p$  – фиксированный элемент из  $H$ , отражающий характеристическую функцию измерений;  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $H$ . Пусть

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_1) dt, \quad (7.7.4)$$

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_2) dt. \quad (7.7.5)$$

В соответствии с общей теорией, построим сопряженные уравнения отвечающие задачам (7.7.1) и (7.7.2):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} + A_1^* \varphi_1^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_1^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

и

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t} + A_2^* \varphi_2^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_2^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

где  $p$  – функция, фигурирующая в функционале (7.7.3);  $A_1^*$  и  $A_2^*$  – сопряженные операторы к  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, удовлетворяющие тождеству Лагранжа

$$(A_\alpha u, v) = (u, A_\alpha^* v), \quad u \in D(A_\alpha), \quad v \in D(A_\alpha^*), \quad \alpha = 1, 2.$$

Предположим, что решения  $\varphi_1^*(t)$  и  $\varphi_2^*(t)$  сопряженных задач (7.7.6) и (7.7.7) существуют, единственны, принадлежат  $D(A_1^*)$  и  $D(A_2^*)$  соответственно при любом  $t \in [0, \bar{t}]$  и достаточно гладки.

Сделаем несколько преобразований. Умножим уравнение (7.7.1) на  $\varphi_1^*$  в  $H$ , уравнение (7.7.6) на  $\varphi_1$  и вычтем результаты друг из друга. После интегрирования по  $t$  на интервале  $0 \leq t \leq \bar{t}$  получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1, \varphi_1^*) dt + \int_0^{\bar{t}} [(A\varphi_1, \varphi_1^*) - (\varphi_1, A_1^* \varphi_1^*)] dt = \\ = \int_0^{\bar{t}} (f, \varphi_1^*) dt - \int_0^{\bar{t}} (\varphi_1, p) dt. \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

В силу тождества Лагранжа имеем

$$(A_1 \varphi_1, \varphi_1^*) - (\varphi_1, A_1^* \varphi_1^*) = 0$$

для всех  $t \in [0, \bar{t}]$ . Что касается первого слагаемого в левой части (7.7.8), если  $\varphi_1, \varphi_1^*$  достаточно гладкие, то будет верно равенство

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1, \varphi_1^*) dt = (\varphi_1, \varphi_1^*)|_{t=\bar{t}} - (\varphi_1, \varphi_1^*)|_{t=0}. \quad (7.7.9)$$

Так как  $\varphi_1^* = 0$  при  $t = \bar{t}$ , то первое слагаемое в правой части (7.7.9) обращается в нуль, а второе слагаемое, в виду условия  $\varphi_1 = g$  при  $t = 0$ , равно

$$-(\varphi_1, \varphi_1^*)|_{t=0} = -(g, \varphi_1^*)|_{t=0}.$$

В результате из (7.7.8) следует, что

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (f, \varphi_1^*) dt + (g, \varphi_1^*|_{t=0}). \quad (7.7.10)$$

Аналогичное (7.7.10) выражение может быть получено для второй пары задач (7.7.2) и (7.7.7). Таким образом, функционал  $J_2$  будет иметь вид

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (f, \varphi_2^*) dt + (g, \varphi_2^*|_{t=0}). \quad (7.7.11)$$

Вычтем выражение (7.7.11) из (7.7.10) и получим формулу для  $\delta J = J_1 - J_2$ .

$$\delta J = \int_0^{\bar{t}} (f, \delta \varphi^*) dt + (g, \delta \varphi^*|_{t=0}), \quad (7.7.12)$$

где  $\delta\varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ .

Разность  $\delta J = J_1 - J_2$  функционалов для двух моделей при этом будет определяться функцией  $\delta\varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ . Функция  $\delta\varphi^*$  будет являться функцией влияния на  $\delta J$  или весовой функцией, определяющей вклад внешнего источника  $f$  и начального значения  $g$  в значение функционала  $\delta J$ . Проще говоря, чем меньше  $\delta J$ , тем меньше разница между двумя моделями (исходя из вида функционала  $J$ ).

Но, что еще более важно, формула (7.7.12) позволяет находить регионы в пространстве и времени, где различие между функциями  $\delta\varphi^*$  наибольшее, что очень важно для дальнейшего анализа и совершенствования моделей.

Мы рассмотрели случай, когда источник  $f$  одинаков для обеих моделей. Если источники различны, то задачи (7.7.1) и (7.7.2) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A_1 \varphi_1 &= f_1, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_1 &= g \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (7.7.13)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + A_2 \varphi_2 &= f_2, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_2 &= g \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (7.7.14)$$

где  $f_1 = f_1(t)$ ,  $f_2 = f_2(t) \in H$ . Мы предположили здесь, что начальные данные в обеих задачах совпадают, т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2 = g$  при  $t = 0$ .

Рассмотрим, как и раньше, значения функционалов

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_1) dt, \quad (7.7.15)$$

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_2) dt. \quad (7.7.16)$$

Предположим опять, что функция  $p \in H$ , которая характеризует функционал  $J$ , одинакова для обеих задач.

Рассмотрим сопряженные задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} + A_1^* \varphi_1^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_1^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (7.7.17)$$

и

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t} + A_2^* \varphi_2^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}), \\
 \varphi_2^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t},
 \end{aligned}
 \tag{7.7.18}$$

Получим, как раньше, выражения вида (7.7.10) и (7.7.11):

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (f_1, \varphi_1^*) dt + (g, \varphi_1^*|_{t=0}), \tag{7.7.19}$$

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (f_2, \varphi_1^*) dt + (g, \varphi_2^*|_{t=0}). \tag{7.7.20}$$

Вычтем их друг из друга и получим

$$\delta J = \int_0^{\bar{t}} [(f_1, \varphi_1^*) - (f_2, \varphi_2^*)] dt + (g, \delta \varphi^*|_{t=0}), \tag{7.7.21}$$

где  $\delta \varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ . Пусть

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f + \delta f_1, \\
 f_2 &= f + \delta f_2,
 \end{aligned}
 \tag{7.7.22}$$

где  $f = f(t)$ ,  $\delta f_1 = \delta f_1(t)$ ,  $\delta f_2 = \delta f_2(t)$  – заданные функции из  $H$ . Например, в качестве  $f$  может быть взята  $f = (f_1 + f_2)/2$ , или одна из функций  $f_i$ , например,  $f = f_1$  (тогда  $\delta f_1 = 0$ ), или среднеклиматические значения этих функций. Тогда

$$\delta J = \int_0^{\bar{t}} (f, \delta \varphi^*) dt + (g, \delta \varphi^*|_{t=0}) + \int_0^{\bar{t}} [(\delta f_1, \varphi_1^*) - (\delta f_2, \varphi_2^*)] dt. \tag{7.7.23}$$

Эта только что полученная формула имеет более сложный вид по сравнению с (7.7.12), но более информативна, поскольку позволяет анализировать две более сложные модели.

Если функции  $p$  взять различными, тогда сравнение моделей может быть проведено с помощью различных функционалов, что важно при более сложном сравнении.

В заключение несколько слов о нелинейных моделях. Рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A_1(\varphi_1)\varphi_1 &= f, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_1 &= g \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (7.7.24)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + A_2(\varphi_2)\varphi_2 &= f, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_2 &= g \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (7.7.25)$$

где  $A_1(\varphi_1)$ ,  $A_2(\varphi_2)$  – линейные операторы в гильбертовом пространстве  $H$  с областями определения  $D(A_1)$ ,  $D(A_2)$  соответственно,  $f = f(t)$ ,  $g$  – заданные функции из  $H$ . Области определения  $D(A_1)$ ,  $D(A_2)$  операторов  $A_1$ ,  $A_2$  определяются смыслом задачи. Предположим, что решения  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  задач (7.7.24) и (7.7.25) при любом  $t \in [0, \bar{t}]$  принадлежат областям  $D(A_1)$  или  $D(A_2)$ , соответственно, и обладают достаточной гладкостью.

Рассмотрим функционалы

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_1) dt, \quad (7.7.26)$$

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi_2) dt, \quad (7.7.27)$$

где  $p$  – функция из  $H$ .

Запишем сопряженные задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} + A_1^*(\varphi_1)\varphi_1^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}) \\ \varphi_1^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (7.7.28)$$

и

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t} + A_2^*(\varphi_2)\varphi_2^* &= p, \quad t \in (0, \bar{t}) \\ \varphi_2^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (7.7.29)$$

где  $A_1^*(\varphi_1)$  и  $A_2^*(\varphi_2)$  – операторы, сопряженные к  $A_1(\varphi_2)$  и  $A_2(\varphi_2)$ , соответственно, удовлетворяющие тождествам Лагранжа:

$$\begin{aligned} (A_\alpha(u)v, \omega) &= (v, A_\alpha^*(u)\omega), \quad u, v \in D(A_\alpha), \\ \omega &\in D(A_\alpha^*), \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.7.30)$$



Пусть решения  $\varphi_1^*(t)$  и  $\varphi_2^*(t)$  задач (7.7.6) и (7.7.7) существуют при известных  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ , единственны, принадлежат  $D(A_1^*)$  и  $D(A_2^*)$  соответственно при каждом  $t \in [0, \bar{t}]$  и являются достаточно гладкими функциями.

Получим новые выражения для  $J_1$  и  $J_2$  через  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  с учетом тождества Лагранжа (7.7.30):

$$J_1 = \int_0^{\bar{t}} (f, \varphi_1^*) dt + (g, \varphi_1^*|_{t=0}), \quad (7.7.31)$$

$$J_2 = \int_0^{\bar{t}} (f, \varphi_2^*) dt + (g, \varphi_2^*|_{t=0}) \quad (7.7.32)$$

и в результате придем к формуле, аналогичной (7.7.12):

$$\delta J = \int_0^{\bar{t}} (f, \delta \varphi^*) dt + (g, \delta \varphi^*|_{t=0}), \quad (7.7.33)$$

где  $\delta J_1 = J_1 - J_2$ ,  $\delta \varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ .

Возможны также обобщения формулы для  $\delta J$  при соответствующих предположениях о различии моделей.

Мы обсудили только дифференциальные постановки задачи, однако можно сравнивать также модели, основанные на различных разностных аппроксимациях задач с учетом используемых в них параметризаций.

Рассмотрим еще один важный вопрос моделирования процессов. Предположим для определенности, что мы имеем дело с оценкой изменения некоторой климатической характеристики, заданной функционалом типа (7.7.3):

$$J = \int_0^{\bar{t}} (p, \varphi) dt. \quad (7.7.34)$$

Пусть значение функционала, рассчитываемого по формуле (7.7.34), отличается от значения функционала, полученного по данным прямых измерений. Нам необходимо найти причину различия.

Так как на функционал  $J$  влияют несколько факторов, то практически невозможно получить точный ответ, используя основные уравнения, за исключением, возможно, некоторых простых случаев.

В этом случае очень удобно решать сопряженную задачу и рассчитывать функционал следующим образом:

$$J = \int_0^{\bar{t}} (f, \delta\varphi^*) dt + (g, \delta\varphi^*|_{t=0}). \quad (7.7.35)$$

Функция ценности  $\varphi^*$  позволяет определить наиболее важные (чувствительные) регионы, а также входные данные, которые вносят основной вклад в значение функционала  $J$ . Эта функция помогает понять причины тех или иных изменений  $J$ , которые иногда непредсказуемы. В то же время, этот анализ показывает пути улучшения математической модели, которая более или менее адекватно отражает реальные процессы.

## Глава 8

# Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач

В настоящей главе будет сформулировано уравнение для ценности информации, получаемой с метеорологических спутников Земли. Предполагается, что на спутнике имеется комплекс приборов, регистрирующих определенные характеристики поля излучения. Показания приборов являются функционалами соответствующих задач. Будем рассматривать процесс переноса радиации заданных частот в диапазоне от ультрафиолетового до длинноволнового излучений.

Введем в рассмотрение стандартную атмосферу, которая характеризуется заданным распределением метеорологических элементов – температуры, влажности, плотности, аэрозолей и т. п. При помощи уравнения переноса для стандартной атмосферы можно сформулировать задачу о переносе радиации. Такую задачу будем называть невозмущенной.

Приборы, установленные на метеорологическом спутнике, будут регистрировать истинные функционалы задач, отличающиеся от функционалов невозмущенных задач на определенную величины, которую будем называть вариацией функционала. Основная задача состоит

в определении вариаций характеристик атмосферы по заданным вариациям функционалов.

В дальнейшем будет изложена общая точка зрения на обратные задачи, связанные с интерпретацией данных метеорологических спутников, и даны алгоритмы решения некоторых обратных задач.

## 8.1. Постановка обратных задач

Пусть  $\varphi$  – интенсивность излучения,  $f$  – источники излучения. Тогда задача о переносе радиации в операторной форме примет следующий вид:

$$L\varphi = f, \quad (8.1.1)$$

где  $L$  – интегро-дифференциальный оператор переноса излучения. Функции  $\varphi$  и  $f$  принадлежат к классам функций, на которых уравнение (8.1.1) имеет смысл. Областью определения оператора  $L$  пусть будут функции  $\varphi \in D(L) \in H$ . Все функции из области  $D(L)$  удовлетворяют однородным граничным условиям.

Как и прежде, в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  введем в рассмотрение скалярное произведение  $(g, h)$  как интеграл по всей области переменных задач от произведения функций  $g$  и  $h$  и определим сопряженный оператор  $L^*$  в смысле Лагранжа:

$$(h, Lg) = (g, L^*h). \quad (8.1.2)$$

Рассмотрим некоторый линейный непрерывный функционал поля излучения, который всегда можно представить в виде следующего произведения:

$$J_p(\varphi) = (p, \varphi), \quad (8.1.3)$$

и введем в рассмотрение сопряженное уравнение по отношению к этому функционалу:

$$L^*\varphi_p^* = p, \quad (8.1.4)$$

где  $\varphi_p^*$  принадлежит к классу функций, удовлетворяющих граничным условиям и определенным свойствам дифференцируемости.

Умножим скалярно уравнение (8.1.1) на  $\varphi_p^*$ , а уравнение (8.1.4) – на  $\varphi$  и возьмем разность полученных выражений

$$(\varphi_p^*, L\varphi) - (\varphi, L^*\varphi_p^*) = (f, \varphi_p^*) - (p, \varphi). \quad (8.1.5)$$

С учетом соотношения (8.1.2) левая часть равенства (8.1.5) равна нулю, поэтому имеет место формула

$$J_p(\varphi) = (f, \varphi_p^*). \quad (8.1.6)$$

Таким образом, рассматриваемый функционал  $J_p(\varphi)$  может быть вычислен либо по формуле (8.1.3), либо по формуле (8.1.6).

Это значит, что вычисление функционала  $J_p(\varphi)$  может быть произведено двумя совершенно различными способами: либо при помощи решения основной задачи (8.1.1), либо при помощи сопряженной задачи (8.1.4).

Рассмотренный подход к определению линейных функционалов особенно интенсивно развивался в ядерной физике в работах Л. Н. Усачева [159], Б. Б. Кадомцева [55], Г. И. Марчука и В. В. Орлова [116], Г. И. Марчука [87], Г. И. Марчука и Ж. Н. Бельской [103] и др. Общая постановка задачи была сформулирована в работе [116], в которой дан вывод формул теории возмущений для функционала  $J_p(\varphi)$ .

Задачи (8.1.1) и (8.1.4) будем считать невозмущенными; решения их находятся для стандартных характеристик поля излучения.

Поскольку в нашем распоряжении имеется набор вариаций функционалов, используем их для отыскания возмущений в основных характеристиках атмосферы. Для этой цели построим соответствующие формулы теории возмущений для функционалов.

Введем в рассмотрение возмущенную задачу

$$L' \varphi' = f', \quad (8.1.7)$$

где

$$L' = L + \delta L, \quad f' = f + \delta f. \quad (8.1.8)$$

Умножим скалярно уравнение (8.1.7) на функцию  $\varphi_p^*$ , а уравнение (8.1.4) на функцию  $\varphi'$  и результаты вычтем один из другого. Тогда будем иметь

$$(\varphi_p^*, L' \varphi') - (\varphi', L^* \varphi_p^*) = (f', \varphi_p^*) - (p, \varphi'). \quad (8.1.9)$$

С учетом соотношений (8.1.5) и (8.1.8) равенство (8.1.9) перепишем в виде

$$(\varphi_p^*, \delta L \varphi') = (\varphi_p^*, \delta f) - \delta J_p, \quad (8.1.10)$$

где

$$\delta J_p = J_p(\varphi') - J_p(\varphi).$$

Соотношение (8.1.10) окончательно перепишем в следующем виде:

$$(\varphi_p^*, \delta L\varphi' - \delta f) = -\delta J_p. \quad (8.1.11)$$

Формулу (8.1.11) можно записать для любого линейного функционала из набора ( $n=1, 2, \dots, N$ ):

$$(\varphi_{p_n}^*, \delta L\varphi' - \delta f) = -\delta J_{p_n}. \quad (8.1.12)$$

Функции  $\varphi_{p_n}^*$  являются статическими весами в формулах (8.1.12) и характеризуют область влияния возмущения  $\delta L\varphi' - \delta f$  во всем фазовом пространстве. Учитывая это обстоятельство, функции  $\varphi_{p_n}^*$  можно назвать функциями ценности информации по отношению к функционалу  $J_{p_n}$ .

Рассмотрим далее разность вариаций функционалов при различных параметрах  $n$ . Тогда получим

$$(\varphi_{p_n}^* - \varphi_{p_m}^*, \delta L\varphi' - \delta f) = \delta J_{p_m} - \delta J_{p_n}. \quad (8.1.13)$$

Очевидно, информация в различных функционалах должна быть независимой, т. е.

$$\varphi_{p_n}^* \not\equiv \varphi_{p_m}^*.$$

Зафиксируем некоторый функционал  $J_{p_n}$ . Этому функционалу соответствует сопряженная функция  $\varphi_{p_n}^*$ , являющаяся решением уравнения (8.1.4). Чтобы оценить меру независимой информации, содержащейся в  $\varphi_{p_m}^*$ , удобно рассматривать функции

$$\varphi_{p_n p_m}^* = \varphi_{p_n}^* - \varphi_{p_m}^*.$$

Таким образом, приходим к набору следующих задач:

$$L^* \varphi_{p_n}^* = p_n, \quad L^* \varphi_{p_n p_m}^* = p_n - p_m. \quad (8.1.14)$$

## 8.2. Обратные задачи атмосферной оптики

При интерпретации результатов наблюдений с метеорологических спутников по полю излучения в видимой части спектра могут быть

поставлены различные обратные задачи по определению некоторых важных характеристик атмосферы. Ради простоты предположим, что неизвестной характеристикой атмосферы является отклонение плотности некоторой субстанции, поглощающей и рассеивающей радиацию, от нормального распределения. Атмосферу будем считать плоским слоем; внешним источником излучения является Солнце (см. [56, 57]). Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = f, \quad (8.2.1)$$

где

$$f = -S_\nu \delta(\mu - \mu_\odot) \delta(z - h) \mu_\odot,$$

которое может быть записано в операторной форме

$$L\varphi = f. \quad (8.2.2)$$

Здесь использовано предположение о независимости решения задачи от азимута и введены следующие обозначения:  $\varphi$  – интенсивность излучения с частотой  $\nu$ ,  $\alpha_\nu = \alpha_{s\nu} + \alpha_{c\nu}$  ( $\alpha_{s\nu}$  – сечение рассеяния,  $\alpha_{c\nu}$  – сечение поглощения);  $S_\nu$  – спектр солнечного излучения,  $\mu_\odot = \cos \vartheta_\odot$  ( $\vartheta_\odot$  – высота Солнца);  $z$  – вертикальная координата с началом отсчета на поверхности Земли;  $h$  – верхняя граница атмосферы;  $\mu = \cos \vartheta$  ( $\vartheta$  – высотный угол);  $\gamma_\nu(\mu, \mu')$  – индикатриса рассеяния:

$$\gamma_\nu(\mu, \mu') = \sum_n \frac{2n+1}{2} \gamma_\nu p_n(\mu) p_n(\mu'). \quad (8.2.3)$$

Граничными условиями для функции  $\varphi$  выберем следующие. На верхней границе атмосферы – условие отсутствия приходящего извне излучения. Поскольку излучение Солнца учтено в самом уравнении переноса, будем иметь

$$\varphi(h, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (8.2.4)$$

На поверхности Земли будем считать, что приходящее излучение диффузно отражается от земной поверхности с заданным альбедо  $\alpha_\nu$ . Тогда приходим к условию

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = \alpha_\nu \int_{-1}^0 \varphi(0, \mu') \mu' d\mu' \text{ при } \mu > 0. \quad (8.2.5)$$

Введем в рассмотрение функционал  $J_p(\varphi)$ , который связан с показанием прибора на метеорологическом спутнике, регистрирующего поток приходящего из атмосферы излучения со спектральной характеристикой  $\xi(\nu)$ . Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 p \varphi d\mu, \quad (8.2.6)$$

где

$$p = \mu g(\mu) \xi(\nu) \delta(z - h),$$

$$g(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases} \quad (8.2.7)$$

С учетом вида функции  $p$  выражение для функционала  $J_p(\varphi)$  несколько упростится:

$$J_p(\varphi) = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi \mu d\mu, \quad z = h. \quad (8.2.8)$$

Очевидно, в рассматриваемом фазовом пространстве скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi \varphi^* d\mu. \quad (8.2.9)$$

Введем в рассмотрение сопряженное уравнение

$$L^* \varphi_p^* = p, \quad (8.2.10)$$

где  $p$  определено формулой (8.2.7), а  $L^*$  – сопряженный в смысле Лагранжа оператор, удовлетворяющий условию (8.1.2). При помощи непосредственной проверки можно убедиться, что вид оператора  $L^*$  дается формулой

$$L^* \varphi_p^* = -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu'. \quad (8.2.11)$$



Таким образом, сопряженное уравнение переноса излучения будет иметь вид

$$-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = p. \quad (8.2.12)$$

Заметим, однако, что условие (8.1.2) будет выполнено тождественно только в том случае, если, кроме того, функцию  $\varphi_p^*$  связать дополнительными условиями, которые играют роль граничных условий для уравнения (8.2.12): на верхней границе атмосферы

$$\varphi_p^*(h, \mu) = 0 \text{ при } \mu > 0; \quad (8.2.13)$$

на поверхности Земли

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -\alpha_\nu \int_0^1 \mu' \varphi_p^* d\mu'. \quad (8.2.14)$$

В соответствии с общей теорией функционал задачи может быть определен также при помощи решения сопряженного уравнения

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 f \varphi_p^* d\mu \quad (8.2.15)$$

или с учетом вида функции  $f$

$$J_p(\varphi) = \int_0^\infty S_\nu \varphi_p^*(h, \mu_\odot) d\nu. \quad (8.2.16)$$

Отметим, что  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$  являются функциями  $\nu$ , хотя этот факт и не упоминается специально. Предположим теперь, что метеорологический прибор фиксирует отклонение функционала  $J_p$  от значения, соответствующего стандартной атмосфере, т. е. фиксируется величина

$$\delta J_p = J_p(\varphi') - J_p(\varphi). \quad (8.2.17)$$

Указанное отклонение вызвано изменением плотности излучаемой субстанции в атмосфере. Задача теперь состоит в том, чтобы связать изменения характеристик атмосферы с вариацией функционала и найти вариации плотности субстанции.

С этой целью рассмотрим возмущенное уравнение (8.2.1):

$$\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \alpha'_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi' \alpha'_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = f. \quad (8.2.18)$$

Предполагается, что решение  $\varphi'$  удовлетворяет граничным условиям (8.2.4), (8.2.5).

Умножим далее уравнение (8.2.18) на  $\varphi_p^*$ , уравнение (8.2.12) на  $\varphi'$ , вычтем одно выражение из другого и результат проинтегрируем по всей области определения решения.

Тогда, полагая

$$L' = L + \delta L,$$

где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_\nu - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu',$$

$$\delta L = \delta \alpha_\nu - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \delta \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu',$$

и учитывая соотношение (8.1.2), приходим к формуле теории возмущений для функционала  $J_p(\varphi)$ :

$$(\varphi_p^*, \delta L \varphi') = -\delta J_p. \quad (8.2.19)$$

В развернутом виде формула (8.2.19) имеет вид

$$\int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* [\delta \alpha_\nu \varphi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi' \delta \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu'] d\mu = -\delta J_p. \quad (8.2.20)$$

Функции  $\alpha_\nu$ ,  $\alpha_{s\nu}$  связаны с плотностью  $\rho$  поглощающей и рассеивающей субстанции

$$\alpha_\nu = \rho \sigma_\nu, \quad \alpha_{s\nu} = \rho \sigma_{s\nu},$$

где  $\sigma$  – сечение, отнесенное к единице массы субстанции.

Тогда будем иметь

$$\delta\alpha_\nu = \delta\rho(z)\sigma_\nu, \quad \delta\alpha_{s\nu} = \delta\rho(z)\sigma_{s\nu}.$$

Подставим эти соотношения в формулу (8.2.20) и получим

$$\int_0^h \delta\rho(z)F_p(z) dz = -\delta J_p, \quad (8.2.21)$$

где

$$F_p(z) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \left[ \sigma_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s\nu} \varphi' \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] d\mu. \quad (8.2.22)$$

В том случае, когда возмущение решения мало, т. е. приближенно можно положить  $\varphi' = \varphi$ , функция  $F_p(z)$  будет определена полностью:

$$F_p(z) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \left[ \sigma_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s\nu} \varphi \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] d\mu \quad (8.2.23)$$

и может быть протабулирована заранее.

Если имеется набор функционалов  $J_{p_n}$ , то аналогично предыдущему приходим к системе уравнений

$$\int_0^h \delta\rho(z)F_{p_n} dz = -\delta J_{p_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.2.24)$$

где

$$F_{p_n} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_{p_n}^* \left[ \sigma_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s\nu} \varphi' \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] d\mu. \quad (8.2.25)$$

Система уравнений (8.2.24) может быть использована для нахождения функции  $\delta\rho(z)$ . Имеются по крайней мере два подхода к решению этой задачи.

Первый подход состоит в следующем. Предположим, что стандартное распределение плотности субстанции может быть описано интерполяционной формулой вида

$$\rho(z) = \sum_i \aleph_i g_i(\beta_i z), \quad (8.2.26)$$

где  $\aleph_i, \beta_i$  – параметры, а  $g_i(x)$  – заданные интерполяционные функции.

В предположении, что возмущенная плотность  $\rho'(z)$  может быть описана формулой (8.2.26) с измененными параметрами  $\aleph'_i, \beta'_i$ , можно приближенно записать

$$\delta\rho(z) = \sum_i \left[ \delta\aleph_i g_i(\beta_i z) + \delta\beta_i \aleph_i \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i} \right]. \quad (8.2.27)$$

Строго говоря, представление (8.2.27) справедливо при малых вариациях  $\delta\aleph_i, \delta\beta_i$ . Однако в дальнейшем будет введен в рассмотрение метод последовательных приближений, который расширит область применения (8.2.27).

Формулу (8.2.27) удобно записать в виде

$$\delta\rho(z) = \sum_i \delta\varepsilon_i \psi_i(z), \quad (8.2.28)$$

где  $\{\delta\varepsilon_i\}$  – совокупность параметров  $\{\delta\aleph_i\}$  и  $\{\delta\beta_i\}$ , а  $\{\psi_i\}$  – совокупность функций  $\{g_i\}$  и  $\aleph_i \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i}$ .

Подставим выражение (8.2.28) в систему (8.2.24). Тогда получим

$$\sum_i \delta\varepsilon_i a_{ni} = -b_n, \quad i, n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.2.29)$$

где

$$a_{ni} = \int_0^h \varphi_i F_{p_n} dz, \quad b_n = \delta J_{p_n}. \quad (8.2.30)$$

Если матрица  $\mathbf{A} = \|a_{ni}\|$  хорошо обусловлена, то система линейных уравнений разрешается эффективно и решение находится в виде

$$\delta\varepsilon = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.2.31)$$

Если возмущения не малы, то можно сформулировать следующий метод последовательных приближений:

$$\delta\varepsilon^{(m+1)} = \mathbf{A}_m^{-1} \mathbf{b}^{(m)}, \quad (8.2.32)$$

где

$$a_n^{(m)} = \int_0^h \psi_i^{(m)} F_{p_n}^{(m)} dz, \quad b_n^{(m)} = -\delta J_{p_n}^{(m)} = J_{p_n}(\varphi) - J_{p_{n_I}}(\varphi^{(m)}), \quad (8.2.33)$$

$$F_{p_n}^{(m)} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_{p_n}^* \left[ \sigma_\nu \varphi^{(m)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s\nu} \varphi^{(m)} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] d\mu.$$

Здесь  $\varphi^{(m)}$  – решение уравнения (8.2.1) при

$$\rho = \rho^{(m)}(z), \quad \psi_i^{(m)} = \psi_i(z; \beta^{(m)}).$$

Второй подход связан с построением подходящей квадратурной формулы для интеграла в левой части формулы (8.2.24). Положим

$$\int_0^h \delta\rho(z) F_{p_n}(z) dz = \sum_i c_{in} \delta\rho_i, \quad (8.2.34)$$

где  $\delta\rho_i = \delta\rho(z_i)$ , а  $c_i$  – коэффициенты квадратурной формулы с учетом множителя  $F_{p_n}(z)$ . Очевидно, такая постановка обратной задачи принципиально не отличается от рассмотренной выше. Аналогично здесь определяется метод последовательных приближений.

Сделаем одно важное замечание: если бы прибор фиксировал монохроматическое излучение, то интегрирование по  $\nu$  можно было бы не проводить. В этом случае нетрудно убедиться, что и сопряженная функция была бы отличная от нуля только при  $\nu = \nu_0$ . Однако разрешение приборов, как правило, не позволяет делать указанного предположения, поскольку в интервале разрешения прибора функция  $\sigma_\nu$  может изменяться весьма существенно, а это обстоятельство должно быть тщательно учтено, ибо ценность информации по отношению к функционалу  $J_p$  в этом случае может существенно измениться по сравнению с монохроматическим приближением.

Сформулированный алгоритм постановки обратных задач тривиально обобщается на различные случаи. Так, например, можно считать, что атмосфера состоит из смеси веществ и одновременно возмущается плотность многих субстанций. Далее, предполагалось, что индикатриса рассеяния и альбедо не изменялись. Если происходит изменение этих величин, то можно для них сформулировать аналогичные формулы теории возмущений. Возможны и другие обобщения.

В заключение обратим внимание на некоторые упрощения математической постановки задачи. А именно, в предыдущем рассмотрении правые части уравнений (8.2.1) и (8.2.12) включали в себя источники, отличные от нуля только на верхней границе атмосферы при  $z = h$ . Можно дать эквивалентные постановки задач, где источники будут

учтены в граничных условиях. В этом случае задача для основных и сопряженных функций формулируется в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = 0,$$

$$\varphi(h, \mu) = S_\nu \delta(\mu - \mu_\odot) \text{ при } \mu < 0, \quad (8.2.35)$$

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = \alpha_\nu \int_{-1}^0 \varphi(0, \mu') \mu' d\mu' \text{ при } \mu > 0$$

для интенсивности излучения и

$$-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = 0,$$

$$\varphi_p^*(h, \mu) = g(\mu) \xi(\mu) \text{ при } \mu > 0, \quad (8.2.36)$$

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -\alpha_\nu \int_{-1}^0 \varphi_p^*(0, \mu') \mu' d\mu' \text{ при } \mu < 0$$

для сопряженных функций.

В § 8.3 на примере длинноволнового излучения будет показана эквивалентность этих двух подходов к формулировке системы основных и сопряженных уравнений переноса излучения.

### 8.3. Обратные задачи длинноволнового излучения

В настоящем параграфе будет сформулирована задача восстановления температуры в атмосфере по полю уходящего длинноволнового излучения, регистрируемого приборами, установленными на метеорологическом спутнике.

По-прежнему функционалом поля излучения будем считать показания прибора, регистрирующего полный поток длинноволнового излучения в диапазоне частот с характеристикой прибора  $\xi(\nu)$ . Тогда будем иметь

$$J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi \mu d\mu, \quad z = h. \quad (8.3.1)$$

Уравнение переноса длинноволнового излучения в атмосфере запишем в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' = f; \quad (8.3.2)$$

здесь  $f$  – собственное излучение атмосферы, определяемое в виде

$$f = \frac{1}{2} \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T), \quad (8.3.3)$$

где  $\eta_\nu(T)$  определяется формулой Планка

$$\eta_\nu(T) = 2\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

со следующей нормировкой:

$$\int_0^\infty \eta_\nu(T) d\nu = 2\pi\sigma T^4,$$

где  $\sigma$  – постоянная Больцмана;  $h$  – постоянная Планка;  $c$  – скорость света в вакууме;  $kT$  – внутренняя энергия среды.

В качестве условий на верхней границе атмосферы возьмем

$$\varphi(h, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0, \quad (8.3.4)$$

а на поверхности Земли

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = \alpha_\nu \int_{-1}^0 \mu' \varphi(0, \mu') d\mu' + \frac{1}{2} \eta_\nu(T_0) \text{ при } \mu > 0, \quad (8.3.5)$$

где  $T_0$  – температура поверхностного слоя Земли. Существенным отличием рассматриваемой задачи от случая переноса коротковолновой радиации является то, что граничное условие на поверхности Земли (8.3.5) теперь оказалось неоднородным вследствие учета собственного излучения Земли. Если  $T_0$  задано, то прямая задача (8.3.2), (8.3.4), (8.3.5) поставлена полностью, а ее решение может быть выполнено при помощи хорошо разработанных методов.

Переходим далее к формулировке сопряженной задачи по отношению к функционалу  $J_p$ . Для этого рассмотрим соотношение

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi^*), \quad (8.3.6)$$

где  $\varphi$  и  $\varphi^*$  – функции из соответствующих областей определения  $D(L)$  и  $D(L^*)$  соответственно операторов  $L$  и  $L^*$ .

Пусть  $\varphi^* = \varphi_p^*$ , а  $\varphi$  – решение задачи (8.3.2), (8.3.4), (8.3.5). Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (\varphi_p^*, L\varphi) = & \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h \varphi_p^* \left[ \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] dz. \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Первое слагаемое в правой части перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h \varphi_p^* \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \\ & = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} d\mu - \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h \varphi \mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Переставляя порядки интегрирования в остальных членах соотношения (8.3.7), получаем

$$\begin{aligned} (\varphi_p^*, L\varphi) = & \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h \varphi \left[ -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' \right] dz + \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} d\mu. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Введем далее обозначение

$$L^*\varphi_p^* = -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu'. \quad (8.3.10)$$



Тогда соотношение (8.3.9) записывается в виде

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi_p^*) + \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^* \varphi \bigg|_{z=0}^{z=h} d\mu. \quad (8.3.11)$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось равенство

$$L^*\varphi_p^* = 0. \quad (8.3.12)$$

Тогда с учетом уравнения (8.3.2) соотношение (8.3.11) перепишем в виде

$$(\varphi_p^*, f) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^* \varphi \bigg|_{z=0}^{z=h} d\mu. \quad (8.3.13)$$

Выражение (8.3.13) представим в виде

$$(\varphi_p^*, f) = a - b, \quad (8.3.14)$$

где

$$a = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) d\mu,$$

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu) d\mu.$$

Рассмотрим выражение для величины  $b$  в следующем виде:

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu) d\mu + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu) d\mu. \quad (8.3.15)$$

Вспомним теперь, что решение  $\varphi(0, \mu)$  удовлетворяет граничному условию (8.3.5), которое представим в виде

$$\varphi(0, \mu) = 2\alpha_\nu \int_{-1}^0 \mu' \varphi(0, \mu') d\mu' + \eta_\nu(T_0) \text{ при } \mu > 0. \quad (8.3.16)$$

Подставим выражение (8.3.16) во второй интеграл формулы (8.3.15). Тогда получим

$$b = \int_0^{\infty} d\nu \int_{-1}^0 \mu \varphi(0, \mu) \left[ \varphi_p^*(0, \mu) + 2\alpha_\nu \int_0^1 \mu' \varphi_p^*(0, \mu') d\mu' \right] d\mu +$$

$$\int_0^{\infty} d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu. \quad (8.3.17)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -\alpha_\nu \int_0^1 \mu' \varphi_p^*(0, \mu) d\mu'. \quad (8.3.18)$$

Тогда получим

$$b = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu. \quad (8.3.19)$$

Рассмотрим выражение для величины

$$a = \int_0^{\infty} d\nu \int_{-1}^0 \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) d\mu + \int_0^{\infty} d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) d\mu. \quad (8.3.20)$$

Из условия (8.3.4) можно считать, что первый интеграл равен нулю, поскольку  $\varphi(h, \mu) = 0$ . Потребуем, чтобы второй интеграл в формуле (8.3.20) был равен функционалу  $J_p$ , т. е.

$$J_p = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) d\mu. \quad (8.3.21)$$

Чтобы выражение (8.3.21) совпало с (8.3.1), необходимо положить

$$\varphi_p^*(h, \mu) = g(\mu) \xi(\nu).$$

С учетом изложенного выше выражение (8.3.14) будет иметь вид

$$(\varphi_p^*, f) = J_p - \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu,$$

откуда непосредственно следует, что

$$J_p = (\varphi_p^*, f) + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu,$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} J_p = & \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T) d\mu + \\ & + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu. \end{aligned} \quad (8.3.22)$$

Итак, сопряженная задача по отношению к функционалу будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') d\mu' &= 0, \\ \varphi_p^*(h, \mu) &= g(\mu) \xi(\nu) \text{ при } \mu > 0, \\ \frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) &= -\alpha_\nu \int_0^1 \mu' \varphi_p^*(0, \mu') d\mu' \text{ при } \mu < 0. \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

Причем функционал  $J_p$  вычисляется при помощи одной из двух следующих формул:

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi(h, \mu) \mu d\mu, \\ J_p &= \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T) d\mu + \\ &+ \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0) d\mu. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

Предположим теперь, что функционалы (8.3.24) соответствуют стандартным характеристикам температурного поля в атмосфере. Рассмотрим возмущенное состояние атмосферы, характеризующееся отклонением температуры от стандартного состояния. В формулах для функционалов это отразится на то, что они несколько изменят величину:

$$\begin{aligned}
 J_p + \delta J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi'(h, \mu) \mu d\mu, \\
 J_p + \delta J_p &= \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T + \delta T) d\mu + \\
 &+ \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0 + \delta T_0) d\mu.
 \end{aligned} \tag{8.3.25}$$

Воспользуемся второй формулой из (8.3.25). Исключая  $J_p$  при помощи второй формулы из (8.3.24), получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \delta \eta_\nu(T) d\mu + \\
 &+ \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \delta \eta_\nu(T_0) d\mu = \delta J_p,
 \end{aligned} \tag{8.3.26}$$

где

$$\delta \eta_\nu(T) = \eta_\nu(T + \delta T) - \eta_\nu(T). \tag{8.3.27}$$

Поскольку отклонения температуры от стандартного распределения, как правило, не превышает 10–20% абсолютной температуры, то можно воспользоваться разложением функции  $\eta_\nu(T + \delta T)$  в ряд Тейлора и ограничиться двумя первыми членами. Тогда приближенно будем иметь

$$\eta_\nu(T + \delta T) = \eta_\nu(T) + (\partial \eta_\nu / \partial T) \delta T.$$

Отсюда

$$\delta \eta_\nu(T) = (\partial \eta_\nu / \partial T) \delta T. \tag{8.3.28}$$

Подставляя выражение (8.3.28) в формулу (8.3.26), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \delta T \, d\mu + \\ & + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0} \delta T_0 \, d\mu = \delta J_p. \end{aligned} \quad (8.3.29)$$

Таким образом, формула (8.3.29) позволяет связать вариации функционала  $\delta J_p$  с вариациями температуры. Формулу (8.3.29) удобно переписать в следующем виде:

$$\int_0^h \delta T(z) \psi(z) \, dz + \Psi \delta T_0 = \delta J_p, \quad (8.3.30)$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \, d\mu, \quad (8.3.31)$$

$$\Psi = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \mu \varphi_p^*(0, \mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0} \, d\mu.$$

Предположим, что на спутнике имеются  $N$  приборов, которые регистрируют различные характеристики длинноволновой радиации. Тогда имеем  $N$  функционалов:

$$J_{p_n} = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi_n(\nu) \varphi(h, \mu) \mu \, d\mu. \quad (8.3.32)$$

В этом случае получим  $N$  уравнений вида (8.3.30):

$$\int_0^h \delta T(z) \psi_n(z) \, dz + \Psi_n \delta T_0 = \delta J_{p_n}. \quad (8.3.33)$$

Здесь  $\psi_n$  и  $\Psi$  определяются при помощи формул (8.3.31), где функцию  $\varphi_p^*$  следует заменить на  $\varphi_{p_n}^*$ .

Таким образом, приходим к системе уравнений для определения отклонений  $\delta T$ . Поскольку системы уравнений (8.3.33) и (8.2.24) формально эквивалентны друг другу, для решения системы (8.3.33) применим методы, уже разработанные применительно к решению системы (8.2.24). В результате приходим к решению обратной задачи для поля температуры.

Следует обратить внимание на некоторые детали расчета. А именно, поскольку функция  $\psi_n(z)$  и величины  $\Psi$  выражаются только через решения невозмущенных сопряженных уравнений, то задача для  $\varphi_{p_n}^*$  решается один раз при заданных функциях  $\xi_n(\nu)$ . Здесь нет необходимости использовать метод последовательных приближений, который был необходим при решении обратных задач атмосферной оптики. Даже величина  $\partial\eta_\nu/\partial T$  может быть затабулирована при фиксированных значениях стандартных температур. В том случае, когда

$$\xi_n(\nu) = \xi_n \delta(\nu - \nu_n),$$

задача становится монохроматической, а все интегрирования по  $\nu$  исключаются.

В заключение отметим, что одновременно с вариациями температуры может возникнуть необходимость учета вариаций других характеристик атмосферы, например плотности водяного пара и др.

В этом случае можно сначала решить обратную задачу, аналогично рассмотренной для атмосферной оптики, и найти вариацию плотностей субстанций, а следовательно, и вид невозмущенного уравнения для стандартного распределения температуры. Для найденных операторов решается задача нахождения  $\varphi_{p_n}^*$ , а затем при помощи формул (8.3.33) ставится и решается обратная задача.

## 8.4. Уравнение для ценности информации для метеорологических спутников

В предыдущих параграфах были введены сопряженные функции, которыми мы широко пользовались при постановке обратных задач. Ввиду особой важности этих функций остановимся на их качественном анализе более подробно. Значение сопряженных функций особенно наглядно проявляется при изучении формул теории возмущений. С этой целью рассмотрим формулу (8.2.21) при некоторых упрощаю-

щих предположениях. А именно, будем считать, что задача монохроматическая, рассеяние излучения отсутствует и функция  $\varphi' \approx \varphi$  не зависит от  $\mu$ . Тогда формулы (8.2.21), (8.2.22) представляются в виде

$$\int_0^h \delta\alpha(z) \varphi(z) \varphi_p^*(z) dz = -\delta J_p, \quad (8.4.1)$$

где

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu, \quad \varphi_p^*(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^*(z, \mu) d\mu. \quad (8.4.2)$$

Заметим, что в формулу (8.4.1) входит уже не интенсивность излучения, а поток.

Проанализируем формулу (8.4.1). Очевидно, величина  $\delta\alpha\varphi$  описывает число актов поглощения радиации на единицу высоты атмосферы.

Пронормируем величину  $\varphi_p^*(z)$  следующим образом:

$$\int_0^h \varphi_p^*(z) dz = 1. \quad (8.4.3)$$

Это всегда можно сделать подходящей нормировкой  $J_p$ , т. е. вместо  $J_p$  рассматривать  $cJ_p$ , где  $c$  – константа, которую можно выбирать произвольно. При такой замене, очевидно, изменится только масштаб функционала.

Формула (8.4.1) указывает на следующий факт: чем больше произойдет актов поглощения радиации, тем меньше будет функционал  $J_p$ , поскольку меньшее количество радиации будет зарегистрировано прибором. С учетом нормировки (8.4.3) функцию  $\varphi_p^*(z)$  можно считать плотностью вероятности. В самом деле, пусть

$$\delta\alpha\varphi = \delta(z - z_0),$$

т. е. произошло полное поглощение радиации при  $z = z_0$ , а при  $z \neq z_0$  никаких дополнительных поглощений не происходит. Тогда формула (8.4.1) приводит к выражению

$$\varphi_p^*(z_0) = -\delta J_p. \quad (8.4.4)$$

Формула (8.4.4) указывает на тот факт, что

$$|\delta J_p| = \varphi_p^*(z_0), \quad (8.4.5)$$

т. е. абсолютное значение вариации функционала равно значению сопряженной функции. С учетом нормировки (8.4.3) формула (8.4.5) интерпретируется следующим образом. Величина  $\varphi_p^*(z_0)$  есть вероятность при осуществлении поглощения радиации в точке  $z = z_0$  изменения в функционале на величину  $\varphi_p^*(z_0)$ . Это значит, что вариация функционала будет зависеть от того, какова в этой точке величина  $\varphi_p^*$ .

Если  $\varphi_p^*$  в точке  $z_0$  исчезающе мала, то какие бы акты поглощения в окрестности этой точки ни происходили, они не приведут к существенным изменениям  $\delta J_p$ , и наоборот, в точках максимума функции  $\varphi_p^*$  даже не очень интенсивные акты поглощения радиации приведут к значительным отклонениям  $\delta J_p$ . Это значит, что функция  $\varphi_p^*$  может быть проинтерпретирована как ценность информации в области  $0 \leq z \leq h$  по отношению к показанию прибора, или, что то же самое, по отношению к функционалу  $J_p$ . В тех областях, где функция  $\varphi_p^*$  мала, мала и ценность информации по отношению к показанию прибора, и наоборот.

Разумеется, все сформулированные соображения остаются в силе в общем случае, когда не делается каких-либо упрощающих предположений.

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя ценность информации имеет исключительное значение при планировании экспериментов и интерпретации данных, необходимо еще учитывать абсолютные величины актов взаимодействия радиации со средой, т. е. величины  $\delta\alpha\varphi$ , которые могут быть большими как раз в области малых значений функции ценности информации. В этом случае необходимо учитывать характер и величину коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  в решении (8.2.31) с учетом требований, чтобы матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$  была хорошо обусловлена.

Аналогичный анализ может быть выполнен и при помощи уравнения (8.3.30) с той только разницей, что этот случай является более простым, поскольку в формулу не входит решение основных уравнений, а функции  $\psi(z)$  и величины  $\Psi$  связаны с изменениями температуры и являются ценностями информации по отношению к своему функционалу. В рассматриваемой задаче функция ценности информации является единственной существенной характеристикой задачи.



Особое значение функции ценности информации по отношению к соответствующим функционалам имеют при планировании программы исследований при помощи метеорологических спутников.

В этом случае необходимо провести серию решений уравнений для ценности информации и дать анализ независимой информации, получаемой при помощи различных приборов.

Если функции  $\varphi_{p_n}^*$  в некоторых двух задачах будут различаться мало, то это значит, что ценность информации в обеих задачах одна и та же и, следовательно, нет смысла рассматривать два прибора, а можно ограничиться только одним. Если же разница в функциях  $\varphi_{p_n}^*$  будет существенной, по крайней мере на части интервала  $0 \leq z \leq h$ , то второй прибор дает нам новую информацию по сравнению с первым прибором.

Такая информация будет полезной независимой информацией. Сопоставление ценности информации следует производить в условиях нормировки функций  $\varphi_{p_n}^*$ , т. е.

$$\int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi_{p_n}^* d\mu = 1,$$

и рассматривать не сами функции  $\varphi_{p_n}^*$ , а разности  $\varphi_{p_n p_m}^* = \varphi_{p_n}^* - \varphi_{p_m}^*$ , выбирая из них только линейно независимые. Если функции  $\varphi_{p_n p_m}^*$  имеют частичные области максимального значения ценности информации, которые покрывают более или менее равномерно всю область  $0 \leq z \leq h$ , то соответствующий этим функциям набор функционалов  $J_{p_n p_m}$  будет эффективен для решения обратных задач. Если же некоторые области не будут должным образом представлены при анализе, поскольку ценность информации в них будет мала, то обратная задача для таких областей с использованием фиксированных приборов не может быть решена достаточно эффективно. Поэтому следует отыскивать другие функционалы, которые позволяют «осветить» и такие частичные области.

Рассмотренные в настоящей главе методы могут быть использованы в постановке различных прямых и обратных задач метеорологии.

## Глава 9

# Сопряженные уравнения в задачах обработки данных

Задача получения и обработки данных измерений в различных областях науки становится все более важной и актуальной. Она может быть математически интерпретирована как многомерное (по пространству и времени) усвоение данных и их обработка. Это – одна из задач теории управления.

Задачи этого вида привлекали внимание многих специалистов, применяющих методы оптимального управления при решении различного рода вопросов, и были изучены в работах R. Bellman [186], Л. С. Понтрягин [145, 262], Н. Н. Красовский [58, 59], J.-L. Lions [226–230], R. Glowinski [208, 209], A. Balakrishnan [181], Г. И. Марчук [80, 85, 237]. Наибольшее развитие эти методы получили в ядерной энергетике, физике атмосферы и океана, защите окружающей среды (см. Г. И. Марчук [76, 87, 94], V. V. Penenko, N. N. Obraztsov [260], G.R. Kontarev [215], J. Lewis, J. Derber [197, 198, 225], F. X. Le Dimet et al. [219, 220, 287, 295], P. Courtier, O. Talagrand [196, 283], A. C. Lorenc [234], G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov [6, 101, 245], G. I. Marchuk, V. B. Zalesny [251], J. M. Wallace [286]).

Было показано, что формулировку и решение этих задач можно провести на основе правильно выбранных сопряженных уравнений. В этой главе мы будем рассматривать роль сопряженных уравнений в задачах обработки данных. Мы начнем с простого иллюстративного примера – эволюционной задачи, а затем рассмотрим общий численный алгоритм решения задачи ассимиляции данных. Материал этой

главы основан на совместных работах автора с В. И. Агошковым, В. Б. Залесным и В. П. Шутяевым [245, 250, 251].

## 9.1. Задача ассимиляции данных для эволюционного уравнения

Рассмотрим эволюционную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t)\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

где  $A(t)$  – линейный оператор,  $\varphi(x, t)$  для каждого  $t$  принадлежит семейству функций из  $D(A)$  с областью определения  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Функции  $f(x, t)$ ,  $u(x)$  при каждом  $t \in [0, \bar{t}]$  предполагаются квадратично суммируемыми по  $x$  на  $\Omega$  и принадлежат вещественному гильбертовому пространству  $H = L_2(\Omega)$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)^{1/2}$  и нормой  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Оператор  $A(t)$  действует в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D(A)$ . Предположим, что  $\varphi(x, t)$  – достаточно гладкая функция, такая, что  $\varphi$ ,  $\partial\varphi/\partial t$  и  $A(t)\varphi$  квадратично суммируемы на  $\Omega \times (0, \bar{t})$ .

Рассмотрим функционал  $S(\varphi)$  вида

$$S(\varphi) = \frac{\alpha}{2} \|\varphi\|_{t=0}^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^{\bar{t}} \|\varphi - \widehat{\varphi}\|^2 dt, \quad (9.1.2)$$

где  $\alpha, \beta = \text{const}$ ,  $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}(x, t)$  – заданная функция.

Функция  $\widehat{\varphi}(x, t)$  известна априори, как правило, по результатам наблюдений. В некоторых случаях  $\widehat{\varphi}$  может быть получена интерполяцией данных измерений, заданных в дискретных точках  $(x_i, t_j)$  [251, 295]. Величины  $\alpha, \beta$  – весовые коэффициенты, обычно рассматриваемые как параметры регуляризации [155, 245].

Рассмотрим задачу (9.1.1) с неизвестной функцией  $u \in H$  (т. е. с неизвестным управлением  $u$ ) в начальном условии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t)\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

Задача усвоения данных может быть сформулирована следующим образом: найти функции  $u, \varphi$ , удовлетворяющие (9.1.3), при которых функционал  $S(\varphi)$  принимает минимальное значение:

$$S(\varphi) = \inf_u S(\varphi).$$

Предположим, что эта задача имеет решение, и сформулируем систему уравнений для функций  $\varphi, u$ , используя сопряженную задачу. Допустим, что вместо  $u$  в задаче (9.1.3) фигурирует функция  $u_1 = u + \varepsilon u_0$ ,  $u_0 \in H$ ,  $\varepsilon > 0$  с соответствующим решением  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A(t)\varphi_1 &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi_1 &= u_1 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

Так как задача (9.1.4) линейна, то

$$\varphi_1 = \varphi + \varepsilon \varphi_0,$$

где  $\varphi$  – решение задачи (9.1.3), а  $\varphi_0$  – решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + A(t)\varphi_0 &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi_0 &= u_0 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

Таким образом, мы приходим к следующему функционалу  $S_1(\varphi_1)$ :

$$S_1(\varphi_1) = \frac{\alpha}{2} \|u + \varepsilon u_0\|^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^{\bar{t}} \|\varphi + \varepsilon \varphi_0 - \widehat{\varphi}\|^2 dt. \quad (9.1.6)$$

Поскольку по предположению  $u, \varphi$  являются решением задачи ассимиляции данных, функционал  $S_1(\varphi_1)$  имеет минимум при  $\varphi_1 = \varphi$ , т. е. при  $\varepsilon = 0$ . Это означает что

$$\left. \frac{dS_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (9.1.7)$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u + \varepsilon u_0\|^2 &= (u + \varepsilon u_0, u + \varepsilon u_0) = (u, u) + 2\varepsilon(u_0, u) + \varepsilon^2(u_0, u_0), \\ \|\varphi + \varepsilon \varphi_0 - \widehat{\varphi}\|^2 &= (\varphi - \widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) + 2\varepsilon(\varphi_0, \varphi - \widehat{\varphi}) + \varepsilon^2(\varphi_0, \varphi_0), \end{aligned}$$

то из (9.1.6) получим

$$\frac{dS_1}{d\varepsilon} = \alpha(u_0, u) + \alpha\varepsilon(u_0, u_0) + \beta \int_0^{\bar{t}} (\varphi_0, \varphi - \widehat{\varphi}) dt + \beta\varepsilon \int_0^{\bar{t}} (\varphi_0, \varphi_0) dt.$$

Учитывая выражение (9.1.7), получим уравнение

$$\alpha(u_0, u) - J(\varphi_0) = 0, \quad (9.1.8)$$

где функционал  $J(\varphi_0)$  определен равенством

$$J(\varphi_0) = \int_0^{\bar{t}} (\varphi_0, p) dt \quad (9.1.9)$$

при  $p = \beta(\widehat{\varphi} - \varphi)$ .

Уравнение (9.1.8) содержит функцию  $\varphi_0$ , являющуюся решением задачи (9.1.5). Будем использовать двойственное представление функционала  $J(\varphi_0)$  в левой части уравнения (9.1.8) через решение сопряженной задачи, рассматривая (9.1.5) как прямую задачу. Согласно § 1.7 из главы 1, последнему соответствует сопряженное уравнение вида

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* &= p \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

где  $p$  – функция, фигурирующая в (9.1.9),  $A^*$  – сопряженный оператор к  $A(t)$ , удовлетворяющий для каждого  $t$  тождеству Лагранжа:

$$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^* \varphi^*), \quad \varphi \in D(A), \quad \varphi^* \in D(A^*).$$

Предположим, что решение задач (9.1.5) и (9.1.10) достаточно гладкое, такое, что функции  $\varphi_0$ ,  $\partial \varphi_0 / \partial t$ ,  $A(t)\varphi_0$ ,  $\varphi^*$ ,  $\partial \varphi^* / \partial t$ ,  $A^* \varphi^*$  квадратично суммируемы на  $\Omega \times (0, \bar{t})$ . Как и в § 1.7, проделаем несколько преобразований. Умножим уравнение (9.1.5) на  $\varphi^*$ , а уравнение (9.1.10) – на  $\varphi_0$ , вычтем один результат из другого и проинтегрируем на интервале  $0 \leq t \leq \bar{t}$ . Используя тождество Лагранжа, получим связь с сопряженной задачей

$$\int_0^{\bar{t}} (\varphi_0, p) dt = (u_0, \varphi^*|_{t=0}). \quad (9.1.11)$$

Используя (9.1.11), получим другое представление функционала  $J(\varphi_0)$ , определяемого формулой (9.1.9):

$$J(\varphi_0) = (u_0, \varphi^*|_{t=0}). \quad (9.1.12)$$

С учетом (9.1.12) перепишем (9.1.8) в виде

$$\alpha(u_0, u) - (u_0, \varphi^*|_{t=0}) = 0,$$

или

$$(u_0, \alpha u - \varphi^*|_{t=0}) = 0. \quad (9.1.13)$$

Так как функция  $u_0 \in H$  произвольная, то (9.1.13) можно переписать как

$$\alpha u - \varphi^*|_{t=0} = 0. \quad (9.1.14)$$

Таким образом, если  $\varphi$ ,  $u$  являются решением задачи сформулированной выше, то они удовлетворяют задаче (9.1.3) и условию (9.1.14), где  $\varphi^*$  – решение сопряженной задачи (9.1.10). С учетом выражения для  $p$  (см. (9.1.9)) получим для  $\varphi$ ,  $u$  систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t)\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0; \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* &= \beta(\widehat{\varphi} - \varphi) \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}; \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

$$\alpha u - \varphi^*|_{t=0} = 0. \quad (9.1.17)$$

Таким образом, задача усвоения данных сведена к системе (9.1.15)–(9.1.17) для функций  $\varphi$  и  $u$ .

Если функция  $u$  найдена, то  $\varphi$  может быть найдена как решение прямой задачи (9.1.15). Уравнение для управления  $u$  легко получается путем исключения из системы (9.1.15)–(9.1.17) функций  $\varphi$  и  $\varphi^*$ . Выбор метода решения задачи (9.1.15)–(9.1.17) может зависеть от уравнения для управления.

В этом параграфе мы рассмотрели простую задачу ассимиляции данных для эволюционного уравнения. Более общие утверждения могут быть найдены в работах J.-L. Lions [226–230], а также Г. И. Марчука и В. И. Агошкова [6, 245]. В последних работах рассмотрены задачи усвоения данных для эволюционных уравнений в случае нелинейного оператора, изучена разрешимость этих задач в специальных

функциональных пространствах, предложены и обоснованы численные алгоритмы, их решения.

В следующем параграфе мы обсудим один из алгоритмов решения задачи усвоения данных.

## 9.2. Численный алгоритм решения задачи ассимиляции данных

Рассмотрим численный алгоритм решения задачи усвоения данных. Как и ранее, в качестве объекта исследования рассмотрим эволюционную задачу типа (9.1.1). Для простоты предположим, что мы уже аппроксимировали исходную задачу (9.1.1) по всем переменным (за исключением  $t$ ) и получили систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^h}{\partial t} + A^h(t)\varphi^h &= f^h \text{ в } \Omega^h \times (0, \bar{t}), \\ \varphi^h &= u^h \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

где  $\Omega^h$  есть сеточная область;  $A^h(t)$  – вещественная квадратная матрица порядка  $n$ ;  $\varphi^h$ ,  $f^h$ ,  $u^h$  – сеточные вектор-функции длины  $n$ . Пусть  $H$  – пространство вещественных сеточных функций с нормой  $\|\cdot\|_h = (\cdot, \cdot)_h^{1/2}$ . Сеточный параметр  $h$  в дальнейшем для простоты изложения будет опускаться.

Запишем функционал  $S(\varphi)$ , как и ранее, в виде

$$S(\varphi) = \frac{\alpha}{2} \|\varphi|_{t=0}\|^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^{\bar{t}} \|\varphi - \hat{\varphi}\|^2 dt. \quad (9.2.2)$$

Задача усвоения данных состоит в нахождении вектор-функции  $\varphi(t)$  и вектора управления  $u$  и формируется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t)\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0, \\ S(\varphi) &= \inf_u S(\varphi). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Как и ранее, ее можно свести к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t)\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0; \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = \beta(\widehat{\varphi} - \varphi) \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (9.2.5)$$

$$\varphi^* = 0 \text{ при } t = \bar{t};$$

$$\alpha u - \varphi^*|_{t=0} = 0, \quad (9.2.6)$$

где  $A^* = A^T$  – матрица транспонированная к  $A$ .

Предположим, что вектор-функции  $f(t)$  и  $\widehat{\varphi}(t)$  непрерывны на интервале  $[0, T]$ , матрица  $A(t)$  из (9.2.3) положительно определена и не зависит от  $t$ , т. е.  $A(t) = A > 0$ . Легко показать [23], что в этом простом случае задачи (9.2.3) и (9.2.4)–(9.2.6) эквиваленты и имеют одинаковые решения. Здесь решения основной и сопряженной задач понимаются в классическом смысле.

Перед тем как мы сформулируем алгоритм для численного решения задачи (9.2.4)–(9.2.6), получим уравнение для неизвестной вектор-функции  $u$ . Предполагая непрерывность  $f(t)$ , запишем решение задачи (9.2.4) с учетом  $A(t) = A$  в явном виде [39]:

$$\varphi(t) = e^{-At}u + \varphi_1(t), \quad (9.2.7)$$

где

$$\varphi_1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Здесь  $e^{-At}$  – функция от матрицы, которая может быть представлена [39] в виде

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-At)^k}{k!}, \quad (A^0 = E),$$

где  $E$  – единичная матрица. Аналогичным образом получим из (9.2.5)

$$\varphi^*(t) = \int_t^{\bar{t}} e^{-A(t-s)} \beta[\widehat{\varphi}(s) - \varphi(s)] ds. \quad (9.2.8)$$

Подставим (9.2.7) в (9.2.8) и получим

$$\varphi^*(t) = \beta \int_t^{\bar{t}} e^{A^*(t-s)} [\widehat{\varphi}(s) - \varphi_1(s)] ds - \beta \int_t^{\bar{t}} e^{-A^*(t-s)} e^{-As} u ds.$$



Отсюда, считая, что  $A$  есть нормальная матрица (т. е.  $AA^* = A^*A$ ), мы приходим к равенству

$$\varphi^*(0) = \beta \int_t^{\bar{t}} e^{A^*s} [\widehat{\varphi}(s) - \varphi_1(s)] ds - \beta \int_t^{\bar{t}} e^{-(A+A^*)s} u ds. \quad (9.2.9)$$

С учетом (9.2.6) и (9.2.9) получим уравнение для управления  $u$ :

$$Lu = F, \quad (9.2.10)$$

где

$$F = \beta \int_0^{\bar{t}} e^{-A^*s} [\widehat{\varphi}(s) - \varphi_1(s)] ds;$$

$$L = \alpha E + \beta \int_0^{\bar{t}} e^{-(A+A^*)s} ds = \alpha E + \beta(A + A^*)^{-1}(E - e^{-(A^*+A)\bar{t}}).$$

Запишем матрицу  $L$  системы (9.2.10) в виде

$$L = \alpha E + \beta M^{-1}(E - e^{-M\bar{t}}), \quad (9.2.11)$$

где

$$M = A + A^*.$$

Обычно при  $\alpha, \beta > 0$  матрица  $L$  симметрична и положительно определена. Поэтому уравнение (9.2.10) обладает единственным решением, даже если один из регуляризирующих параметров ( $\alpha$  или  $\beta$ ) равен нулю. В дальнейшем мы будем считать, что  $\beta > 0$ .

Если  $\alpha = 0$ , то параметр  $\beta$  в исходной постановке может быть равен единице, и уравнение для управления  $u$  примет вид

$$L_1 u = F_1 \quad (9.2.12)$$

с симметричной положительно определенной матрицей  $L_1 = M^{-1}(E - e^{-M\bar{t}})$  и правой частью

$$F_1 = \int_0^{\bar{t}} e^{-A^*s} [\widehat{\varphi}(s) - \varphi_1(s)] ds.$$

Рассмотрим задачу на собственные значения матрицы  $M$ :

$$Mu_k = \lambda_k u_k. \quad (9.2.13)$$

При сделанных предположениях матрица  $M$  имеет положительные собственные значения  $\lambda_k$  и соответствующие собственные векторы, составляющие базис в пространстве  $H$ . Легко показать, что  $u_k$  являются также собственными векторами матрицы  $L$ , т. е. они являются решениями задачи

$$Lu_k = \mu_k u_k \quad (9.2.14)$$

при

$$\mu_k = \alpha + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_k \bar{t}}}{\lambda_k}, \quad (9.2.15)$$

где  $\lambda_k$  – собственные значения матрицы  $M$ .

Так как матрица  $L$  симметрична, то выполняется неравенство

$$(Lu, u) \geq \mu_{\min}(u, u), \quad u \in H, \quad (9.2.16)$$

где

$$\mu_{\min} = \alpha + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_{\max} \bar{t}}}{\lambda_{\max}}$$

и  $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(M)$  – максимальное собственное значение матрицы  $M = A + A^*$ .

Имеет место следующая оценка для решения  $u$  задачи (9.2.10), вытекающая из (9.2.16):

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mu_{\min}} \|F\|. \quad (9.2.17)$$

Уравнение (9.2.10) переходит в уравнение (9.2.12) при  $\alpha = 0$ . Пусть  $u = \bar{u}$  – решение уравнения (9.2.12), для которого выполняется оценка

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\bar{\mu}_{\min}} \|F_1\|, \quad (9.2.18)$$

где

$$\bar{\mu}_{\min} = \frac{1 - e^{-\lambda_{\max} \bar{t}}}{\lambda_{\max}}.$$

Из (9.2.12) и (9.2.10) получаем уравнение для разности  $\xi = u - \bar{u}$ :

$$\beta L_1(u - \bar{u}) = -\alpha u. \quad (9.2.19)$$

Поэтому из оценок (9.2.17) и (9.2.18) следует неравенство

$$\|u - \bar{u}\| \leq \frac{\alpha}{\mu_{\min} \bar{\mu}_{\min}} \|F_1\|,$$

или

$$\|u - \bar{u}\| \leq \frac{\alpha \|F_1\|}{\frac{1-e^{-\lambda_{\max} \bar{t}}}{\lambda_{\max}} \left( \alpha + \beta \frac{1-e^{-\lambda_{\max} \bar{t}}}{\lambda_{\max}} \right)}. \quad (9.2.20)$$

Таким образом, решение  $u$  задачи (9.2.10) при  $\alpha \rightarrow 0$  сходится к решению  $\bar{u}$  задачи (9.2.12).

Рассмотрим итерационный метод для решения системы (9.2.10). Большинство итерационных методов, применяемых для решения линейных систем, может быть описано простой универсальной формулой:

$$B_j \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau_j} = -(Lu^j - F), \quad (9.2.21)$$

где  $\{B_j\}$  – последовательность невырожденных матриц и  $\{\tau_j\}$  – последовательность вещественных параметров. Как правило, на матрицы  $B_j$  налагается несколько существенных ограничений. Мы обсудим их позже. Итерационный процесс (9.2.21) может быть записан в виде

$$u^{j+1} = T_j u^j + F^j, \quad (9.2.22)$$

где

$$T_j = E - \tau_j B_j^{-1} L, \quad F^j = \tau_j B_j^{-1} F.$$

Рассмотрим стационарные итерационные методы (когда  $\tau_j$ ,  $B_j$  не зависят от номера итерации  $j$ ) следующего типа:

$$B \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = -(Lu^j - F) \quad (9.2.23)$$

с начальным вектором  $u_0 \in H$  и вещественным параметром  $\tau$ .

Для сходимости итерационного метода (9.2.23) необходимо и достаточно следующее условие [79]:

$$\max_k |\lambda_k(T_\tau)| < 1, \quad (9.2.24)$$

где  $T_\tau = E - \tau B^{-1} L$  и  $\lambda_k(T_\tau)$  обозначает собственные значения матрицы  $T_\tau$ . Пусть далее  $B$  есть симметричная и положительно определенная матрица.

Если собственные векторы матриц  $L$  и  $B$  совпадают, то из (9.2.24) вытекает следующее условие на параметр  $\tau$ :

$$0 < \tau < \frac{2\lambda_k(B)}{\mu_k}, \quad (9.2.25)$$

где  $\lambda_k(B)$  – собственные значения матрицы  $B$ , а  $\mu_k$  – собственные значения матрицы  $L$ . В этом случае задача оптимального выбора параметра  $\tau$  легко решается (см. [79]).

Используя (9.2.24) и явный вид оператора  $L$ , запишем итерационный процесс для системы: (9.2.4)–(9.2.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^j}{dt} + A\varphi^j &= f, \\ \varphi^j|_{t=0} &= u^j; \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\varphi^{*j}}{dt} + A^*\varphi^{*j} &= \beta(\widehat{\varphi} - \varphi^j), \\ \varphi^{*j}|_{t=\bar{t}} &= 0; \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

$$B \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = \varphi^{*j}|_{t=0} - \alpha u^j. \quad (9.2.28)$$

Если собственные векторы матриц  $B$  и  $M = A + A^*$  совпадают, то условие (9.2.25) необходимо и достаточно для сходимости итерационного процесса (9.2.26)–(9.2.28).

Рассмотрим более детально случай  $B = E$ . Здесь итерационный процесс (9.2.26)–(9.2.28) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^j}{dt} + A\varphi^j &= f, \\ \varphi^j|_{t=0} &= u^j; \end{aligned} \quad (9.2.29)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\varphi^{*j}}{dt} + A^*\varphi^{*j} &= \beta(\widehat{\varphi} - \varphi^j), \\ \varphi^{*j}|_{t=\bar{t}} &= 0; \end{aligned} \quad (9.2.30)$$

$$u^{j+1} = u^j + \tau(\varphi^{*j}|_{t=0} - \alpha u^j). \quad (9.2.31)$$

Принимая во внимание (9.2.25) и используя представление  $\mu_k$  из (9.2.15), получим, что для сходимости этого итерационного процесса необходимо и достаточно следующее условие:

$$0 < \tau < \frac{2}{\alpha + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_{\min} \bar{t}}}{\lambda_{\min}}}, \quad (9.2.32)$$

где  $\lambda_{min} = \lambda_{min}(M)$  – минимальное собственное значение матрицы  $M = A + A^*$ .

Используя стандартную технику [79], легко показать, что для ошибки  $\psi^j = u^j - u$  выполняется неравенство

$$\|\psi^j\| \leq q^j(\tau) \|\psi^0\|, \quad (9.2.33)$$

где

$$q(\tau) = \max \left\{ \left| 1 - \tau \left( \alpha + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_{min}\bar{t}}}{\lambda_{min}} \right) \right|, \right. \\ \left. \left| 1 - \tau \left( \alpha + \beta \frac{1 - e^{-\lambda_{max}\bar{t}}}{\lambda_{max}} \right) \right| \right\}.$$

Оптимальный параметр  $\tau$  определяется формулой

$$\tau = \tau_{opt} = 1 / \left\{ \alpha + \frac{\beta}{2} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{min}\bar{t}}}{\lambda_{min}} + \frac{1 - e^{-\lambda_{max}\bar{t}}}{\lambda_{max}} \right) \right\}.$$

Он удовлетворяет (9.2.32), что гарантирует сходимость. В этом случае

$$q_{opt} = q(\tau_{opt}) = \frac{\beta \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{min}\bar{t}}}{\lambda_{min}} - \frac{1 - e^{-\lambda_{max}\bar{t}}}{\lambda_{max}} \right)}{2\alpha + \beta \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{min}\bar{t}}}{\lambda_{min}} + \frac{1 - e^{-\lambda_{max}\bar{t}}}{\lambda_{max}} \right)}. \quad (9.2.34)$$

Величина  $q(\tau)$  характеризует скорость сходимости итерационного процесса (см. (9.2.32)). Чем меньше  $q(\tau)$ , тем быстрее итерационный процесс сходится. Это видно из (9.2.34), например, если  $\alpha = 0$ , тогда  $q_{opt}$  возрастает, т. е. итерационный процесс сходится более медленно. При  $\alpha = 0$  и большом значении  $\lambda_{max}$  величина  $q(\tau)$  близка к единице, что также говорит о медленной сходимости алгоритма. Поэтому роль регуляризатора состоит в том, чтобы при  $\alpha > 0$  итерационный процесс сошелся быстрее.

Мы обсудили здесь только случай  $B = E$ . Выбирая  $B$  в (9.2.26)–(9.2.28) другим образом, мы получим другие итерационные методы. Для выбранного итерационного алгоритма мы можем решить основную и сопряженную задачи (9.2.26) и (9.2.27) на каждой итерации стандартными методами, используя различные конечно-разностные схемы по времени, метод расщепления и др.

### **9.3. Численный алгоритм решения задачи ассимиляции геофизических данных на основе метода расщепления**

Задача ассимиляции данных наблюдений в математических моделях, описывающих геофизические процессы, – это одна из важнейших задач современной геофизической гидродинамики. Проблема согласования данных наблюдений и результатов численных экспериментов важна и интересна в связи со следующими теоретическими и практическими вопросами:

- реконструкцией массивов данных наблюдений в пространственно-временной области и четырехмерный анализ данных;
- построением начальных геофизических полей с использованием архивной информации и краткосрочных данных наблюдений в предшествующие периоды;
- обработкой данных наблюдений и результатов численных экспериментов и созданием единой наблюдательно-вычислительной базы данных.

Проблема ассимиляции данных особенно важна в динамике океана, что объясняется прежде всего высокой стоимостью океанографических наблюдений и сложным характером реальной океанической изменчивости.

Математические методы, основанные на теории сопряженных уравнений [76, 215, 247] и теории оптимального управления [23, 145, 228], в настоящее время стали очень популярными как один из эффективных инструментов анализа и ассимиляции данных наблюдений. В связи с этим возникает ряд проблем математического, физического и вычислительного характера, связанных с решением сложных нелинейных задач усвоения данных на основе теории сопряженных уравнений и теории оптимального уравнения. Это касается:

- физических аспектов задач, связанных с физической формулировкой задачи и выбором оптимальных информативных функционалов [278];
- математических аспектов, связанных с эквивалентностью исходных вариационных задач и дифференциальных задач, полученных в результате преобразований и их разрешимости [23, 245];

– численных аспектов, связанных с выбором хорошей дискретной аппроксимации высокой точности и эффективных алгоритмов решения дискретных задач [101].

В этом параграфе мы обсудим численный метод решения задачи ассимиляции данных. Мы будем рассматривать задачу динамики океана, хотя метод может быть использован в различных областях географической гидродинамики. Крупномасштабная динамика океана обладает рядом особенностей:

- океан представляет собой вынужденную систему, находящуюся под действием атмосферы;
- крупномасштабные океанические процессы хорошо описываются в рамках линейного приближения;
- океан скудно освещен синхронными данными наблюдений, однако это система с «долгой памятью».

Эти особенности океана определяют постановку задач и методы усвоения данных, которые мы будем рассматривать в этом параграфе.

Рассмотрим эволюционную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

Рассмотрим, как в § 9.2, задачу, аппроксимирующую (9.3.1) по всем пространственным переменным, где  $\Omega$  – сеточная область;  $A$  – вещественная квадратная матрица порядка  $n$ , рассматриваемая как результат аппроксимации некоторого линейного оператора;  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $f = f(t)$ ,  $u$  – сеточные функции – векторы длиной  $n$ . Индекс  $h$  будем опускать для простоты изложения. Пусть  $H$  обозначает вещественное пространство сеточных функций с нормой  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ .

Яркой особенностью задачи ассимиляции данных в океане является практически полное отсутствие информации в начальный момент времени. Однако часто вместо недостающих начальных данных можно использовать информацию о решении  $\varphi$ . Пусть мы знаем вектор-функцию  $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}(t) \in H$ , связанную с данными наблюдений.

Рассмотрим функционал  $S$  в следующем виде:

$$S(\varphi) = \frac{C_1}{2} \|\varphi|_{t=0} - \widehat{\varphi}^0\|^2 + \frac{C_2}{2} \int_0^{\bar{t}} \|\varphi - \widehat{\varphi}\|^2 dt, \quad (9.3.2)$$

где  $C_1, C_2$  – некоторые положительные константы, независимые от  $t$ ,  $\widehat{\varphi}^0 = \widehat{\varphi}|_{t=0}$ .

Сформулируем задачу ассимиляции данных следующим образом: найти пару вектор-функций  $\varphi$ ,  $u$ , удовлетворяющих (9.3.1) и доставляющих минимум функционалу  $S(\varphi)$  на множестве решений (9.3.1):

$$S(\varphi) = \inf_u S(\varphi).$$

Эта задача сводится к системе уравнений для двух вектор-функций  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\varphi^* = \varphi^*(t)$  и вектора управления  $u$  методом, рассмотренным в § 9.1. Эта система иногда называется системой оптимальности. В нашем случае она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi &= f \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi &= u \text{ при } t = 0; \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\varphi^*}{dt} + A^*\varphi^* &= C_2(\widehat{\varphi} - \varphi) \text{ в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}; \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

$$C_1(u - \widehat{\varphi}^0) - \varphi^*|_{t=0} = 0, \quad (9.3.5)$$

где  $A^* = A^T$ .

Предположим, что вектор-функции  $f(t)$  и  $\widehat{\varphi}(t)$  непрерывны на интервале  $[0, \bar{t}]$  и матрица  $A$  из (9.3.1) положительно определена и не зависит от  $t$ . Легко показать [23], что в этом случае задача (9.3.3)–(9.3.5) имеет единственное решение. Решения прямой и сопряженной задач понимаются в классическом смысле.

Обратим внимание, что система (9.3.3)–(9.3.5) представляет факторизованную форму краевой задачи по времени. Действительно, так как  $\varphi^*$ ,  $\widehat{\varphi}$  достаточно гладкие, то (9.3.3)–(9.3.5) можно переписать как

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + A\right) C_2^{-1} \left(\frac{d}{dt} - A^*\right) \varphi^* &= f_1; \\ C_1 C_2^{-1} \left(-\frac{d\varphi^*}{dt} + A^*\varphi^*\right) + \varphi^* &= 0 \text{ при } t = 0; \\ \varphi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

где  $f_1 = f - \frac{d\widehat{\varphi}}{dt} - A\widehat{\varphi}$ .

Отсюда следует, что аппроксимация краевой задачи по времени (9.3.6) может служить естественным путем проверки численной схемы для исходных уравнений (9.3.3)–(9.3.5).

Опишем алгоритм решения задачи (9.3.3)–(9.3.5). Введем равномерную сетку с шагом  $\tau$  на интервале  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , и пусть  $t_j = j\tau$ ,



$j = \overline{0, J}$ ,  $J = \bar{t}/\tau$ . Аппроксимируем (9.3.3)–(9.3.5) с помощью схемы Кранка – Николсона:

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = f^{j+1/2}; \quad (9.3.7)$$

$$-\frac{\psi^{j+1} - \psi^j}{\tau} + A^* \frac{\psi^{j+1} + \psi^j}{2} + C_2 \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = C_2 \widehat{\varphi}^{j+1/2}, \quad (9.3.8)$$

$$j = 0, \dots, J-1;$$

$$C_1(\varphi^0 - \widehat{\varphi}^0) - \psi^0 = 0, \quad \psi^J = 0, \quad (9.3.9)$$

где  $\psi = \varphi^*$ ,  $\varphi^0 = u$ ,  $f^{j+1/2} = f(t_{j+1/2})$ ,  $t_{j+1/2} = (j + 1/2)\tau$ .

В [251] показано, что система (9.3.7)–(9.3.9) имеет единственное решение и аппроксимирует исходную задачу (9.3.3)–(9.3.5) с точностью  $O(\tau^2)$ . Система (9.3.7)–(9.3.9) аппроксимирует также краевую задачу (9.3.6), по крайней мере при  $C_1 = 0$  [251].

Модифицируем аппроксимацию (9.3.7)–(9.3.9), используя метод расщепления. Предположим, что выполняется следующее:

$$A = A_1 + A_2, \quad A^* = A_1^* + A_2^*, \quad (9.3.10)$$

где  $A_i$ ,  $A_i^*$  – положительно полуопределенные матрицы,  $i = 1, 2$ . Используем двуциклическую схему расщепления, сохраняя второй порядок аппроксимации по времени в исходной задаче (9.3.3)–(9.3.5) [251]. Имеем

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{4}A_1) \varphi_1 &= (E - \frac{\tau}{4}A_1) \varphi^j; \\ (E + \frac{\tau}{4}A_2) (\varphi_2 - \frac{\tau}{2}f^{j+1/2}) &= (E - \frac{\tau}{4}A_2) \varphi_1; \\ (E + \frac{\tau}{4}A_2) \varphi_3 &= (E - \frac{\tau}{4}A_2) (\varphi_2 + \frac{\tau}{2}f^{j+1/2}); \\ (E + \frac{\tau}{4}A_1) \varphi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{4}A_1) \varphi_3, \quad j = 0, \dots, J-1; \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

$$\begin{aligned} (E - \frac{\tau}{4}A_1^*) \psi_1 &= (E + \frac{\tau}{4}A_1^*) \psi^j; \\ (E - \frac{\tau}{4}A_2^*) \left[ \psi_2 - \frac{\tau C_2}{2} \left( \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} - \widehat{\varphi}^{j+1/2} \right) \right] &= (E + \frac{\tau}{4}A_2^*) \psi_1; \\ (E - \frac{\tau}{4}A_2^*) \psi_3 &= (E + \frac{\tau}{4}A_2^*) \left[ \psi_2 + \frac{\tau C_2}{2} \left( \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} - \widehat{\varphi}^{j+1/2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

$$\begin{aligned} (E - \frac{\tau}{4}A_1^*) \psi^{j+1} &= (E + \frac{\tau}{4}A_1^*) \psi_3, \quad j = 0, \dots, J-1, \\ C_1(\varphi^0 - \widehat{\varphi}^0) - \psi^0 &= 0, \quad \psi^J = 0. \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

Исключая промежуточные величины  $\varphi_1, \dots, \psi_3$  из (9.3.11) и (9.3.12), получим

$$\varphi^{j+1} = T_1 T_2 T_2 T_1 \varphi^j + \tau T_1 T_2 f^{j+1/2}; \quad (9.3.14)$$

$$\psi^{j+1} = S_1 S_2 S_2 S_1 \psi^j + \tau C_2 S_1 S_2 \left( \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} - \widehat{\varphi}^{j+1/2} \right), \quad (9.3.15)$$

$$j = 0, \dots, J-1,$$

где

$$T_i = \left( E + \frac{\tau}{4} A_i \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{4} A_i \right),$$

$$S_i = \left( E - \frac{\tau}{4} A_i^* \right)^{-1} \left( E + \frac{\tau}{4} A_i^* \right), \quad i = 1, 2.$$

Сформулируем итерационный алгоритм для решения основной и сопряженной задач (9.3.14), (9.3.15). Предположим, что мы получили несколько значений вектора  $\varphi_{(\nu-1)}$  на  $(\nu-1)$ -й итерации, включая значение в начальный момент времени  $\varphi_{(\nu-1)}^j = \varphi^j$  при  $j = 0$ . Тогда  $\nu$ -я итерация содержит следующие шаги:

1. Из (9.3.14) имеем (из решения основного уравнения «вперед» по времени)

$$\varphi^{j+1} = T_1 T_2 (T_2 T_1 \varphi^j + \tau f^{j+1/2}), \quad j = 0, \dots, J-1,$$

или

$$\varphi^{j+1} = T_\tau^{j+1} \varphi^0 + \sum_{i=0}^j T_\tau^i (\tau T_1 T_2 f^{j-i+1/2}), \quad j = 0, \dots, J-1, \quad (9.3.16)$$

где  $T_\tau = T_1 T_2 T_2 T_1$ .

2. Из (9.3.15) имеем (из решения сопряженного уравнения «назад» по времени)

$$\psi^J = 0,$$

$$\psi^{j-1} = S_1^{-1} S_2^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1} \psi^j - \tau C_2 S_1^{-1} S_2^{-1} \left( \frac{\varphi^{j-1} + \varphi^j}{2} - \widehat{\varphi}^{j-1/2} \right),$$

$$j = J, \dots, 2,$$

или

$$\psi^{j-1} = -\tau C_2 \sum_{i=j}^J S^{i-j} S_1^{-1} S_2^{-1} \left( \frac{\varphi^i + \varphi^{i-1}}{2} - \widehat{\varphi}^{i-1/2} \right), \quad (9.3.17)$$

$$j = J, \dots, 2,$$

где  $S = S_1^{-1}S_2^{-1}S_2^{-1}S_1^{-1}$ . Подставляя выражение для  $\varphi$  из (9.3.16) в (9.3.17), получим

$$\begin{aligned} \psi^{j-1} = & -\frac{\tau C_2}{2} \sum_{i=j}^J S^{i-j} S_1^{-1} S_2^{-1} [T_\tau^i \varphi^0 + T_\tau^{i-1} \varphi^0 + \\ & + \tau \sum_{k=0}^{i-1} T_\tau^k (T_1 T_2 f^{i-1-k+1/2}) + \tau \sum_{k=0}^{i-2} T_\tau^k (T_1 T_2 f^{i-2-k+1/2}) - \\ & - 2\widehat{\varphi}^{i-1/2}] , \quad j = J, \dots, 2. \end{aligned} \quad (9.3.18)$$

3. Завершающий шаг на  $\nu$ -й итерации состоит в нахождении нового значения  $\varphi_{(\nu)}^0$  как результата решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} C_2 S_1^{-1} S_2^{-1} \varphi_{(\nu)}^0 + \psi_{(\nu)}^0 &= S \psi_{(\nu-1)}^1 - \frac{\tau}{2} C_2 S_1^{-1} S_2^{-1} (\varphi_{(\nu-1)}^1 - 2\widehat{\varphi}^{1/2}) , \\ C_1 \varphi_{(\nu)}^0 - \psi_{(\nu)}^0 &= C_1 \widehat{\varphi}^0 . \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем для  $\varphi_{(\nu)}^0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tau}{2} C_2 S_1^{-1} S_2^{-1} + C_1 E \right) \varphi_{(\nu)}^0 &= \\ = C_1 \widehat{\varphi}^0 + S \psi_{(\nu-1)}^1 - \frac{\tau}{2} C_2 S_1^{-1} S_2^{-1} (\varphi_{(\nu-1)}^1 - 2\widehat{\varphi}^{1/2}) . \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

После нахождения  $\varphi_{(\nu)}^0$  повторяется цикл вычислений (см. пункт 1) до достижения сходимости.

Покажем, что при некотором условии на  $\tau$  имеет место сходимость описанного выше итерационного алгоритма. Оценим норму оператора перехода при вычислении  $\varphi^0$  с  $(\nu-1)$ -й на  $\nu$ -й шаг итерации.

Из (9.3.19) имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{S} \varphi_{(\nu)}^0 + \psi_{(\nu)}^0 &= S \psi_{(\nu-1)}^1 - \widetilde{S} (\varphi_{(\nu-1)}^1 - 2\widehat{\varphi}^{1/2}) , \\ \varphi_{(\nu)}^0 - C_1^{-1} \psi_{(\nu)}^0 &= \varphi_{(\nu)}^0 , \end{aligned} \quad (9.3.20)$$

где  $\widetilde{S} = \frac{\tau}{2} C_2 S_1^{-1} S_2^{-1}$ , отсюда

$$\begin{aligned} \varphi_{(\nu)}^0 &= (E + C_1^{-1} \widetilde{S})^{-1} \left\{ \widehat{\varphi}^0 - C_1^{-1} \left[ S^{J-1} \widetilde{S} (\varphi_{(\nu-1)}^J + \varphi_{(\nu-1)}^{J-1} - \right. \right. \\ & - 2\widehat{\varphi}^{J-1/2}) + \dots + S \widetilde{S} (\varphi_{(\nu-1)}^2 + \varphi_{(\nu-1)}^1 - 2\widehat{\varphi}^{3/2}) \left. \right] - \\ & - C_1^{-1} \widetilde{S} (T_\tau \varphi_{(\nu-1)}^0 + \tau T_1 T_2 f^{1/2} - 2\widehat{\varphi}^{1/2}) \left. \right\} . \end{aligned} \quad (9.3.21)$$

Здесь мы воспользовались тем, что (9.3.16) и (9.3.18) представляют соответственно  $\varphi_{(\nu-1)}^1$  и  $\psi_{(\nu-1)}^1$ . Оценивая  $\|\varphi_{(\nu-1)}^0\|$ , согласно (9.3.21) получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_{(\nu)}^0\| \leq & \|(E + C_1^{-1}\tilde{S})^{-1}\| \left\{ \|\hat{\varphi}^0\| + |C_1^{-1}| \left[ \|S^{J-1}\| \times \right. \right. \\ & \times \|\tilde{S}\| \left( \|\varphi_{(\nu-1)}^J\| + \|\varphi_{(\nu-1)}^{J-1}\| + 2\|\hat{\varphi}^{J-1/2}\| \right) + \dots + \\ & + \|S\| \cdot \|\tilde{S}\| \left( \|\varphi_{(\nu-1)}^2\| + \|\varphi_{(\nu-1)}^1\| + 2\|\hat{\varphi}^{3/2}\| \right) \left. \right] + |C_1^{-1}| \times \\ & \times \|\tilde{S}\| \left( \|T_\tau\| \cdot \|\varphi_{(\nu-1)}^0\| + \tau\|T_1T_2\| \cdot \|f^{1/2}\| + 2\|\hat{\varphi}^{1/2}\| \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (9.3.22)$$

По лемме Келлога [79]

$$\begin{aligned} \|S\| = & \|S_1^{-1}S_2^{-1}S_2^{-1}S_1^{-1}\| \leq \left\| \left( E + \frac{\tau}{4}A_1^* \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{4}A_1^* \right) \right\| \times \\ & \times \left\| \left( E + \frac{\tau}{4}A_2^* \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{4}A_2^* \right) \right\| \cdot \left\| \left( E + \frac{\tau}{4}A_2^* \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{4}A_2^* \right) \right\| \times \\ & \times \left\| \left( E + \frac{\tau}{4}A_1^* \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{4}A_1^* \right) \right\| \leq 1, \quad \|T_\tau\| \leq 1. \end{aligned}$$

Продолжим неравенство (9.3.22), используя оценку  $\|\varphi_{(\nu-1)}^j\|$ ,  $j = 1, \dots, J$ , равенство (9.3.16), а также (9.3.20). Получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_{(\nu)}^0\| \leq & \frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}(2J-1) \left\| \left( E + \frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}S_1^{-1}S_2^{-1} \right)^{-1} \right\| \times \\ & \times \|\varphi_{(\nu-1)}^0\| + \|G\|, \end{aligned} \quad (9.3.23)$$

где  $G$  – вектор-функция, зависящая только от заданных векторов  $f^{j+1/2}$  и  $\hat{\varphi}^{j+1/2}$ . Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы норма оператора перехода была меньше единицы:

$$\frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}(2J-1) \left\| \left( E + \frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}S_1^{-1}S_2^{-1} \right)^{-1} \right\| < 1. \quad (9.3.24)$$

Так как

$$\left\| \left( E + \frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}S_1^{-1}S_2^{-1} \right)^{-1} \right\| \leq 1,$$

то достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{\tau}{2}C_2C_1^{-1}(2J-1) < 1.$$

Таким образом, итерационный процесс сходится при условии

$$\tau < \frac{2}{2J-1} C_1 C_2^{-1}. \quad (9.3.25)$$

Поскольку  $\bar{t} = \tau J$ , неравенство (9.3.25) может быть усилено и переписано в терминах  $\bar{t}$  – интервала ассимиляции данных. Тогда можно сказать, что итерационный процесс сходится при условии

$$\bar{t} < C_1 C_2^{-1}$$

независимо от числа точек на интервале ассимиляции.

## **9.4. Моделирование циркуляции Мирового океана с 4-мерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солёности**

В связи с исследованиями глобальных климатических изменений Земли возрастает интерес к задачам усвоения и обработки данных наблюдений в моделях динамики атмосферы и океана. В задачах геофизической гидродинамики математические модели используются для исследования общей структуры гидродинамических течений, а также для предсказания их изменчивости [37, 41, 49, 149, 252, 273]. Гидродинамика океана описывается сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для того чтобы использовать эти уравнения для прогноза гидрофизических полей, необходимо дополнить их начальными и граничными условиями и идентифицировать входные параметры. Эту дополнительную информацию можно получить с помощью данных наблюдений.

Отличительные характеристики гидродинамики Мирового океана – это важность данных наблюдений и отсутствие их полноты. Одной из главных проблем здесь является построение начальных полей, или инициализация океана. Измерить прогностические поля океана – течения, температуру и солёность в каждой точке трехмерной области в фиксированный момент времени нереально. Современные измерительные системы позволяют получить лишь некоторую информацию

об их структуре. Например, система плавающих буев Арго измеряет поля температуры и солености на нерегулярной пространственно-временной сетке. Требуется построить алгоритм решения прогностической задачи в условиях неполноты информации о начальном состоянии океана, внешнем воздействии и входных параметрах.

Для решения таких задач разрабатываются методы ассимиляции данных. Они позволяют связать разные источники информации – наблюдения и модельные расчеты – в рамках единой задачи. В этом параграфе мы рассматриваем задачу численного моделирования и прогноза динамики Мирового океана. Одним из фундаментальных требований к успешному прогнозу является достаточно точное описание начальных условий и потоков на поверхности океана. Прежде чем проводить прогноз с помощью численной модели, необходимо описать начальное состояние системы, комбинируя данные наблюдений и численных расчетов. Другими словами, решить задачу инициализации для заданной численной модели динамики океана.

Наиболее распространенными методами ассимиляции данных наблюдений в современных моделях являются динамико-стохастический [214, 275] и вариационный [220, 245, 247, 250]. Вариационный метод состоит в условной минимизации функционала ценности в 4-мерной пространственно-временной подобласти при наличии связей, описываемых модельными уравнениями. Функционал отражает отклонение модельного решения от данных наблюдений в заданной подобласти. Задача ассимиляции данных наблюдений формулируется как задача оптимального управления [233, 237, 242, 262].

При решении задач минимизации возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении было использование теории сопряженных уравнений. Начиная с работ [247], [220], применение сопряженных уравнений для решения задач ассимиляции данных используется во многих исследованиях [25, 178–180, 192, 245, 250, 253, 291] и др.

Наши исследования связаны с построением иерархически развиваемой модели, описывающей крупномасштабную циркуляцию Мирового океана [291]. Структура модели основана на методе ее численного решения – методе многокомпонентного расщепления. Метод включает расщепление по физическим процессам и геометрическим координатам [241, 252, 291]. Программной реализации модели присущ модульный принцип: отдельный этап расщепления представляется отдельным программным модулем. В результате расщепления сложная

система уравнений динамики океана разбивается на ряд отдельных подсистем – модулей более простой структуры. Прямая модель может состоять из разного набора модулей, описывая физический процесс с определенной степенью полноты.

Сопряженная модель включает совокупность сопряженных подсистем (модулей) в соответствии с модулями прямой модели. Для каждой расщепленной подсистемы прямой модели строится сопряженная подсистема. Полная сопряженная модель описывается соответствующим набором сопряженных расщепленных подсистем [292, 293]. Процедура вариационной ассимиляции состоит в решении системы оптимальности – двух связанных друг с другом задач на интервале усвоения по времени: прямой прогностической задачи и сопряженной задачи в обратном времени.

#### 9.4.1. Постановка задачи моделирования динамики Мирового океана с вариационной ассимиляцией данных наблюдений

Сформулируем уравнения модели в  $\sigma$ -системе координат с приведенной глубиной

$$\sigma = \frac{z - \zeta}{H - \zeta}, \quad (9.4.1)$$

где  $z$  – направленная вниз вертикальная координата;  $\zeta$  – уровень океана;  $H$  – глубина океана.

После некоторых упрощений уравнений имеем [293]

$$\frac{du}{dt} - (l + \xi) v = -\frac{1}{\rho_0 r_x} \left( Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial x} - Z_x \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \Lambda u, \quad (9.4.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + (l + \xi) u = -\frac{1}{\rho_0 r_y} \left( Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial y} - Z_y \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \Lambda v, \quad (9.4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = g Z_\sigma \rho; \quad (9.4.4)$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Z_\sigma r_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (Z_\sigma r_x v) \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0; \quad (9.4.5)$$

$$\frac{\partial Z_\sigma T}{\partial t} + \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (Z_\sigma r_y u T) + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (Z_\sigma r_x v T) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) = \Lambda T, \quad (9.4.6)$$

$$\frac{\partial Z_\sigma S}{\partial t} + \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (Z_\sigma r_y u S) + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (Z_\sigma r_x v S) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) = \Lambda S, \quad (9.4.7)$$

$$\rho = \rho(T, S, Z). \quad (9.4.8)$$

Здесь  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r_y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\omega}{Z_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}$ ,  $l$  – параметр Кориолиса,  $r_x, r_y$  – метрические коэффициенты,

$$Z = \sigma (H(x, y) - \zeta(t, x, y)) + \zeta(t, x, y) \approx \sigma H(x, y),$$

$$Z_\sigma = H, \quad Z_x = \sigma \frac{\partial H}{\partial x}, \quad Z_y = \sigma \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \xi = \frac{1}{r_x r_y} \left( \frac{\partial r_y}{\partial x} v - \frac{\partial r_x}{\partial y} u \right),$$

$$\rho(T, S, p) = \tilde{\rho}(T, S, p) - \tilde{\rho}(\bar{T}, \bar{S}, 0),$$

$$\rho_{pot} = \rho(T, S, 0) \equiv \tilde{\rho}(T, S, 0) - \tilde{\rho}(\bar{T}, \bar{S}, 0), \quad (9.4.9)$$

$$\omega = w - \left[ (1 - \sigma) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x} \frac{\partial Z}{\partial x} u + \frac{1}{r_y} \frac{\partial Z}{\partial y} v \right], \quad (9.4.10)$$

$w$  – вертикальная скорость в  $z$ -системе координат.

Оператор турбулентного обмена  $\Lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{r_y r_x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r_y}{r_x} \mu Z_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r_y}{r_x} \mu Z_x \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{r_y}{r_x} \mu Z_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{r_y}{r_x} \mu \frac{Z_x^2}{Z_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r_x}{r_y} \mu Z_\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r_x}{r_y} \mu Z_y \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{r_x}{r_y} \mu Z_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{r_x}{r_y} \mu \frac{Z_y^2}{Z_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{Z_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \left( \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

В последнем слагаемом в операторе диффузии (9.4.11) учтена зависимость коэффициента диффузии  $\nu$  от вертикальной стратификации потенциальной плотности  $\rho_{pot}$ :

$$\nu = \begin{cases} \nu_{\min} & \text{при } \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} \geq 0, \\ \nu_{\max} & \text{при } \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} < 0, \end{cases} \quad (9.4.12)$$



$$\nu_{\max} \gg \nu_{\min}.$$

Она введена для того, чтобы исключить случаи инверсии потенциальной плотности по вертикали и обеспечить всюду в области выполнение условия

$$\frac{\partial \rho_{\text{pot}}}{\partial \sigma} \geq 0. \quad (9.4.13)$$

При решении задачи вариационной инициализации мы будем использовать расщепление сложной исходной системы уравнений на ряд подсистем более простой структуры. Расщепление будем производить как по физическим процессам, так и по отдельным координатам. Основным условием, которое необходимо выполнить при представлении исходной системы в виде суммы расщепленных подсистем, является выполнение свойства неотрицательности оператора каждой подсистемы. Другими словами, это означает, что если для исходной сложной системы уравнений выполняется, при некоторых предположениях, закон сохранения полной энергии, то этот же закон должен выполняться для каждой подсистемы.

Известно, что сформулированную систему уравнений (9.4.2)–(9.4.8) можно переписать в нескольких эквивалентных формах. Например, в адвективной форме, в дивергентной форме и в полудивергентной, или симметризованной, форме. Именно последняя форма удобна при расщеплении системы по отдельным пространственным координатам.

**Симметризованная форма модельной системы уравнений.** Переписывая уравнения (9.4.2)–(9.4.11) в симметризованной форме, имеем

$$\begin{aligned} & H \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y u) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x u) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega u) + \omega \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] - \\ & - H (l + \xi) v = - \frac{H}{\rho_0 r_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) + \\ & + \frac{g H}{2 \rho_0 r_x} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \Lambda_u u, \end{aligned} \quad (9.4.14)$$

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y v) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x v) + \right. \\
\left. + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega v) + \omega \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] + \\
+ H (l + \xi) u = - \frac{H}{\rho_0 r_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) + \\
+ \frac{g H}{2 \rho_0 r_y} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \Lambda_u v,
\end{aligned} \tag{9.4.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) = \frac{g}{2} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - Z \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right), \\
\end{aligned} \tag{9.4.16}$$

$$- \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H r_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (H r_x v) \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0, \tag{9.4.17}$$

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y T) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \\
\left. + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x T) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = \Lambda T,
\end{aligned} \tag{9.4.18}$$

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y S) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x S) + \right. \\
\left. + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] = \Lambda S,
\end{aligned} \tag{9.4.19}$$

$$\rho = \rho(T, S, Z). \tag{9.4.20}$$

Отметим, что здесь и далее оператор турбулентного обмена моментом  $\Lambda_u$  в (9.4.14), (9.4.15) выбран в простом виде: все смешанные производные по координатам  $x, \sigma$  и  $y, \sigma$  опущены. В (9.4.14)–(9.4.20) принято приближение  $H \gg \zeta$ , уравнения рассматриваются в 3-мерной области  $\Omega$  с единичной высотой.

Граничные и начальные условия в новых переменных для системы уравнений (9.4.14)–(9.4.20) имеют вид

на свободной поверхности океана  $\sigma = 0$ :

$$\frac{\nu_u}{Z_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad \frac{\nu_u}{Z_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad \omega = 0, \quad p = p_{atm}, \quad (9.4.21)$$

$$(D_T T, n) = -Q_T, \quad (D_S S, n) = -Q_S,$$

на дне  $\sigma = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\nu_u}{Z_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= R_u, \quad \frac{\nu_u}{Z_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = R_v, \quad \omega = 0, \\ \frac{\mu_T}{r_x \cdot r_x} \left( -\frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial Z / \partial \sigma} &+ \\ + \frac{\mu_T}{r_y \cdot r_y} \left( -\frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial Z / \partial \sigma} + \frac{\nu_T}{Z_\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (9.4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_S}{r_x \cdot r_x} \left( -\frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial Z / \partial \sigma} &+ \\ + \frac{\mu_S}{r_y \cdot r_y} \left( -\frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial Z}{\partial Z / \partial \sigma} + \frac{\nu_S}{Z_\sigma} \frac{\partial S}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned}$$

на береговой поверхности  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, n_\Sigma) &= 0, \quad \mu_u (\nabla_u u, n_\Sigma) = 0, \quad \mu_u (\nabla_u v, n_\Sigma) = 0, \\ \mu_T (\nabla_T T, n_\Sigma) &= 0, \quad \mu_S (\nabla_S S, n_\Sigma) = 0. \end{aligned} \quad (9.4.23)$$

Здесь  $\nabla_u = \left( \frac{1}{r_x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{r_y} \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n_\Sigma = \left( \cos(n_\Sigma, \vec{i}_1), \cos(n_\Sigma, \vec{i}_2) \right)$ ,  $\vec{u} = (u, v)$ ,

$$\nabla_{T,S} = \left( \frac{1}{r_x} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right), \frac{1}{r_y} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right).$$

Начальные условия для задачи (9.4.14)–(9.4.23) имеют вид:  
при  $t = 0$

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad \zeta = \zeta^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0. \quad (9.4.24)$$

В модели используются специальные параметризации подсеточных процессов [252]. Основными являются: параметризация вертикальной

турбулентной вязкости, глубокой конвекции и бокового турбулентного обмена, который описывается дифференциальными операторами 2-го и 4-го порядка. К модели общей циркуляции океана (9.4.14)–(9.4.24) присоединена модель термодинамики морского льда [177].

**Численный алгоритм решения прямой задачи. Основные этапы многокомпонентного расщепления.** Решение системы уравнений (9.4.14)–(9.4.24) производится с помощью метода многокомпонентного расщепления [241, 252]. На отдельном этапе расщепления решается более простая система уравнений по сравнению с исходной системой. Вычисленное на текущем этапе решение используется как начальное условие при решении последующего этапа. Численная процедура решения системы на каждом временном интервале  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  описана в [294]. Она включает следующие модули.

1. Модуль переноса-диффузии полей температуры и солёности:

$$H \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y T) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x T) \frac{H v}{r_y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = \Lambda T, \quad (9.4.25)$$

$$H \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y S) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial S}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x S) \frac{H v}{r_y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] = \Lambda S.$$

Решение уравнений для температуры и солёности (9.4.25) на каждом интервале по времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  проводится методом расщепления 3-мерных операторов переноса-диффузии по отдельным пространственным координатам  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ . При решении пространственно-одномерных уравнений используются неявные схемы по времени.

2. Модуль переноса-диффузии момента:

$$H \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y u) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x u) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega u) + \omega \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] = \Lambda_u u, \quad (9.4.26)$$

$$H \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u r_y v) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \right.$$

$$+ \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x v) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega v) + \omega \frac{\partial v}{\partial \sigma} \Big] = \Lambda_u v.$$

Как и для уравнений температуры и солёности, уравнения (9.4.26) расщепляются по отдельным координатам  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$  и решаются с помощью неявных схем.

3. Модуль адаптации течений к полю плотности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - l v &= \frac{g}{2 r_x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{g}{2 \rho_0 r_x} \left[ \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\sigma \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial \sigma_1} - Z \frac{\partial \rho}{\partial \sigma_1} \right) d\sigma_1 \right] - \frac{1}{\rho_0 r_x} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l u &= \frac{g}{2 r_y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{g}{2 \rho_0 r_y} \left[ \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\sigma \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial \sigma_1} - Z \frac{\partial \rho}{\partial \sigma_1} \right) d\sigma_1 \right] - \frac{1}{\rho_0 r_y} \frac{\partial p_{atm}}{\partial y}, \\ - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} &\left[ \frac{\partial}{\partial x} (H r_y \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (H r_x \bar{v}) \right] = 0, \\ \bar{u} &= \int_0^1 u d\sigma, \quad \bar{v} = \int_0^1 v d\sigma, \\ \omega &= \frac{1}{r_x r_y} \int_\sigma^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [H r_y (u - \bar{u})] + \frac{\partial}{\partial y} [H r_x (v - \bar{v})] \right\} d\sigma_1. \end{aligned} \tag{9.4.27}$$

Решение уравнений адаптации (9.4.27) осуществляется при известном поле плотности, рассчитанном на предыдущем этапе. Искомые функции здесь являются компоненты вектора скорости и уровень моря. Уровень моря есть функция, независимая от вертикальной координаты. Это позволяет внутри этапа адаптации выделить задачу баротропной динамики, формулируемой в терминах  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\zeta$  [291]. Уравнения баротропной динамики аппроксимируются неявно на сетке В. И. Лебедева [67] и решаются с помощью прямого алгоритма.

**Инициализация гидрофизических полей.** При решении прогностических задач термохалинной динамики океана требуется задание начального условия для горизонтальных компонент скорости, уровня моря, температуры и солености. Таких данных наблюдений для всех прогностических функций в один момент времени в 3-мерной акватории Мирового океана нет. Возникает задача построения начальных полей в океане на основе комбинации измерений и модельных расчетов. Для решения этой задачи используем метод вариационной ассимиляции данных наблюдений [179, 253, 254, 292].

Задача состоит в следующем. На основе комбинации расчетных модельных полей и данных наблюдений температуры и солености построить динамически согласованные гидрофизические поля на заданном интервале по времени в Мировом океане. В качестве наблюдений можно использовать среднемесячные климатические характеристики полей температуры и солености [223], заданные в каждой точке области, а также данные буев Арго.

Основу системы 4-мерной вариационной ассимиляции данных будет составлять модуль переноса-диффузии полей температуры и солености, линеаризованный на расчетной модельной траектории (компоненты вектора скорости – известные функции). Сформулируем математическую постановку вариационной задачи.

Найти минимум функционала  $J$

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2 \cdot mes(\Omega)} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{(t_1 - t_0)} \times \right. \\
 & \times \int_{t_0}^{t_1} \left[ \alpha_T (T - \hat{T})^2 + \alpha_S (S - \hat{S})^2 \right] dt + \\
 & + \left. \left[ \alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0)^2 + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0)^2 \right] \right\} d\Omega + \\
 & + \frac{1}{2 \cdot mes(\Omega_0) (t_1 - t_0)} \times \\
 & \times \int_{\Omega_0} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \beta_T (Q_T - \hat{Q}_T)^2 + \beta_S (Q_S - \hat{Q}_S)^2 \right] dt d\Omega_0,
 \end{aligned} \tag{9.4.28}$$

на множестве решений следующей системы уравнений:

$$\rho - \rho_{pot}(T, S) = 0, \tag{9.4.29}$$

$$\nu - \nu \left( \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (9.4.30)$$

$$\begin{aligned} H \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + N_{x,y} T &= \\ &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} T, \end{aligned} \quad (9.4.31)$$

$$\begin{aligned} H \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] + N_{x,y} S &= \\ &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial S}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} S, \quad 0 < \sigma < 1, \end{aligned} \quad (9.4.32)$$

$$\frac{\nu}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = -Q_T^0, \quad \frac{\nu}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = -Q_S^0 \text{ при } \sigma = 0, \quad (9.4.33)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_T}{r_x \cdot r_x} (Z_x T_\sigma - Z_\sigma T_x) Z_x + \\ &+ \frac{\mu_T}{r_y \cdot r_y} (Z_y T_\sigma - Z_\sigma T_y) Z_y + \nu \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0, \\ &\frac{\mu_S}{r_x \cdot r_x} (Z_x S_\sigma - Z_\sigma S_x) Z_x + \\ &+ \frac{\mu_S}{r_y \cdot r_y} (Z_y S_\sigma - Z_\sigma S_y) Z_y + \nu \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 1, \end{aligned} \quad (9.4.34)$$

$$\begin{aligned} N_{x,y} a &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (H u_{y,a}) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial a}{\partial x} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H v r_x a) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial a}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\Lambda_{x,y,\sigma} = \Lambda_{x,x} + \Lambda_{y,y} + \Lambda_{x,\sigma} + \Lambda_{y,\sigma}.$$

Здесь  $N_{x,y}$ ,  $\Lambda_{x,y,\sigma}$  – операторы, описывающие горизонтальную адвекцию и боковой турбулентный обмен;  $\hat{T}$ ,  $\hat{S}$  – данные наблюдений;  $\alpha_T$ ,  $\alpha_S$ ,  $\alpha_T^0$ ,  $\alpha_S^0$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_S$  – заданные весовые функции;  $\nu_T = \nu_S \equiv \nu$ . Два

последних слагаемых в (9.4.28) при ненулевых коэффициентах  $\alpha_T^0$ ,  $\alpha_S^0$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_S$  отражают регуляризацию по Тихонову [156]. Уравнения (9.4.29)–(9.4.34) рассматриваются в 3-мерной цилиндрической области  $\Omega(x, y, \sigma)$  с основанием  $\Omega_0(x, y)$ , на интервале усвоения  $(t_0, t_1)$  при произвольных начальных полях температуры и солености  $T^0$ ,  $S^0$  и потоках на поверхности  $Q_T$ ,  $Q_S$ .

Решение вариационной задачи рассмотренным ранее образом с учетом (9.4.26) сводится к решению системы оптимальности. Система оптимальности включает уравнения прямой модели (9.4.29)–(9.4.34) и систему сопряженных уравнений. Система сопряженных уравнений и граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} -H \frac{\partial S^*}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S^*) + \omega \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_S (S - \hat{S}) - \\ - N_{x,y} S^* = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} S^* + \frac{\partial \rho}{\partial S} \cdot \rho^*, \end{aligned} \quad (9.4.35)$$

$$\begin{aligned} -H \frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T^*) + \omega \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_T (T - \hat{T}) - \\ - N_{x,y} T^* = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} T^* + \frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \rho^*, \end{aligned} \quad (9.4.36)$$

$$\nu^* - \frac{1}{H} \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial S}{\partial \sigma} \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (9.4.37)$$

$$\rho^* - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\nu' \cdot \nu^*) = 0, \quad (9.4.38)$$

$$\nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0, \quad -T^* + \beta_T (Q_T - \hat{Q}_T) = 0, \quad (9.4.39)$$

$$\nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} = 0, \quad -S^* + \beta_S (Q_S - \hat{Q}_S) = 0 \text{ при } \sigma = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_T}{r_x \cdot r_x} (Z_x T_\sigma^* - Z_\sigma T_x^*) Z_x + \\ + \frac{\mu_T}{r_y \cdot r_y} (Z_y T_\sigma^* - Z_\sigma T_y^*) Z_y + \nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{\mu_S}{r_x \cdot r_x} (Z_x S_\sigma^* - Z_\sigma S_x^*) Z_x + \\ & + \frac{\mu_S}{r_y \cdot r_y} (Z_y S_\sigma^* - Z_\sigma S_y^*) Z_y + \nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 1, \end{aligned} \quad (9.4.40)$$

где  $\nu'$  – производная по аргументу.

Краевые условия по времени для уравнений (9.4.29)–(9.4.40) будут

$$\begin{aligned} T^* &= S^* = 0 \text{ при } t = t_1, \\ -H T^* + \alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0) &= 0, \\ -H S^* + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0) &= 0 \text{ при } t = t_0. \end{aligned} \quad (9.4.41)$$

Решение задачи вариационной ассимиляции заключается в нахождении  $T$ ,  $S$ ,  $T^0$ ,  $S^0$ ,  $Q_T$ ,  $Q_S$ , при которых выполняются уравнения оптимальности (9.4.29)–(9.4.41) и достигается минимум функционала (9.4.28). Численное решение прямых и сопряженных уравнений оптимальности проводится на основе метода покоординатного расщепления и абсолютно устойчивых неявных схем по времени. Метод расщепления дает возможность, по сравнению с явными схемами, использовать больший шаг по времени. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению размерности вариационной задачи и чувствительности ее решения к погрешностям входной информации [25]. В качестве итерационного процесса используется метод, изложенный в [206].

Отметим, что система (9.4.29)–(9.4.34) в общем случае нелинейная. Она включает нелинейные уравнения для потенциальной плотности и коэффициента вертикального турбулентного обмена (9.4.29), (9.4.30). Из-за нелинейности появляются соответствующие им сопряженные уравнения (9.4.37), (9.4.38), а также дополнительные слагаемые в правых частях уравнений (9.4.35), (9.4.36). В том случае, если коэффициент вертикального турбулентного обмена  $\nu(x, y, \sigma, t)$  задан, то система оптимальности сводится к линейной. Из нее исключаются уравнения (9.4.29), (9.4.30), (9.4.37), (9.4.38) и последние слагаемые в (9.4.35), (9.4.36).

Численные эксперименты по решению задач вариационной ассимиляции проводятся с помощью разработанной в ИВМ РАН модели гидродинамики Мирового океана, основанной на уравнениях (9.4.14)–(9.4.24). Уравнения модели формулируются на сфере со сдвинутым на

материк северным координатным полюсом. Вводятся новые криволинейные ортогональные координаты «долгота» и «широта». Положение нового северного полюса соответствует точке ( $60^\circ$  в. д.,  $60,5^\circ$  с. ш.) в географической системе координат. На поверхности океана задается климатическое атмосферное воздействие. Оно рассчитывается по данным нормализованного года CORE, предназначенным для экспериментов с моделями океана [210].

Разрешение модели по «долготе», «широте» и число вертикальных  $\sigma$ -уровней составляют  $2,5^\circ \times 2^\circ \times 33$ . Шаг по времени – 6 часов, он выбирается в соответствии с дискретностью атмосферного воздействия. Коэффициент горизонтальной вязкости  $\mu_u = 5.e + 04$  см<sup>2</sup>/с; коэффициент горизонтальной вязкости 4-го порядка  $1.e + 22$  см<sup>4</sup>/с; коэффициент горизонтальной диффузии  $\mu_T = 1.e + 07$  см<sup>2</sup>/с; коэффициент вертикальной вязкости  $\nu_u = 10$  см<sup>2</sup>/с; коэффициенты вертикальной диффузии  $\nu_{\min} = 1$  см<sup>2</sup>/с,  $\nu_{\max} = 1.e + 03$  см<sup>2</sup>/с. В некоторых случаях на этапе адаптации полей течений и плотности используется  $\varepsilon$ -регуляризация: при расчете средних по вертикали компонент скорости  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  в правую часть уравнений вводятся слагаемые  $-R_b \bar{u}$ ,  $-R_b \bar{v}$ ,  $R_b = \varepsilon \ll 1$  [255, 274].

#### 9.4.2. Решение тестовой задачи 4-мерной вариационной ассимиляции полей температуры и солёности с восстановлением начальных условий и потоков.

Рассматривается задача 4-мерной вариационной ассимиляции полей температуры и солёности с восстановлением начальных условий  $T^0$ ,  $S^0$  и потоков на поверхности океана  $Q_T$ ,  $Q_S$ . В качестве прямой модели используются уравнения (9.4.14)–(9.4.24), в качестве системы оптимальности 3-мерные уравнения (9.4.29)–(9.4.41). В качестве модельной траектории – точного решения задачи выбирается равновесное решение, полученное интегрированием прямой модели на 3000 лет [294]. Коэффициент  $\varepsilon$ -регуляризации  $R_b$  равен нулю.

Вариант 1. «Идентичные» близнецы (см. табл. 9.1). Ассимилируемые данные  $\hat{T}$ ,  $\hat{S}$ , а также  $\hat{T}^0$ ,  $\hat{S}^0$ ,  $\hat{Q}_T$ ,  $\hat{Q}_S$  генерируются прямой моделью, начиная с равновесного решения  $T_{3000}$ ,  $S_{3000}$ , и задаются во всей области Мирового океана (МО). Интервал ассимиляции составляет 1–5 января, затем расчет на 1 год. Оптимальное решение сравнивается с точным  $T_{3001}$ ,  $S_{3001}$  – контрольным расчетом по прямой модели на 1 год (3001-й). Первые приближения начальных условий  $T_{1-st\ guess}^0$ ,  $S_{1-st\ guess}^0$  – возмущенные:  $T_{1-st\ guess}^0 = T_{3000} + 2$ ,  $S_{1-st\ guess}^0 = S_{3000} + 0.5$ .

Коэффициенты регуляризации  $\alpha_T^0$ ,  $\alpha_S^0$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_S$  в (9.4.28) равны нулю. Оптимизируются начальные условия, потоки тепла и соли. Система оптимальности (9.4.31)–(9.4.36), (9.4.39)–(9.4.41) линейная, компоненты скорости и коэффициенты вертикального турбулентного обмена на интервале ассимиляции заданы. При прогностическом расчете прямой модели на 1 год, после оптимизации, начальные условия для течений и уровня – нулевые.

**Таблица 9.1. Тестовый эксперимент**

Вариант и оптимальная задача	1-е пригл. $T_{1-st\ guess}^0$ , $S_{1-st\ guess}^0$	Область задания данных	$J$ на первой и последней итерации	Коеф. регул.	Примечание
0. Контрольный расчет, прямая модель					Расчет без оптимизации
1. 4Dvar, линейная	$T_{1-st\ guess}^0 = T_{3000} + 2$ ; $S_{1-st\ guess}^0 = S_{3000} + 0,5$	МО	$J(1) = 1,07$ $J(49) = 2,49e-04$	0.	Оптимизация $T^0$ , $S^0$ , $Q_T$ , $Q_S$ ; $\nu$ задано
2. 4Dvar, нелинейная по $\nu$	$T_{1-st\ guess}^0 = T_{3000} + 2$ ; $S_{1-st\ guess}^0 = S_{3000} + 0,5$	МО	$J(1) = 1,06$ $J(79) = 4,56e-04$	0	Оптимизация $T^0$ , $S^0$ , $Q_T$ , $Q_S$
3. 3Dvar, линейная	$T_{1-st\ guess}^0 = T_{3000} + 2$ ; $S_{1-st\ guess}^0 = S_{3000} + 0,5$	МО	$J(1) = 1,07$ $J(45) = 2,32e-04$	0	Оптимизация $T^0$ , $S^0$ , $Q_T$ , $Q_S$ ; $\nu$ задано; $u = v = w = 0$
4. 4DVar, нелинейная по $\nu$	$T_{1-st\ guess}^0 = 4,65$ ; $S_{1-st\ guess}^0 = 34,93$	МО	$J(1) = 23,02$ $J(81) = 4,95e-04$	0	Оптимизация $T^0$ , $S^0$ , $Q_T$ , $Q_S$

Вариант 2. В отличие от варианта 1 делается пересчет коэффициента вертикального турбулентного обмена  $\nu$ . Таким образом, в данном случае система оптимальности (9.4.29)–(9.4.41) нелинейная.

Вариант 3. В отличие от варианта 1: при решении оптимальной задачи компоненты скорости – нулевые; при расчете прямой модели, после оптимизации, начальные условия для течений и уровня – нулевые. Для температуры и солёности начальные условия – результат решения линейной системы оптимальности (9.4.31)–(9.4.36), (9.4.39)–(9.4.41) с нулевыми скоростями (уравнения диффузии). Этот вариант близок к методу 3-мерной ассимиляции.

Вариант 4. В отличие от варианта 1 первые приближения  $T_{1-st\ guess}^0$ ,  $S_{1-st\ guess}^0$  при решении задачи оптимизации – константы, система оптимальности (9.4.29)–(9.4.41) нелинейная. В качестве  $T_{1-st\ guess}^0$ ,  $S_{1-st\ guess}^0$  выбраны средние по Мировому океану равновесные значения температуры и солёности.

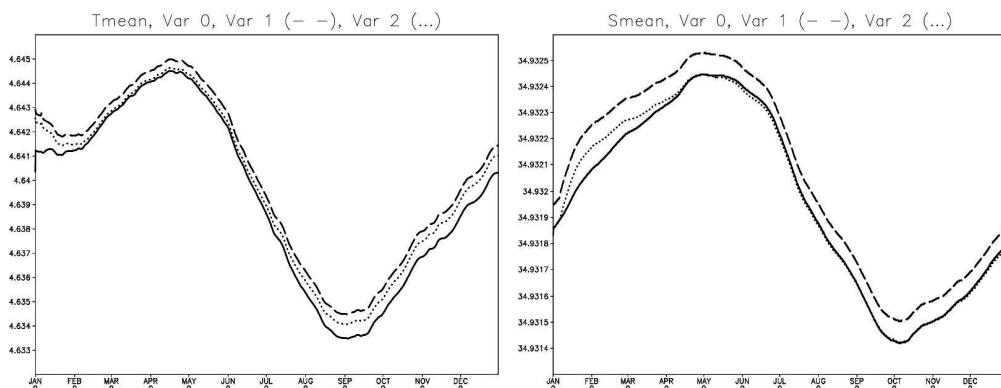


Рис. 9.1. Тестовый эксперимент. Средние по Мировому океану температура (а) и солёность (б). Контрольный расчет (сплошная линия), вариант 1 (штриховая), вариант 2 (пунктир). По оси абсцисс – время (в мес.), расчет на 1 год

Суммируя результаты тестовых расчетов, можно отметить высокую устойчивость вычислений и точность восстановления начальных полей и потоков температуры и солёности. В результате решения системы оптимальности минимизируемый функционал уменьшается на 3–4 порядка от исходного возмущенного значения. Поведение средних по объему значений температуры и солёности показывает, что потеря информации о начальных полях покрывается процедурой вариационной

ассимиляции температуры и солёности достаточно успешно. Для температуры точность восстановления годового хода порядка тысячной, для солёности несколько выше (рис. 9.1).

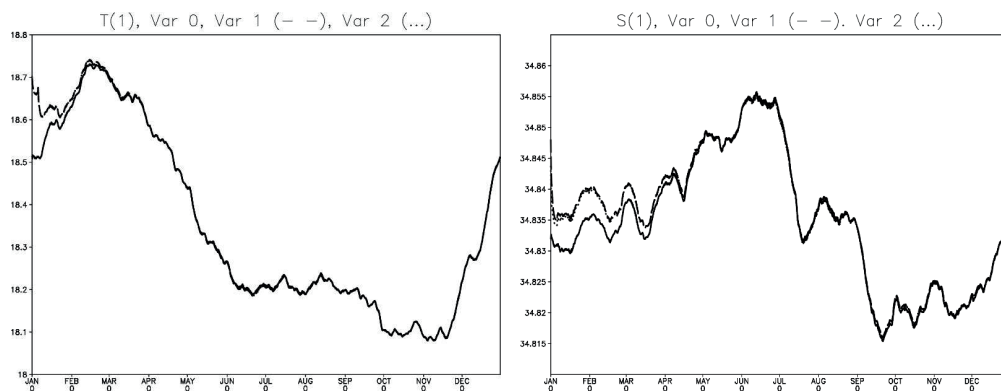


Рис. 9.2. Тестовый эксперимент. Средние на 1-м - уровне температура (а) и солёность (б). Контрольный расчет (сплошная линия), вариант 1 (штриховая), вариант 2 (пунктир). По оси абсцисс - время (в мес.), расчет на 1 год

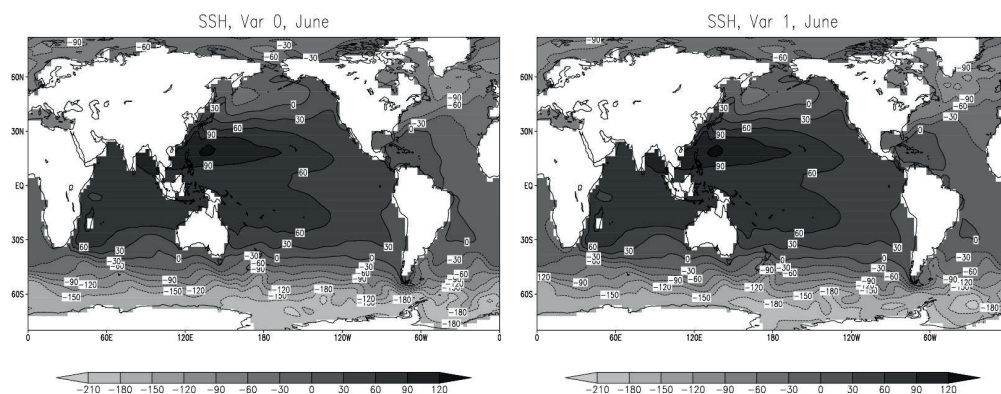


Рис. 9.3. Тестовый эксперимент. Уровень океана, июнь: контрольный расчет (а), вариант 1 (б). Здесь и далее результаты приведены в проекции на географическую сетку

Поведение средних по первому расчетному  $\sigma$ -уровню значений температуры и солёности показывает, что период адаптации характеристик верхнего слоя к возмущению начальных условий составляет для температуры примерно 1,5 месяца, а для солёности – 3,5 (рис. 9.2). Хотя качество восстановления гидрофизических полей достаточно высокое, следует отметить, что точность их восстановления

заметно уменьшается в высоких широтах Северного и Южного полушарий. Этот эффект хорошо проявляется при сравнении уровня океана в контрольном расчете и варианте 1 (рис. 9.3). В основной области точность воспроизведения уровня океана порядка 1–2 см. В Северном Ледовитом океане, однако, максимальная погрешность составляет около 10, а в Южном океане имеются локальные максимумы погрешностью несколько десятков см. Максимумы отмечаются в районах глубокой конвекции, расположенных в тихоокеанском секторе Южного океана и в Южной Атлантике, за проливом Дрейка.

#### **9.4.3. 4-мерная вариационная ассимиляция климатических полей температуры и солености Левитуса**

Проводится численный расчет термохалинной динамики Мирового океана в течение годового периода с ассимиляцией климатических данных температуры и солености [223]. На поверхности океана рассчитывается атмосферное воздействие по нормализованному году CORE [210], изменяющееся по времени с определенной дискретностью от 6 часов (ветер, давление и др.) до 1 месяца (осадки). Каждый месяц разбивается на 4-суточные интервалы  $(t_0, t_1)$ , в течение каждого из которых проводятся расчеты в режиме «инициализация – прогноз». Расчеты проводятся в три шага.

1. На каждом интервале  $(t_0, t_1)$  решается прямая задача (9.4.14)–(9.4.24) с текущими (невозмущенными) начальными условиями  $u^0, v^0, \zeta^0, T^0, S^0$  и внешним воздействием по данным CORE [210]. Вычисляются и запоминаются компоненты вектора скорости и коэффициенты вертикального турбулентного обмена теплом и солью  $u(x, y, \sigma, t)$ ,  $v(x, y, \sigma, t)$ ,  $w(x, y, \sigma, t)$ ,  $\nu_T = \nu_S \equiv \nu(x, y, \sigma, t)$ .

2. На 2-м шаге на интервале  $[t_0, t_1]$  решается задача 4-мерной вариационной ассимиляции полей температуры и солености (9.4.31)–(9.4.36) с соответствующими граничными условиями и найденными на 1-м шаге коэффициентами  $u(x, y, \sigma, t)$ ,  $v(x, y, \sigma, t)$ ,  $w(x, y, \sigma, t)$ ,  $\nu(x, y, \sigma, t)$ . Коэффициент  $\nu(x, y, \sigma, t)$  задан, система оптимальности – линейная (9.4.31)–(9.4.36), (9.4.39)–(9.4.41). В качестве ассимилируемых наблюдений  $\hat{T}, \hat{S}$  используются данные Левитуса; в качестве  $\hat{T}^0(x, y, \sigma, t_0)$ ,  $\hat{S}^0(x, y, \sigma, t_0)$  – модельные поля; потоки  $\hat{Q}_T(x, y, t)$ ,  $\hat{Q}_S(x, y, t)$ ,  $t \in (t_0, t_1)$  рассчитываются по нормализованному году CORE [210]. Вычисляются новые начальные поля в момент времени  $t = t_0$ :  $T_{opti}^0(x, y, \sigma)$ ,  $S_{opti}^0(x, y, \sigma)$  и новые потоки  $Q_{T,opti}(x, y, t)$ ,  $Q_{S,opti}(x, y, t)$  при  $t \in (t_0, t_1)$ .

3. На 3-м шаге на этом же временном интервале  $(t_0, t_1)$  пересчитывается прямая задача с начальными условиями  $u^0, v^0, \zeta^0, T_{opti}^0, S_{opti}^0$  и с новыми потоками  $Q_{T,opti}, Q_{S,opti}$ , вычисленными на 2-м шаге. Решение задачи, полученное на 3-м шаге  $u(x, y, \sigma, t), v(x, y, \sigma, t), \zeta(x, y, t), T(x, y, \sigma, t), S(x, y, \sigma, t)$ , на интервале  $t \in (t_0, t_1)$ , и является искомым численным решением задачи (9.4.14)–(9.4.24) с 4-мерной ассимиляцией данных наблюдений.

На каждом последующем интервале по времени описанная 3-шаговая процедура повторяется. В качестве невозмущенных начальных условий  $u^0, v^0, \zeta^0, T^0, S^0$  на новом временном интервале используется решение, полученное при  $t = t_1$  на предыдущем интервале. Коэффициенты регуляризации в (9.4.28)  $\alpha_T^0 = \alpha_S^0 = 0.6, \beta_T = \beta_S = 0$ , коэффициент  $\varepsilon$ -регуляризации  $R_b = 10^{-6} \text{ (sec}^{-1}\text{)}$ .

Численный эксперимент начинается с 1-го января и продолжается в течение одного года. Начальные условия для температуры и солености – климатические среднеянварские [223], компоненты скорости и отклонение уровня равны нулю. На первом интервале расчета 1–5 января ассимиляция не производится. Процедура 4-мерной вариационной ассимиляции с пересчетом начальных полей температуры и солености включается начиная с интервала 6–9 января.

Численный расчет показывает, что после пяти суток расчета (с 1-го по 5-е января) значение среднеквадратического отклонения модельных полей от наблюдаемых равно  $\sim 0,025$ . В результате решения вариационной задачи на следующем расчетном интервале (6–9 января) функционал ошибки уменьшается, примерно, в 5 раз до величины 0,005. Далее на всех остальных интервалах расчета до конца года наблюдается аналогичное изменение функционала ошибки: увеличение примерно в 5 раз на прогностическом этапе и подобное уменьшение в результате вариационной ассимиляции.

В эксперименте с ассимиляцией данных Левитуса рассчитывается сезонный ход течений, уровня моря, температуры и солености с временной дискретностью 6 часов. Пространственно-временная структура модельных полей формируется под влиянием физических особенностей модели и данных натурных наблюдений. Задача состоит в том, чтобы модель и данные дополняли друг друга и приближали характеристики численного решения к наблюдаемым.



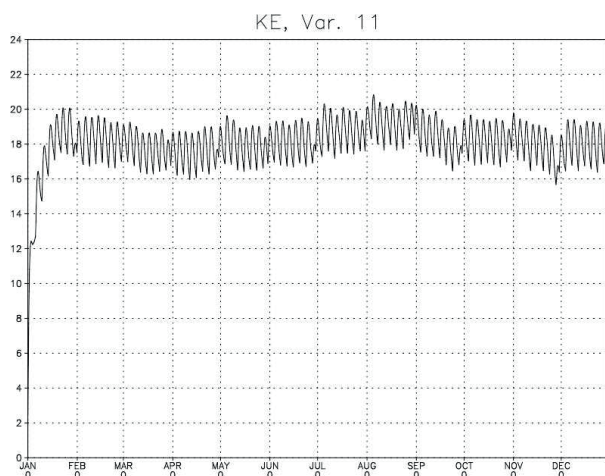


Рис. 9.4. Ассимиляция климатических данных. Средняя по объему Мирового океана кинетическая энергия. По оси абсцисс – время (в мес.), расчет на 1 год

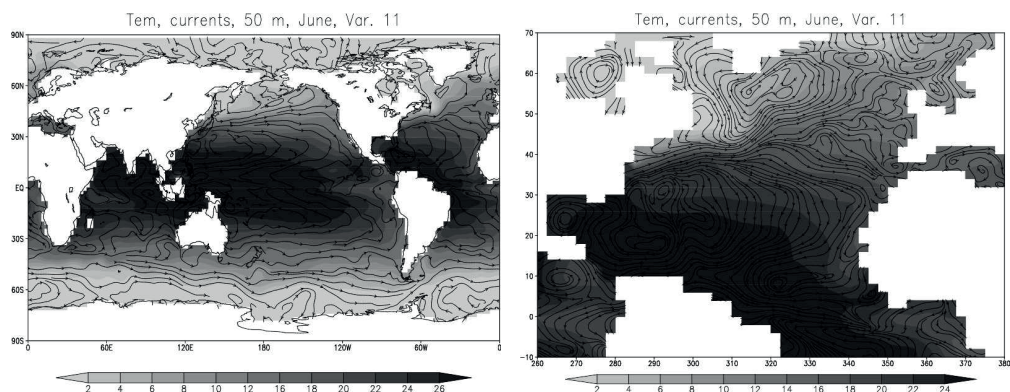


Рис. 9.5. Ассимиляция климатических данных. Мировой океан (а) и Северная Атлантика (б). Температура и течения на глубине 50 м, июнь

При анализе результатов численных экспериментов особое внимание уделяют поведению составляющих энергетического обмена. Интенсивность обмена энергией между осредненными по вертикали (баротропными) и бароклинными течениями являются информативными характеристиками динамической активности модельной динамики. При повышении пространственного разрешения численной модели происходит увеличение уровня динамической активности. Это является отражением способности высокоразрешающей модели воспроиз-



водить фронтальные зоны, струйные течения и мезомасштабные особенности океанской динамики. Подобный эффект наблюдается и при ассимиляции данных натурных наблюдений. В процессе ассимиляции реальных данных градиентная структура полей температуры, солености, плотности генерирует динамическую активность модельных полей течений и уровня моря. Наши расчеты показывают, что ассимиляция климатических данных температуры и солености приводит к заметному увеличению кинетической энергии и при невысоком пространственном разрешении (рис. 9.4). Средняя по объему Мирового океана кинетическая энергия

$$KE = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{u^2 + v^2}{2} d\Omega$$

в течение первого расчетного месяца достигает максимального значения  $\sim 20 \text{ см}^2/\text{с}^2$ . Далее ее величина изменяется в пределах  $16\text{--}20 \text{ см}^2/\text{с}^2$  в течение всего годового периода.

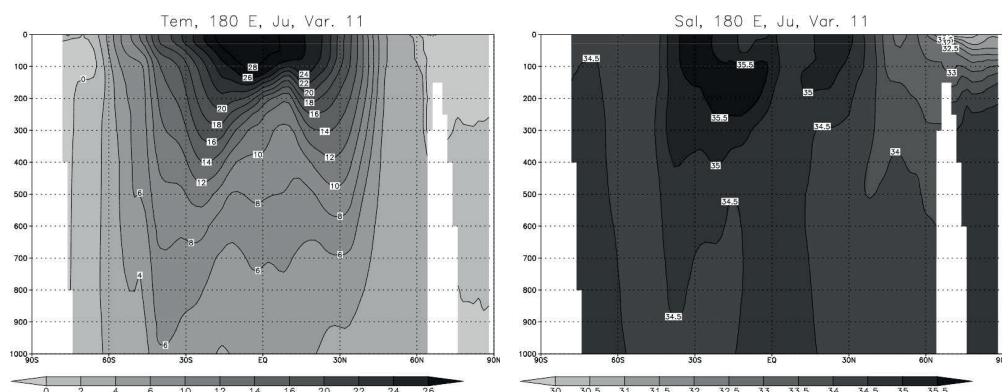


Рис. 9.6. Ассимиляция климатических данных. Температура (а) и соленость (б), разрез вдоль модельной долготы  $180^\circ$ , Тихий океан, июнь

Расчетные поля течений и уровень моря динамически согласованы с полями температуры и солености. Они соответствуют современным представлениям об их реальных крупномасштабных особенностях (рис. 9.5). Динамические характеристики формируются в процессе адаптации полей течений и плотности, которые в свою очередь зависят от ассимилируемых данных наблюдений температуры и солености. Расчетные поля температуры и солености, являясь комбина-

цией модельных данных и данных измерений, адекватно описывают наблюдаемую крупномасштабную структуру (рис. 9.5, 9.6).

#### **9.4.4. 4-мерная вариационная ассимиляция климатических полей температуры и солёности и данных буев Арго**

Эксперимент посвящен ассимиляции климатических полей температуры и солёности Левитуса [223] и данных буев Арго за 2008 г. Алгоритм интерполяции данных буев Арго описан в [50, 294]. Проводится численный расчет термохалинной динамики Мирового океана в течение годового периода в режиме «ассимиляция – прогноз». Основное отличие от предыдущего эксперимента состоит в том, что в процедуре вариационной ассимиляции поочередно используются климатические данные и данные наблюдений буев Арго. Каждый месяц разбивается на 5-суточные интервалы по времени. В течение первых двух, 1–5-х и 6–10-х суток каждого месяца, ассимилируются данные буев Арго, затем проводится расчет прямой модели до середины месяца. В течение следующих двух интервалов каждого месяца, 16–20-х и 21–25-х, ассимилируются климатические данные, затем проводится расчет по прямой модели до конца месяца. При ассимиляции данных на всех 5-суточных интервалах расчеты проводятся в три шага по вышеописанной процедуре в режиме «инициализация – прогноз». В качестве начальных условий (на 1-е января) используются поля течений, уровня, температуры и солёности, полученные в результате решения предыдущего эксперимента. Коэффициенты регуляризации в (9.4.28)  $\alpha_T^0 = \alpha_S^0 = 0.5$ ,  $\beta_T = \beta_S = 0$ , коэффициент  $\varepsilon$ -регуляризации  $R_b = 10^{-6}$  (сек<sup>-1</sup>). При ассимиляции данных буев Арго в подобластях Северного Ледовитого океана и Южного океана в функционале (9.4.28) данные измерений заменяются модельными значениями. Это связано с крайне малым количеством данных наблюдений в указанных подобластях.

Данный эксперимент можно рассматривать как построение гидрофизических полей Мирового океана на основе комбинации трех типов информации: расчетных модельных полей, климатических данных и текущих наблюдений буев Арго. Каждый тип информации имеет свои особенности, положительные и отрицательные стороны. Модельные поля, как правило, полны во всей 4-мерной рассматриваемой пространственно-временной области, однако могут иметь заметные ошибки при описании реальных характеристик. Ошибки связаны с невысоким пространственным разрешением модели, погрешностями

параметризаций подсеточных физических процессов, численными методами решения задачи и т. д. Климатические данные температуры и солёности описывают лишь среднюю структуру природных полей и имеют недостаточное разрешение во времени. Данные буев Арго содержат измерения температуры и солёности высокой точности, однако нерегулярны и ограничены в пространстве. Кроме того, оба типа данных наблюдений содержат информацию лишь о полях температуры и солёности, в то время как численная модель рассчитывает и динамические характеристики: скорости течений и уровень моря. Как и ранее, ставится задача расчета динамически согласованных полей Мирового океана на основе компиляции данных наблюдений и численного эксперимента.

Заключительный эксперимент направлен на решение этой задачи и имеет две особенности. В качестве математического метода используется 4-мерная вариационная ассимиляция, а в качестве данных наблюдений – два источника: климатические массивы и измерения буев Арго. В целом расчеты приводят к положительным результатам. С алгоритмической точки зрения, разработанный метод достаточно эффективен. Использование процедуры 4-мерной вариационной ассимиляции дает возможность удерживать невысокую погрешность отклонения модельных полей от данных наблюдений в течение всего годового цикла. В результате вариационной инициализации среднеквадратическое отклонение модельных полей снижается в 4–5 раз. Значение функционала ценности (9.4.28), описывающего отклонение расчетных полей от данных Левитуса, равно  $\sim 0.01$ , а от данных Арго составляет  $\sim 0.02$ .

Поведение энергетических характеристик показывает, что в модельной системе поддерживается достаточно высокий уровень баротропной и бароклинной кинетической энергии (рис. 9.7). Структура расчетных полей температуры и солёности содержит отчетливый отпечаток данных наблюдений обоих типов. Результаты расчетов с ассимиляцией климатических полей температуры и солёности, а также их комбинации с данными буев Арго показывают подобие общей структуры модельных полей и наличие некоторых особенностей (рис. 9.8–9.10). Можно отметить, например, не только близкий характер термоклина в низких широтах Тихого и Атлантического океанов, но и наличие флуктуаций при учете текущих данных буев Арго (рис. 9.8). Хорошо проявляются локальные отличия термохалинной циркуляции двух экспериментов в восточной тропической подобра-

сти Тихого океана – зоне Эль Ниньо (рис. 9.9) и в Южном океане (рис. 9.10).

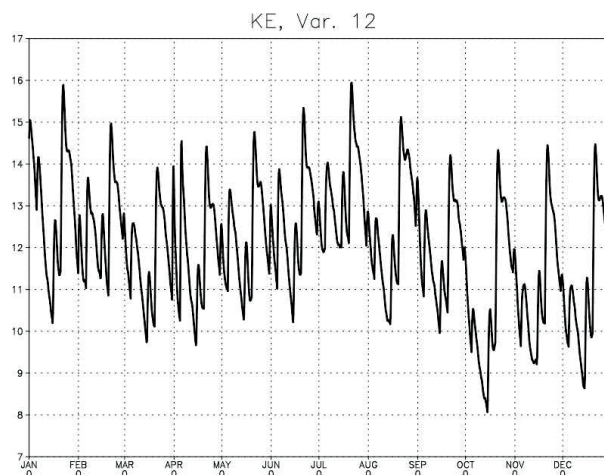


Рис. 9.7. Ассимиляция климатических данных и буев Арго. Средняя по объему Мирового океана кинетическая энергия. По оси абсцисс – время (в мес.), расчет на 1 год

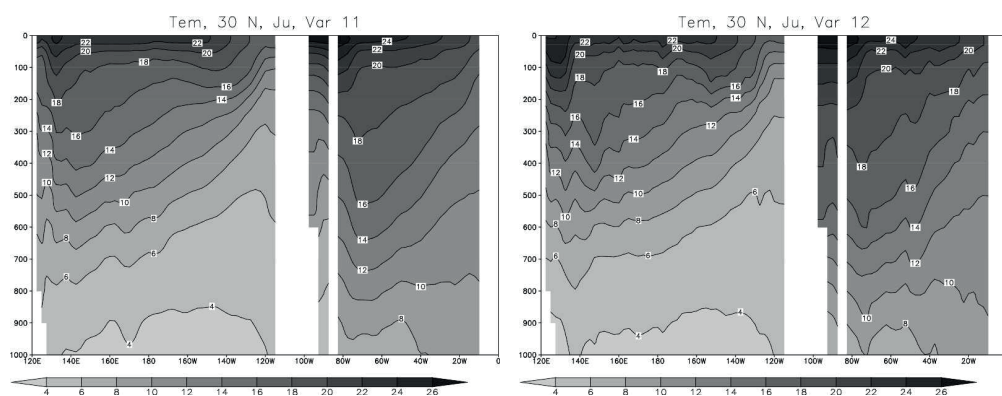


Рис. 9.8. Ассимиляция климатических данных (а), климатических данных и буев Арго (б). Температура, разрез вдоль 30° с.ш., июнь

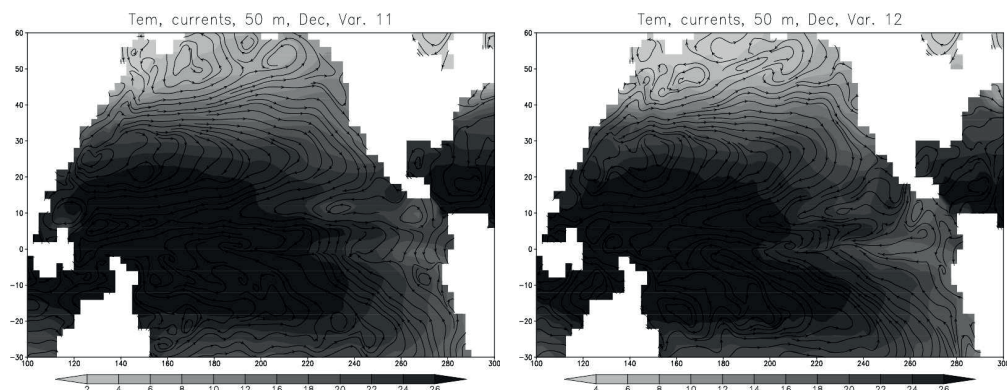


Рис. 9.9. Ассимиляция климатических данных (а), климатических данных и буев Арго (б). Тихий океан, температура и течения на глубине 50 м, декабрь

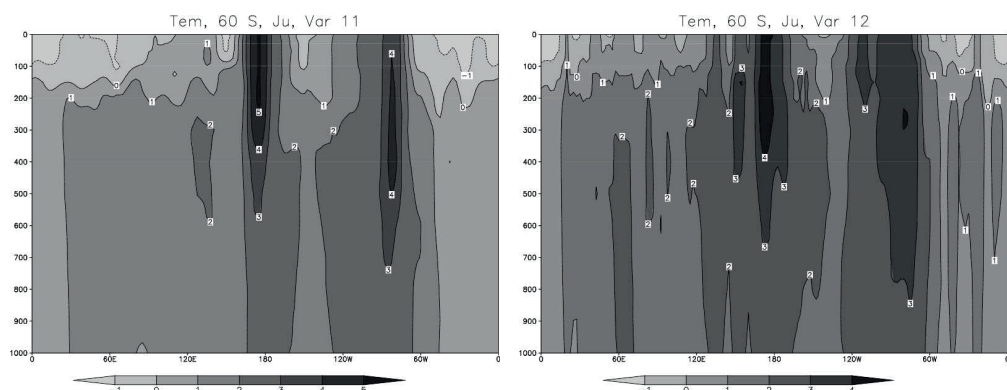


Рис. 9.10. Ассимиляция климатических данных (а), климатических данных и буев Арго (б). Температура, разрез вдоль 60° ю. ш., июнь

# **Комментарии к книге «Сопряженные уравнения и анализ сложных систем» В. И. Агошков, В. Б. Залесный, В. П. Шутяев**

Метод сопряженных уравнений интенсивно развивается в последние годы и все более активно проникает в различные области математики, математической физики и их приложений. Особое место он занимает при решении широкого класса прямых и обратных задач, описываемых сложными математическими моделями. Основная идея метода состоит в том, что при исследовании некоторой проблемы для исходной системы уравнений строится сопряженная система и поставленная проблема изучается с использованием решений сопряженной задачи. Развитие метода сопряженных уравнений в значительной степени основано на трудах Гурия Ивановича Марчука в течение его 65-летней научной деятельности. В этой книге изложена развиваемая им и его научной школой методология решения задач математической физики с помощью теории сопряженных уравнений. Методология применяется к требующим глубокого анализа сложным системам, с помощью которых изучаются проблемы глобальных изменений климата, охраны окружающей среды, атомной энергетики, иммунологии, сохранения биосферы с учетом интенсивного развития промышленности и многие другие. В рамках единого подхода формулируются новые постановки задач, стимулируемые развитием новых технологий. Становятся необходимыми совместный анализ модельных решений и данных измерений, например спутниковых; поиск

решения обратных задач – начальных и граничных условий; оценка функционалов от решения прямых и обратных задач. Объединяются в общую сложную систему проблемы локальных и глобальных возмущений и чувствительности моделей к входным данным. Все это требует комплексного изучения больших систем с применением теории сопряженных уравнений. Именно эти сложные системы и теория чувствительности в применении к их исследованию дают новый импульс развитию теории сопряженных уравнений.

Теория чувствительности на основе сопряженных уравнений может быть применена не только к ретроспективному изучению процессов, описываемых имитационными моделями, но и к исследованию самих моделей, реализуемых с помощью современных вычислительных технологий. Если к этому добавить проблему четырехмерного анализа данных наблюдений и решение обратных задач, то становится ясным большое значение сопряженных задач в современной науке.

Первоначально определенные Лагранжем сопряженные операторы нашли глубокое теоретическое обоснование и широкое применение при решении многих задач математической физики. Возможно, впервые значение теории сопряженных уравнений было оценено физиками при развитии квантовой механики. Уравнение Шредингера потребовало развития аппарата самосопряженных расширений симметрических операторов. Здесь самосопряженные уравнения становятся необходимым математическим аппаратом для формулирования теории малых возмущений в спектральных проблемах. Важный этап активного интереса к сопряженным уравнениям и теории малых возмущений относится к теории ядерных реакторов. Сложные задачи теории переноса нейтронов с замедлением их в средах потребовали формулировки сопряженных уравнений и решения основных и сопряженных уравнений для оценки первого собственного числа спектральной задачи, связанной с реализацией стационарной цепной реакции. Созданная здесь на базе основных и сопряженных уравнений реактора теория малых возмущений сыграла большую роль в развитии физики реакторов и в реализации проектов атомных электростанций.

Одной из насущных проблем в теории ядерных реакторов, изученных Г. И. Марчуком, была проблема корректной замены интегродифференциального уравнения Больцмана эффективными малогрупповыми моделями. На основе теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений Г. И. Марчук разработал методы построения таких моделей, им были получены выражения для групповых констант,



которые в определенном смысле являются оптимальными. Г. И. Марчуком и сотрудниками возглавляемого им отдела в Физико-энергетическом институте в 50-е гг. были созданы эффективные малогрупповые модели реактора в различных приближениях метода сферических гармоник. Эти модели широко использовались для серийных расчетов критических масс ядерных реакторов. Отмеченные научные результаты вошли в монографию Г. И. Марчука «Численные методы расчета ядерных реакторов», вышедшую в свет в 1958 г. и переизданную затем под названием «Методы расчета ядерных реакторов» (1961). Эти монографии вызвали большой научный интерес, а изложенные в них результаты с использованием теории сопряженных уравнений стали основополагающими для развития методов расчета ядерных реакторов в нашей стране.

В дальнейшем было дано развитие теории сопряженных задач по отношению к заданным функционалам для некоторых классов задач математической физики. Оно оказалось плодотворным и для многих других направлений науки. В результате появились общие подходы к исследованию сложных систем и математических моделей. Разработке этих подходов в различных областях математики и ее приложений посвящены многолетние исследования Г. И. Марчука и его научной школы. Они относятся к проблемам ядерной энергетики, охраны окружающей среды, теории климата и его изменений, математическим проблемам обработки информации со спутников, математическим моделям в иммунологии и др.

Вместе с развитием метода сопряженных уравнений формировался рациональный подход к решению обратных задач и к планированию математического эксперимента. Во многом благодаря работам Г. И. Марчука и его научной школы теория сопряженных уравнений стала одним из наиболее мощных математических средств изучения разнообразных физических процессов и явлений. Им выполнен ряд исследований, оказавших значительное влияние на развитие теории и алгоритмов решения сопряженных уравнений и методов возмущений. В статье Г. И. Марчука и В. В. Орлова «К теории сопряженных функций» (1961) был в общем виде сформулирован метод получения сопряженных функций (или функций ценности) для широкого класса неоднородных линейных уравнений и получены формулы теории возмущений для линейных функционалов, которые впоследствии нашли применение при исследовании сложных систем.



На основе метода сопряженных уравнений и теории возмущений Г. И. Марчуком была разработана общая постановка обратных задач, связанных с восстановлением параметров оператора исходной задачи (Марчук, 1964). С помощью формул малых возмущений Г. И. Марчук предложил алгоритм определения искомых поправок к известным коэффициентам невозмущенной задачи. В результате обратная задача была сведена к задачам линейной алгебры. Было дано развитие теории и на случай, когда невозмущенное состояние значительно отличается от реального. На основе сформулированных постановок обратных задач Г. И. Марчук предложил пути решения проблемы планирования сложного эксперимента, позволяющие среди всевозможных (практически реализуемых) наборов измерений выбрать те, которые оказываются наиболее информативными с точки зрения решения обратной задачи (Марчук, 1964–1982).

Конкретным приложением общих постановок обратных задач с использованием сопряженных уравнений была постановка задач атмосферной оптики, сформулированная в статье Г. И. Марчука «Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач» (1964). Эта статья и другие работы Г. И. Марчука по применению метода статистических испытаний (метод Монте-Карло), выполненные совместно с его учениками, стали основополагающими в атмосферной оптике и теории обратных задач в ней.

Г. И. Марчуком были выполнены важные исследования по теории и приложениям сопряженных уравнений в связи с решением актуальных задач моделирования окружающей среды и оптимизации (с экологической точки зрения) территориального размещения промышленных объектов (Марчук, 1970–1982). Основу созданной Г. И. Марчуком теории математического моделирования оптимизационных проблем в охране окружающей среды составляет разработанный им математический аппарат сопряженных задач, решения которых являются функциями влияния загрязняющей примеси на окружающую среду. На основе теории сопряженных уравнений Г. И. Марчуком в общем виде решены сложные оптимизационные проблемы размещения промышленных предприятий, при котором соблюдаются ограничительные нормы на загрязнение экологически значимых зон и учитываются последствия воздействий примесей на биосферу, проблемы оптимальных ограничений на выбросы предприятий, обеспечивающих максимум экономического эффекта. Это сделало реальной постанов-

ку задачи по составлению для крупных регионов страны программ по оптимальному в эколого-экономическом смысле размещению и функционированию промышленных предприятий. Основные результаты исследований Г. И. Марчука в этом направлении изложены в монографии «Математическое моделирование в проблеме окружающей среды» (1982).

В последние годы нелинейные задачи становятся объектом широкого фронта исследований. И, естественно, при этом возникают те или иные обобщения теории сопряженных уравнений, приспособленные для новых классов задач. Большой интерес здесь вызывают подходы, сформулированные в работах Ямамура (1979), Вайнберг (1968), Маслов (1984), Владимиров, Волович (1984), Марчука, Агошков (1988), Треногин (1966). Впоследствии были предложены и исследованы новые подходы к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах математической физики на основе применения групп преобразований, законов сохранения, общих теорем вариационного исчисления (Марчук, Агошков, Шутяев, 1993; Владимиров, Марчук, 2000; Дымников, 2001).

Особое место в развитии методов теории сопряженных уравнений занимают работы Г. И. Марчука и его учеников в области динамики атмосферы и океана, теории климата. В данной области им создано новое направление исследований, связанное с решением широкого класса задач по оценке чувствительности климатических моделей и четырехмерной ассимиляции данных натурных наблюдений в современных моделях гидродинамики океана. Яркой чертой этого направления является сочетание фундаментальных теоретических исследований и натурных экспериментов, что отразилось в проведении в 1980–1990 гг. крупнейшей в истории развития науки о климате программы исследования климатической изменчивости земли – научно-наблюдательной программы «Разрезы». Первоначально теория сопряженных уравнений динамики атмосферы и океана использовалась Г. И. Марчуком для постановки и решения задач апостериорного анализа. Это, например, задача о формировании температурных аномалий в атмосфере и океане, задача о чувствительности изменчивости климата для различных регионов Земли, рассмотренная в главе хх. Подчеркнем, что именно решение сопряженной задачи о чувствительности климата явилось теоретической основой проведения программы «Разрезы».

С использованием двойственного представления функционала, описывающего среднюю приземную температуру выбранного региона Земли, он записывается в терминах решения сопряженного уравнения. Для сопряженного уравнения ставится задача нахождения локализованных в пространстве подобластей океана, в которых процессы его теплообмена с атмосферой вносят максимальный вклад в значение изучаемого функционала. Сопряженная задача для уравнения конвекции-диффузии тепла решается в обратном времени, данные натурных наблюдений используются для вычисления скорости атмосферных потоков, океанических течений и коэффициентов турбулентного теплообмена. Вычисленные подобласти получили название энергоактивных зон океана, и именно в них были сосредоточена наблюдательная часть программы «Разрезы».

Впоследствии метод сопряженных уравнений получил существенное развитие при решении обратных задач динамики атмосферы и океана и задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений. В последние десятилетия в связи с исследованиями глобальных изменений на нашей планете очень важной является проблема получения и рационального использования данных измерений с целью ретроспективного анализа в различных областях знаний. Математическая модель данной проблемы может быть сформулирована как задача об усвоении и обработке многомерных (включающих зависимость от временной и пространственных переменных) данных, представляющая собой одну из задач оптимального управления (data assimilation problem). Эта проблема фактически сводится к задаче вычисления распределенных параметров процессов, описываемых эволюционными уравнениями, по результатам наблюдений. Постановки и изучение таких задач на основе теории сопряженных уравнений позволили получить ряд новых результатов в этом направлении.

В работах Г. И. Марчука и его учеников на базе теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений исследована разрешимость ряда задач ассимиляции данных, разработаны и обоснованы итерационные алгоритмы решения этих задач с использованием сопряженных уравнений, проведена оптимизация итерационных процессов на основе спектральных свойств операторов управления (Агошков, Марчук, 1993; Марчук, Залесный, 1993; Марчук, Шутяев, 1994; Агошков, 2003; Шутяев, 2001). Характерной особенностью современных работ в данном направлении Г. И. Марчука и его учеников является сочетание многокомпонентного метода расщепления и метода сопряженных

уравнений (Агошков и др., 2010; Марчук, Залесный, 2012; Agoshkov, Zalesny, 2012).

В заключение отметим, что в книге отражены основные идеи, некоторые общие аспекты теории сопряженных уравнений и их приложения в конкретных областях, развитые в работах Г. И. Марчука и его научной школы. Надеемся, что они привлекут внимание широкого круга студентов, аспирантов, научных сотрудников и инженеров-исследователей к применению данных методов для постановки и решения новых прямых и обратных задач, возникающих в различных областях современной науки и техники. В дополнение к цитируемым в книге изложению некоторых подходов, методов и алгоритмов анализа сложных систем с помощью сопряженных уравнений и их математического обоснования можно найти в специальной литературе, ссылки на которую помещены в конце комментария. Здесь представлены известные монографии по теории сопряженных уравнений, некоторые оригинальные работы, в которых изучаются специальные положения этой теории и приложения теории сопряженных операторов и уравнений, не нашедших полного отражения в настоящей книге.

## **Литература**

Авдошин С. М., Белов В. В., Маслов В. П. Математические аспекты синтеза вычислительных сред. М.: МИЭМ, 1984.

Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.

Агошков В. И. Сопряженные уравнения в алгоритмах возмущений  $n$ -го порядка точности // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. М.: ОВМ АН СССР, 1985. С. 62–85.

Агошков В. И. Теория и методы решения задач вариационной ассимиляции образов. М.: Институт вычислительной математики РАН, 2012. 148 с.

Агошков В. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Дымников В. П., Шутяев В. П. Метод сопряженных уравнений и анализ сложных систем // В сб.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 1. Вычислительная математика. М.: Наука, 2005. С. 257–342.

Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. М.: Физматлит, 2002.

Агошков В. И., Ипатова В. М. О разрешимости основных и сопряженных уравнений в нелинейных задачах // Сопряженные уравнения в задачах математической физики. М.: ОВМ АН СССР, 1990. С. 3–46.

Агошков В. И., Ипатова В. М. Об использовании законов сохранения при построении сопряженных операторов. Препринт № 256. М.: ОВМ АН СССР, 1990.

Агошков В. И., Ипатова В. М., Залесный В. Б., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 6. С. 734–770.

Агошков В. И., Ипатова В. М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 151–153.

Агошков В. И., Ипатова В. М. Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1064–1075.

Агошков В. И., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1371–1391.

Бочаров Г. А. Сопряженные уравнения и анализ чувствительности математических моделей. Деп. в ВИНТИ. № 2858-В94. М., 1994.

Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 843–847.

Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1985. С. 147–162.

Владимиров В. С., Волович И. В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений // Теор. и матем. физика. Т. 62, № 1984. С. 3–29.

Владимиров В. С., Марчук Г. И. Об определении сопряженного оператора для нелинейных задач // ДАН. 2000. Т. 372, № 2. С. 165–168.

Дымников В. П. Сопряженные уравнения систем гидродинамического типа // Изв. АН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 4. С. 459–462.

Дымников В. П. Об общих представлениях интегральных законов сохранения нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН. 2002. Т. 382, № 2. С. 173–175.

Дымников В. П. Сопряженные уравнения, интегральные законы сохранения и консервативные разностные схемы для уравнений динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости // ДАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 320–312.

Ипатова В. М. Задача усвоения данных для модели общей циркуляции океана в квазигеострофическом приближении. Деп. в ВИНТИ. № 2333–В92. М., 1992.

Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

Льюис Дж. Ценность. Сопряженная функция. М.: Атомиздат, 1972.

Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – 3-е изд. М.: Наука, 1989.

Марчук Г. И. О постановке обратных задач // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–506.

Марчук Г. И. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач // Космич. исслед. 1964. Т. 2, вып. 3. С. 462–477.

Марчук Г. И. Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. 1974. № 2. С. 9–37.

Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.

Марчук Г. И. Методы долгосрочного прогноза погоды на основе решения основных и сопряженных задач // Метеорология и гидрология. 1974. № 3. С. 17–34.

Марчук Г. И. Окружающая среда и проблемы оптимизации размещения предприятий // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 5. С. 1056–1059.

Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1961.

Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.

Марчук Г. И. Моделирование изменений климата и проблема долгосрочного прогноза погоды // Метеорология и гидрология. 1979. № 7. С. 25–36.

Марчук Г. И., Агошков В. И. Сопряженные уравнения в нелинейных задачах и их приложения // Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 138–142.

Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 4. М.: Наука, 1986. С. 5–62.

Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. М.: ОВМ АН СССР, 1986.

Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993.

Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.

Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1976. С. 30–45.

Марчук Г. И., Пененко В. В. Исследование чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 11. С. 1123–1131.

Марчук Г. И., Залесный В. Б. Моделирование циркуляции Мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солености // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 1. С. 21–36.

Марчук Г. И., Залесный В. Б., Ивченко В. О. Моделирование динамики бароклинного океана с вариационной инициализацией гидрофизических полей // В кн. Современные проблемы динамики океана и атмосферы. М.: Триада ЛТД, 2010. С. 107–129.

Марчук Г. И., Залесный В. Б., Агошков В. И. Прямые и сопряженные задачи математического моделирования динамики Мирового океана: сб. пленарных докладов и лекций 24-й международной конференции. Саратов, 2011. С. 1–9.

Марчук Г. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 136–150.

Шутяев В. П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. М.: Наука, 2001.



Шутяев В. П. О свойствах оператора управления в одной задаче об усвоении данных и алгоритмах ее решения // Мат. заметки. 1995. Т. 57, вып. 6. С. 941–944.

Шутяев В. П. О свойствах решения сопряженного уравнения в одной нелинейной гиперболической задаче // Дифф. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 706–715.

Шутяев В. П. О вычислении функционала в одной нелинейной задаче с использованием сопряженного уравнения // ЖВМ и МФ. 1991. Т. 30, № 9. С. 1278–1288.

Agoshkov V. I., Marchuk G. I. On solvability and numerical solution of data assimilation problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8, No. 1. Pp. 1–16.

Agoshkov, V. I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20, No. 1. Pp. 1–18.

Agoshkov V. I., Parmuzin E. I., Shutyaev V. P. A numerical algorithm of variational data assimilation for reconstruction of salinity fluxes on the ocean surface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. V. 23, No. 2. Pp. 135–161.

Agoshkov V. I., Zalesny V. B. Variational data assimilation technique in mathematical modeling of ocean dynamics // Pure and Applied Geophysics. 2012. V. 169, No. 3. Pp. 555–578. DOI: 10.1007/s00024-011-0372-5.

Blum J., Le Dimet F.-X., Navon I. M. Data assimilation for geophysical fluids, in Giarlet (Ed.): Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. Special volume. Handbook of Numerical analysis. 2008. V. XIV. Pp. 377–434.

Cacuci D. G. Sensitivity theory for nonlinear system: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. 1981. V. 22. Pp. 2803–2812.

Dymnikov V. P. Adjoint equations, integral conservation laws, and conservative difference schemes for nonlinear equations of mathematical physics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. V. 18, No. 3. Pp. 229–242.

Evensen G. Data assimilation: The ensemble Kalman filter. Berlin: Springer, 2007.

Gejadze I. Yu., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM Journal on Scientific Computing. 2008. V. 30, No. 4. Pp. 1847–1874.



Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. P. On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // *J. Comp. Phys.* 2010. V. 229. Pp. 2159–2178.

Ipatova V. M., Agoshkov V. I., Kobelkov G. M., Zalesny V. B. Theory of solvability of boundary value problems and data assimilation problems for equations of ocean dynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling.* 2010. V. 25, No. 6. Pp. 511–534.

Le Dimet F.-X., Navon I. M., Daescu D. N. Second-order information in data assimilation // *Monthly Weather Review.* 2002. V. 130, No. 3. Pp. 629–648.

Le Dimet F.-X., Shutyaev V. P. On deterministic error analysis in variational data assimilation // *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2005. V. 12. Pp. 481–490.

Le Dimet F. X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observation: theoretical aspects // *Tellus A.* 1986. V. 38. Pp. 97–110.

Lions J. L. *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisations de Systèmes Distribués.* Paris: Masson, 1988.

Marchuk G. I. Formulation of the theory of perturbations for complicated models // *Applied Math. and Optimization.* 1975. V. 2, No. 1. Pp. 1–33.

Marchuk G. I. Formulation of the theory of perturbations for complicated models. Part I. The Estimation of the Climate Change // *Geofisica International, Mexico.* 1975. V. 15, No. 2. Pp. 103–156. Part II. Weather Prediction. *Ibid.* Pp. 169–182.

Marchuk G. I. Mathematical issues of industrial effluent optimization // *J. of the meteorological Society of Japan.* 1982. V. 60, No. 1. Pp. 481–485.

Marchuk G. I. Perturbation theory and the statement of inverse problems // *Lect. Notes Comput. Sci.* 1973. No. 4, Pt. 2. Pp. 159–166.

Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems: 1. Principles of Construction of conjugate operators // *Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 1988. No. 1. Pp. 21–46.

Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems: 2. Perturbation algorithms // *Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 1988. No. 2. Pp. 115–136.

Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P. Adjoint Equations and Perturbation algorithms in Nonlinear Problems. N. Y.: CRC Press, 1996.

Marchuk G. I., Shutyaev V. P. Iteration methods for solving a data assimilation problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. Vol. 9, No. 3. Pp. 265–279.

Marchuk G. I., Shutyaev V. P. Solvability and numerical algorithms for a class of variational data assimilation problems // ESAIM COCV (Control, Optimization and Calculus of Variations). 2002. V. 8(2). Pp. 873–883.

Marchuk G. I., Shutyaev V. P. Iterative algorithms for data assimilation problems // Chin. Ann. of Math. 2002. V. 23B(2). Pp. 227–234.

Marchuk G., Shutyaev V., Bocharov G. Adjoint equations and analysis of complex systems: Application to virus infection modeling // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 184(1). Pp. 177–204.

Marchuk G. I., Shutyaev V. P., Zalesny V. B. Approaches to the solution of data assimilation problems, in Menaldi J. L., Rofman E., Sulem A. (eds.) Optimal Control and Partial Differential Equations. Amsterdam: IOS Press, 2001. Pp. 489–497.

Marchuk G. I., Zalesny V. B. A numerical technique for geophysical data assimilation problem using Pontryagin's principle and splitting-up method // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8, No. 4. Pp. 311–326.

Navon I. M. Data assimilation for numerical weather prediction: a review, in Park S. K., Xu L. Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic and Hydrologic Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 2009. Pp. 21–65.

Penenko V., Obraztsov N. N. A variational initialization method for the fields of the meteorological elements // Meteorology and Gidrology (English transl.). 1976. V. 11. Pp. 1–11.

Shutyaev V. P. Control operators and iterative algorithms in problems of reconstructing source functions and initial data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. V. 14. Pp. 137–176.

Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X. Fundamental control functions and error analysis in variational data assimilation // Pure and Applied Geophysics. 2012. V. 169(3). Pp. 311–320.

Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Gejadze I. Yu., Copeland G. J. M. Optimal solution error covariance in highly nonlinear problems of variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. 2012. V. 19. Pp. 177–184.

Shutyaev V. P., Parmuzin E. I. Some algorithms for studying solution sensitivity in the problem of variational assimilation of observation data for a model of ocean thermodynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2009. V. 24, No. 2. Pp. 145–160.

Trenogin V. Nonlinear operators in weak metric spaces and its conjugate operators // *Works of Int. Conf. for 175<sup>th</sup> birthday of P. L. Chebyshev*. M.: Moscow Univ. publ., 1996. V. 1. Pp. 335–337.

Vladimirov V. S. Conservation laws for differential equations // *Functional Analytic and Complex Methods, their Interactions, and Applications to Partial Differential Equations*, Proc. of the Intern. Graz Workshop, 12–16 Feb. 2001, Graz, Austria. Pp. 137–142.

Yamamuro S. The adjoints of differentiable mappings // *J. Austral. math. Soc.* 1968. V. 8. Pp. 397–407.

Zalesny V. B., Gusev A. V. Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2009. V. 24, No. 2. Pp. 171–190.

Zalesny V. B., Rusakov A. S. Numerical algorithm of data assimilation based on splitting and adjoint equation methods // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2007. V. 22, No. 2. Pp. 199–219.

Zalesny V. B., Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Bagno A. V., Gusev A. V., Diansky N. A., Moshonkin S. N. Tamsalu R Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on the multicomponent splitting method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2010. V. 25, No. 6. Pp. 581–609.

Zalesny V. B., Zakharova N. B., Gusev A. V. Four-dimensional problem of variational initialization of hydrophysical fields of the World Ocean // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. 2011. V. 26, No. 2. Pp. 209–229.

## Литература

- [1] Авдошин С. М., Белов В. В., Маслов В. П. Математические аспекты синтеза вычислительных сред. – М.: МИЭМ, 1984.
- [2] Агошков В. И. Оценка скорости сходимости некоторых алгоритмов теории возмущений. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1982. – № 30.
- [3] Агошков В. И. Проекционно-сеточный метод в алгоритмах теории возмущений. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1982. – № 38.
- [4] Агошков В. И. Сопряженные уравнения в алгоритмах возмущений  $n$ -го порядка точности // Сопряженные уравнения в алгоритмах возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1985. – С. 62–85.
- [5] Агошков В. И. Алгоритмы возмущений  $n$ -го порядка для функционалов от решений нелинейных задач и оценка их скорости сходимости // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1989. – С. 3–30.
- [6] Агошков В. И. Разрешимость одного класса задач нечувствительного оптимального управления и применение методов возмущений // В сб.: Сопряженные уравнения, алгоритмы возмущений и оптимальное управление. – М.: ИВМ РАН, 1993. – С. 2–13. (Деп. ВИНТИ, № 453-И93 от 25.02.93.)
- [7] Агошков В. И., Ипатова В. М. О разрешимости одной задачи нечувствительного управления // В сб.: Сопряженные уравнения, алгоритмы возмущений и оптимальное управление. – М.: ИВМ РАН, 1993. – С. 15–27. (Деп. в ВИНТИ, №. 453-И93 от 25.02.93.)

- 
- [8] Агошков В. И., Мишнева А. П. О нахождении коэффициента дисперсии в нелинейном параболическом уравнении. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1988. – № 200.
- [9] Агошков В. И., Попыкин А. И., Шихов С. Б. К теории малых возмущений для уравнения переноса // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1985. – С. 76–84.
- [10] Алексеев В. В., Галкин Н. А., Залесный В. Б. Численное исследование реакции Аравийского моря на вариации ветра // Океанология, 1993. – Т. 33. – С. 13–20.
- [11] Алоян А. Е., Йорданов Д. Л., Пененко В. В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. – 1981. – № 1. – С. 32–43.
- [12] Асаченкова А. Л. Об одном алгоритме решения обратных задач на основе теории сопряженных уравнений. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1986. – № 119.
- [13] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984.
- [14] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958.
- [15] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
- [16] Больянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973.
- [17] Бочаров Г. А. Исследование асимптотической устойчивости положений равновесия математической модели противовирусного Т-клеточного иммунного ответа на основе теории возмущений // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1985. – С. 116–126.
- [18] Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975.

- 
- [19] Бухгейм А. Л. Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств // ДАН СССР. – 1978. – Т. 242, № 2. – С. 272–275.
- [20] Вайнберг М. М. Функциональный анализ. – М.: Просвещение, 1979.
- [21] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.
- [22] Ваисильев В. Г. Одномерная обратная задача индукционного каротажа. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических наблюдений / под ред. М. М. Лаврентьева. – М.: Наука, 1967.
- [23] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
- [24] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.
- [25] Венцель М., Залесный В. Б. Усвоение данных в одномерной модели конвекции-диффузии тепла в океане // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 32, № 5. – С. 613–629.
- [26] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и сопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // УМН. 1960. Т. XV, вып. 3. С. 3–80.
- [27] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. – 1957. – Т. XII, вып. 5. – С. 3–122.
- [28] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // УМН. – 1960. – Т. XV, вып. 4. – С. 27–95.
- [29] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Некоторые вопросы возмущений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129, № 6. – С. 1203–1206.

- 
- [30] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Возмущение собственных значений и собственных элементов для некоторых несамосопряженных операторов // ДАН СССР. – 1960. – Т. 130, № 2. – С. 251–253.
- [31] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
- [32] Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Вып. 61. – С. 3–157.
- [33] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.
- [34] Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 4. – С. 843–847.
- [35] Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 147–162.
- [36] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
- [37] Володин Е. М., Дианский Н. А., Гусев А. В. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана INMCM 4.0 // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 448–466.
- [38] Габасов Р., Кириллова Ф.М. К вопросу о распространении принципа максимума Л.С. Понтрягина на дискретные системы // Автоматика и телемеханика. – 1966. – Т. 27, № 11.
- [39] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
- [40] Гельфонд О. Л. Исчисление конечных разностей. – М.: Гостехиздат, 1952.
- [41] Дианский Н. А., Володин Е. М. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // Изв. РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 824–840.

- 
- [42] Дулин В. А. Возмущение критичности реакторов и уточнение групповых констант. – М.: Атомиздат, 1979.
- [43] Дымников В. П., Алоян А. Е. Монотонные схемы решения уравнений переноса в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 1237–1246.
- [44] Ермаков С. М. Об оптимальных несмещенных планах регрессионных экспериментов // Тр. МИАН СССР. – 1970. – Т. III. – С. 252–257.
- [45] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1975.
- [46] Ермаков С. М., Махмудов А. А. О планах регрессионных экспериментов, минимизирующих систематическую ошибку // Завод. лаб. – 1977. – № 7. – С. 854–858.
- [47] Ермаков С. М., Мироненко Л. П. Метод существенной выборки при моделировании систем связи, описываемых векторными марковскими процессами // Имитационное моделирование систем. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. – С. 17–24.
- [48] Ермаков С. М., Панкратьев Ю. Д. Об одном методе приближенной линеаризации интегральных уравнений Ляпунова – Шмидта // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 1977. – № 7. – С. 44–47.
- [49] Залесный В. Б., Ивченко В. О. Моделирование реакции глобальной циркуляции и регионального отклика Северного Ледовитого океана на аномалии внешнего воздействия // Океанология. – 2010. – Т. 50, № 6. – С. 877–889.
- [50] Захарова Н. Б., Лебедев С. А. Алгоритмы интерполяции и экстраполяции оперативных геофизических данных наблюдений // Сб. статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. – 2009. – Вып. 6. – С. 177–188.
- [51] Зуев С. М. Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. – М.: Наука, 1988.



- 
- [52] Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. – 1963. – Т. 61, № 2. – С. 211–223.
- [53] Иорданов Д. Л., Пененко В. В., Алоян А. Е. О вертикальной скорости на верхней границе планетарного пограничного слоя над орфографически и термически неоднородной подстилающей поверхностью // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1979. – Т. 14, № 11. – С. 1204–1208.
- [54] Иорданов Д. Л., Пененко В. В., Алоян А. Е. Параметризация стратифицированного планетарного приграничного слоя для численного моделирования атмосферных процессов // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1978. – Т. 14, № 8. – С. 815–823.
- [55] Кадомцев Б. Б. О функции влияния в теории переноса лучистой энергии // ДАН СССР. – 1957. – Т. 113, № 3. – С. 541–543.
- [56] Кондратьев К. Я. Лучистая энергия Солнца. – Л.: Гидрометеоздат, 1954.
- [57] Кондратьев К. Я. Метеорологические спутники. – Л.: Нидрометеоздат, 1963.
- [58] Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968.
- [59] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. – М.: Наука, 1985.
- [60] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971.
- [61] Крейн С. Г. О классах корректности для некоторых задач // ДАН СССР. – 1957. – Т. 114, № 6. – С. 1162–1165.
- [62] Лаврентьев М. М. О постановке некоторых некорректных задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука, 1966. – С. 258–276.

- [63] Лаврентьев М. М., Васильев В. Г. О постановке некоторых задач математической физики // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. VII, № 3. – С. 559–576.
- [64] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физик. – М.: Наука, 1973.
- [65] Ладыженская О. А., Фадеев Л. Д. О теории возмущения непрерывного спектра // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 6. – С. 1187–1190.
- [66] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. – М.: Физматгиз, 1963.
- [67] Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, фундаментальных дифференциальных операторов и основных начально-краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. – 1964. – Т. 4, № 6. – С. 449–465.
- [68] Летов А. М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969.
- [69] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.
- [70] Лобарев И. В. Метод возмущений в исследовании простоты собственных значений интегрального уравнения Пайерлса // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1985. – С. 136–150.
- [71] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981.
- [72] Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1977.
- [73] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
- [74] Ляпунов А. М. Собр. соч. в 2 т. – М. ; Л.: Гостехиздат, 1956.
- [75] Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1960.

- 
- [76] Марчук Г. И. Численное решение задачи динамики атмосферы и океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [77] Марчук Г. И. Применение сопряженных уравнений к решению задач математической физики // Успехи мех. – 1981. – Т. 4, вып. 1. – С. 3–27.
- [78] Марчук Г. И. Некоторые математические проблемы охраны окружающей среды. Комплексный анализ и его приложения. – М.: Наука, 1981.
- [79] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
- [80] Марчук Г. И. О постановке некоторых обратных задач // ДАН СССР. – 1964. – Т. 156, № 3 – С. 503–506.
- [81] Марчук Г. И. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач // Космич. исслед. – 1964. – Т. 2, вып. 3. – С. 462–477.
- [82] Марчук Г. И. Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. – 1974. – № 2. – С. 9–37.
- [83] Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1958.
- [84] Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. – М.: Наука, 1992.
- [85] Марчук Г. И. Методы долгосрочного прогноза погоды на основе решения основных и сопряженных задач // Метеорология и гидрология. – 1974. – № 3. – С. 17–34.
- [86] Марчук Г. И. Окружающая среда и проблемы оптимизации размещения предприятий // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227, № 5 – С. 1056–1059.
- [87] Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. – М.: Госатомиздат, 1961.

- 
- [88] Марчук Г. И. Обзор методов расчета ядерных реакторов // Атом. энергия. – 1961. – Т. 11, № 4. – С. 356–369.
- [89] Марчук Г. И. К проблеме математического моделирования экологических ситуаций в акваториях водных бассейнов // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. – М.: Наука, 1982. – С. 254–258.
- [90] Марчук Г. И. Окружающая среда и некоторые проблемы оптимизации. – Новосибирск: Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1975. – № 1.
- [91] Марчук Г. И. К проблеме охраны окружающей среды // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 20–28.
- [92] Марчук Г. И. Экономические критерии планирования, охраны и восстановления окружающей среды // ЖВМ и МФ. – 1980. – Т. 20, № 6. – С. 1365–1372.
- [93] Марчук Г. И. К проблеме охраны окружающей среды. – Новосибирск: Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1977. – № 43.
- [94] Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982.
- [95] Марчук Г. И. Окружающая среда и проблемы оптимизации // Тр. МИАН СССР. – 1984. – Т. 166. – С. 123–129.
- [96] Марчук Г. И. Моделирование изменений климата и проблема долгосрочного прогноза погоды // Метеорология и гидрология. – 1979. – № 7. – С. 25–36.
- [97] Марчук Г. И. Сопряженные уравнения в нелинейных задачах и их приложения // Функциональные и численные методы математической физики. – Киев: Наукова думка, 1988. – С. 138–142.
- [98] Марчук Г. И. Симметризация нестационарного уравнения переноса и формулировка вариационного принципа. – Новосибирск: Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1980. – № 222.

- 
- [99] Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 4. – М.: Наука, 1986. – С. 5–62.
- [100] Марчук Г. И., Агошков В. П., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. – М.: ОВМ АН СССР, 1986.
- [101] Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. – М.: Наука, 1993.
- [102] Марчук Г. И., Алоян А. Е. Глобальный перенос примеси на сфере // Изв. АН СССР Серия: Физика атмосферы и океана. – 1994 (to be published).
- [103] Марчук Г. И., Бельская Ж. Н. О применении сопряженных уравнений к расчету защиты от излучения // Вопросы физики защиты реакторов. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 99–102.
- [104] Марчук Г. И., Дробышев Ю. П. Некоторые вопросы линейной теории измерений // Автометрия. – 1967. – № 3. – С. 24–30.
- [105] Марчук Г. И., Дымников В. П., Курбаткин Г. П., Саркисян А. С. Программа «Разрезы» и мониторинг Мирового океана // Метеорология и гидрология. – 1984. – Т. 6, № 8. – С. 9–17.
- [106] Марчук Г. И., Ермаков С. М. О некоторых проблемах теории планирования эксперимента // Математические методы планирования эксперимента. – Новосибирск: Наука, 1981. – С. 3–18.
- [107] Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы: математические модели и численные эксперименты. – Л.: Гидрометеиздат, 1977.
- [108] Марчук Г. И., Кузин В. И., Скиба Ю. Н. Проекционно-разностный метод расчета сопряженных функций для модели переноса тепла в системе атмосфера – океан – почва // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука. – 1983. – С. 149–154.

- [109] Марчук Г. И., Кузин В. И., Скиба Ю. Н. Применение сопряженных уравнений в численных моделях переноса тепла в системе атмосфера – океан – континент // Материалы Советско-французского симпозиума по океанографии. Новосибирск, 9–11 июня 1983 г. Ч. 1. – Новосибирск, 1983. – С. 4 – 15.
- [110] Марчук Г. И., Курбаткин Г. П. Физические и математические аспекты анализа и прогноз погоды // Метеорология и гидрология. – 1977. – № 11. – С. 25–33.
- [111] Марчук Г. И., Курбаткин Г. П. Анализ нестационарности полусферного температурного градиента атмосферы // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 451–463.
- [112] Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971.
- [113] Марчук Г. И., Лыкосов В. Н. Диагностический расчет коэффициентов вертикального перемешивания в верхнем пограничном слое океана // Математическое моделирование процессов в пограничных слоях атмосферы и океана. – М.: ОВМ АН СССР, 1989. – С. 4–21.
- [114] Марчук Г. И., Михайлов Г. А. Решение задач теории переноса излучения методом Монте-Карло // Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. – Минск: Наука и техника, 1971. – С. 43–58.
- [115] Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назарлиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. – Новосибирск: Наука, 1976.
- [116] Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. – М.: Госатомиздат, 1961. – С. 30–45.
- [117] Марчук Г. И., Пененко В. В. Исследование чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 1123–1131.
- [118] Марчук Г. И., Пененко В. В. Некоторые применения методов оптимизации к проблеме окружающей среды // Вычислительные

- методы в прикладной математике. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 5–22.
- [119] Марчук Г. И., Пененко В. В., Протасов А. В. Вариационный принцип в малопараметрической модели динамики атмосферы // Вариационно-разностные методы в математической физике: мат. Всесоюзн. конференции. – Новосибирск, 1978. – С. 213–229.
- [120] Марчук Г. И., Скиба Ю. Н. Численный расчет сопряженной задачи для модели термического взаимодействия атмосферы с океанами и континентами // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 459–469.
- [121] Марчук Г. И., Скиба Ю. Н. Об одной модели прогноза осредненных аномалий температуры. – Новосибирск: Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1978. – № 120.
- [122] Марчук Г. И., Скиба Ю. Н. Расчет пространственно-временных функций влияния для среднемесячных аномалий поверхностной температуры воздуха ограниченных регионов // Динамика атмосферы и океана. – М.: ОВМ АН СССР, 1990. – С. 35–50.
- [123] Марчук Г. И., Скиба Ю. Н., Проценко И. Г. Метод расчета эволюции случайных гидродинамических полей на основе сопряженных уравнений // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1985. – Т. 21, № 2. – С. 115–122.
- [124] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: Изд-во МГУ, 1965.
- [125] Маслов В. П. Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному // ДАН СССР. – 1956. – Т. 109, № 2. – С. 267–270.
- [126] Михайлов Г. А. Использование приближенных решений сопряженной задачи для улучшений алгоритмов метода Монте-Карло // ЖВМ и МФ. – 1969. – Т. 9, № 5. – С. 1145–1152.
- [127] Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. – Новосибирск: Наука, 1974.

- 
- [128] Мишнева А. П. Отыскание эффективного коэффициента конвективной дисперсии по экспериментальным данным с помощью аппарата сопряженных уравнений и теории возмущений // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. – М.: ОВМ АН СССР, 1988. – С. 101–111.
- [129] Мишнева А. П. Прогнозирование эффективного коэффициента конвективной дисперсии при изменении параметров эксперимента // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. – М.: ОВМ АН СССР, 1988. – С. 112–118.
- [130] Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975.
- [131] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981.
- [132] Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР, 1954. – № 24. – С. 163–187.
- [133] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. – М.: Наука, 1965.
- [134] Мусаэлян Ш. А. Проблема параметризации процесса передачи лучистой энергии Солнца системе океан – атмосфера и долгосрочный прогноз // Метеорология и гидрология. – 1974. – № 10. – С. 9–19.
- [135] Назарлиев М. А. Исследование приближенной функции ценности в расчетах сумеречных эффектов методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло и их применения: тез. докладов на 3-й Всесоюзн. конф. по методам Монте-Карло. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1971. – С. 116–117.
- [136] Назаров В. С., Овсянников А. Н., Спидченко А. Н. К гидрологическому обоснованию регулярных океанографических наблюдений в Мировом океане // Тр. ГОИН, 1971. – Вып. 105. – С. 13–36.
- [137] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.



- 
- [138] Некруткин В. В. Прямая и сопряженная схема Неймана – Улама для решения нелинейных интегральных уравнений // ЖВМ и МФ. – 1974. Т. 14, № 6. – С. 1409 – 1415.
- [139] Образцов Н. Н. Математическое моделирование и оптимизация в проблемах окружающей среды. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1985. – № 85.
- [140] Образцов Н. Н. О распространении примеси от точечного источника. – М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1983. – № 66.
- [141] Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными с малым параметром при старших производных и задача Коши для нелинейных уравнений // УМН, 1955. – Т. 10, № 3. – С. 229–334.
- [142] Панкратьев Ю. Д. К вопросу о возмущениях линейных функционалов // Системный анализ и исследование операций. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. – С. 5–14.
- [143] Пененко В. В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука, 1975. – С. 61–77.
- [144] Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985.
- [145] Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Труды матем. ин-та АН СССР, 1985. – Т. 169. – С. 119–158.
- [146] Понтрягин Л. С. Избранные труды. Т. 2. – М.: Наука, 1988.
- [147] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
- [148] Пупко В. Я., Зродников А. В., Лизачев Ю. И. Метод сопряженных функций в инженерно-физических исследованиях. – М.: Энергоатомиздат, 1984.

- 
- [149] Саркисян А. С. Основные достижения и проблемы моделирования долгопериодных изменений климата Мирового океана // Изв. РАН. Серия: Физика атм. и океана. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 750–769.
- [150] Седунов Е. В. О планах эксперимента, минимизирующих систематическую ошибку // Математические методы планирования эксперимента. – Новосибирск: Наука, 1981. – С. 102–140.
- [151] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1971.
- [152] Стумбур Г. Применение теории возмущений в физике ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1976.
- [153] Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / под ред. Д. Б. Келлера, С. Антмана. – М.: Мир, 1974.
- [154] Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
- [155] Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
- [156] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974.
- [157] Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника – Вишика // УМН. – 1970. – Т. XXV, вып. 4. – С. 123–156.
- [158] Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
- [159] Усачев Л. Н. Уравнение для ценности нейтронов кинетического реактора и теория возмущений // Реакторостроение и теория реакторов. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – С. 251–268.
- [160] Усачев Л. Н. Теория возмущений для коэффициента воспроизводства и других отношений числе различных процессов в реакторе // Атом. энергия. – 1963. – Т. 15, вып. 6. – С. 472–481.

- 
- [161] Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г. Теория возмущений и планирование эксперимента в проблеме ядерных данных для реакторов. – М.: Атомиздат, 1980.
- [162] Фадеев Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН СССР. – 1964. – Т. 73. – С. 292–313.
- [163] Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.
- [164] Федоров В. В. Активные регрессионные эксперименты // Математические методы планирования эксперимента. – Новосибирск: Наука, 1981. – С. 19–73.
- [165] Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966.
- [166] Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: ФАН, 1974. – 216 с.
- [167] Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 106 с.
- [168] Филатов А. Н., Шершков В. В. Асимптотические методы в атмосферных моделях. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 270 с.
- [169] Хисамутдинов А. И. Выборка по важности в теории переноса излучений // ЖВМ и МФ. – 1970. – Т. 10, № 4. – С. 999–1005.
- [170] Черноусько Ф. Л., Баничук В. П. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973.
- [171] Шихов С. Б. Вопросы математической теории реакторов. Линеинный анализ. – М.: Атомиздат, 1972.
- [172] Шишатский С. П. Об одном методе приближенного решения некорректной задачи Коши для эволюционного уравнения // Математические проблемы геофизики. Вып. 3. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. – С. 216–228.

- [173] Шутяев В. П. Спектральные свойства условно-критической задачи переноса в дискретном приближении и алгоритм теории возмущений // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1985. – С. 151–169.
- [174] Шутяев В. П. Свойства сопряженных операторов, возникающих в алгоритмах возмущений для квазилинейной эллиптической задачи // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. – М.: ОВМ АН СССР, 1988. – С. 119–132.
- [175] Шутяев В. П. К обоснованию алгоритма возмущений в одной нелинейной гиперболической задаче // Мат. заметки. – 1991. – Т. 49, вып. 4. – С. 155–156.
- [176] Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления // Космические исследования. – 1966. – Т. 4, № 5.
- [177] Яковлев Н. Г. Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане // Изв. РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 2003. – Т. 39, № 3. – С. 394–409.
- [178] Agoshkov V. I., Minyuk F. P., Rusakov A. S., Zalesny V. B. Study and solution of identification problems for nonstationary 2D- and 3D-convection-diffusion equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – V. 20, No. 1. – Pp. 19–43.
- [179] Agoshkov V. I., Parmuzin E. I., Shutyaev V. P. A numerical algorithm of variational data assimilation for reconstruction of salinity fluxes on the ocean surface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23, No. 2. – Pp. 135–161.
- [180] Agoshkov V. I., Lebedev S. A., Parmuzin E. I. Numerical Solution to the Problem of Variational Assimilation of Operational Observational Data on the Ocean Surface Temperature // Изв. РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 76–107.
- [181] Balakrishnan A. V. Introduction to Optimization Theory in a Hilbert Space. – Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1971.

- 
- [182] Balakrishnan A. V. Parameter Estimation in Stochastic Differential Systems: Theory and Application // Developments in Statistics / Ed. Paruchuri K. Krishnaiah. – N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1978. – Pp. 1–32.
  - [183] Balakrishnan A. V. Stochastic Differential Systems. Filtering and Control: Lecture Notes in Economics and Math. Systems 84. – Berlin; New York; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1973.
  - [184] Balakrishnan A. V. A note on the Marchuk – Zuev identification problem // Vistas in Applied Mathematics. Numerical Analysis. Atmospheric Sciences. Immunology. – N. Y.: Optimization Software, Inc. Publications Division, 1986. – Pp. 291–298.
  - [185] Bates J. R., Semazzi F. N., Higgins R. W. Integration of the shallow water equations on the sphere using a vector semi-Lagrangian scheme with a multigrid solver, Monthly Weather Review. – 1990. – V. 118, No. 1615.
  - [186] Bellman R. Dynamic Programming. – New Jersey: Princeton Univ. Press, 1957.
  - [187] Bellman R. Perturbation Techniques in Mathematics. Physics and Engineering. – N. Y.: Holt, 1964.
  - [188] Bellman R., Kalaba R. E. Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems. – N. Y.: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1965.
  - [189] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G. Asymptotic Methods in Periodic Structures. – North Holland, 1978.
  - [190] Bram van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme: 2. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Comp. Phys. – 1974. – V. 14, No. 360.
  - [191] Bloch C. Sur la théorie des perturbations des états liés // Nuclear Phys. – 1958. – No. 6. – Pp. 329–347.
  - [192] Blum J., Le Dimet F.-X., Navon I. M. Data assimilation for geophysical fluids, in Giarlet P. G. (Ed.): Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. Special volume. Handbook of Numerical analysis. – V. XIV. – P. 377–434.

- [193] Cacuci D.G., Weber C.F., Oblow E.M., Marable J.H. Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations // Nuclear Science and Engineering. – 1980. – V. 75, No. 88.
- [194] Carleman I. Applications de la théorie des équations intégrales singulières aux équations différentielles de la dynamique // Arkiv. Mat. Astronom. Fys. – 1932. – B. 22. – No. 7. – Pp. 1–7.
- [195] Cioranescu D., Donato P. Exact internal controllability in perforated domains // J. Math. Pures et Appl. – 1989. – V. 68, No. 185.
- [196] Courtier P., Talagrand O. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint wotricity equation. Part II: Numerical results // Quart. J. Roy. Meteor Soc. – 1987. – V. 113, No. 1329.
- [197] Derber J. C. The variational 4-D assimilation of analysis using filtering models as constraints // Ph. D. Thesis. – Madison: Univ. of Wisconsin, 1985.
- [198] Derber J. C. Variatiobal four dimensional analysis using the quasigeostrophic constraint // Mon. Wea. Rev. – 1987. – V. 115, No. 998.
- [199] De Sz.-Nagy B. Perturbations des transformations lineaires fermenés // Acta Sci. Math. Szeged. – 1951. – V. 14. – Pp. 125–137.
- [200] Ehrlich R., Hurwitz H. Multigroup Methods for Neutron Diffusion Problems // Nucleonics. – 1954. – V. 12, No. 2. – P. 23.
- [201] Fridrichs K.O. Perturbation of spectra in Hilbert space, Lectures in Applied Math., V. III. Proceedings of the summer Seminar, Boulder, Colorado (1960), American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1965.
- [202] Friedrichs K. O. Über die Spectralzerlegung eines Integratoroperators // Math. Ann. – 1983. – V. 115. – P. 249–272.
- [203] Friedrichs K. O. On the perturbation of continuous spectra // Comm. Pure Appl. Math. – 1984. – V. 1. – Pp. 361–406.

- 
- [204] Friedrichs K. O., Rejto P. A. On a perturbation through which the discrete spectrum becomes continuous // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1962. – V. 841. – Pp. 543–560.
- [205] Gates W. L. AIMP: The atmospheric model intercomparison project // *Bulletin of the American Meteorological Society.* – 1962, 1992. – V. 73, No. 12.
- [206] Gilbert J.-C., Lemarechal C. Some numerical experiment with variable storage quasi-Newton algorithms // *Math. Program.* – 1989. – B25. – Pp. 408–435.
- [207] Glasstone S., Edlund M. C. *The Elements of Nuclear Reactor Theory.* – N. Y. etc., 1952.
- [208] Glowinski R. *Numerical methods for nonlinear variational problems.* – N. Y.: Springer – Verlag, 1984.
- [209] Glowinski R., Li C. M., Lions J. L. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equations (F) // *Jap. J. of Applied Math.* – 1990.
- [210] Griffies S. M., Winton M., Samuels B. L. The Large and Yeager (2004) dataset and CORE [e-resource]. NOAA Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, PO Box 308, Forrestal Campus Princeton, New Jersey, 08542 USA, 2004. Available at: <http://data1.gfdl.noaa.gov/nomads/forms/mom4/CORE.html>.
- [211] Kato T. On the convergance of the perturbation method // *J. Fac. Sci., Tokyo Univ.* – 1951. – V. 6 – Pp. 198–205.
- [212] Kato T. Perturbation of continuous spectra bu trace operators // *Proc. Japan Acad.* – 1957. – V. 33. – Pp. 260–264.
- [213] Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* – Berlin: Springer, 1963.
- [214] Knysh V. V., Demyshev G .K., Korotaev G. K., Sarkisyan A. S. Four-dimensional climate of seasonal Black Sea circulation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2001. – V. 16, No. 5. – Pp. 409–426.

- [215] Kontarev G. R. The adjoint equation technique applied to meteorological problems // Technical report No. 21, European Centre for Medium Range Weather Forecasts. – Reading, 1980.
- [216] Kuroda S. T. Perturbation of continuous spectra by unbounded operators. I, II // J. Math. Soc. Japan. – 1959. – V. 11. – Pp. 247–262; 1960. – V. 12. – P. 461.
- [217] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltsev N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. – M.: Nauka, 1967.
- [218] Lax P. D., Phillips R. S. Scattering theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 70. – Pp. 130–142.
- [219] Le Dimet F.X., A general formalizm of variational analysis, CIMMS Report, Norman, OK 73091, 22, 1, 1982.
- [220] Le Dimet F. X., Talgrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, Tellus A 38, 97, 1986.
- [221] Le Veque R. J. Time-split methods for partial differential equations, Report No. STAN-CS-82-904, Stanford University, 1982.
- [222] Levitus S., Oort A. N. Global analysis of oceanographic data // Bul. Amer. Meteorol. Soc. – 1977. – V. 58, No. 1270.
- [223] Levitus S., Boyer T. P., Conkright M. E., O'Brien T., Antonov J., Stephens C., Stathoplos L., Jonson D., Gelfeld R. World Ocean Database 1998. NOAA Atlas NESDIS 18, 1998. 346 p.
- [224] Lewins J. Importance. The Adjoint Function. – N. Y. etc.: Pergamon Press, 1965.
- [225] Lewis J., Derber J. The use of adjoint equations to solve a variational adjustment with advective constraints, Tellus A, 37, 309, 1985.
- [226] Lions J.-L. Sur les sentinelles des systems distributes. Le cas des conditions initiales incompletes, C.R. Acad. Sci. Paris, V. 307, Serie I, 819, 1988.



- 
- [227] Lions J.-L. Insensitive controls, in Computational Mathematics and Applications, Proceedings of 8-th France-USSR-Italy Joint Symposium, Pavia, October 206, 1989, Pubblicazioni N 730, Pavia, 285, 1989.
- [228] Lions J.-L. Sur le Controlle Optimal de Systèmes Gouvernes par des Equation aux Derivees Partielles. – Paris: Dunod, Gaithier-Villars, 1968.
- [229] Lions J.-L. Contrôllabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués. T. 1. Contrôllabilité exacte; T. 2. Perturbations. – Paris: Masson, 1988.
- [230] Lions J.-L. La Planete Terre, Conferences à l’Institut d’Espagne, 1990.
- [231] Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux Limities non Homogenes et Applications, Dunod. – Paris, 1968.
- [232] Lions J.-L., Temam R., Wang S., Models for the coupled atmosphere and ocean, Computational Mechanics Advances. – 1993. – V. 1, No. 3.
- [233] Lions J.-L. Control Optimal des Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. Dunod. – Paris, 1968. – 426 p.
- [234] Lorenc A. C. Optimal nonlinear objective analysis, Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 1988. – V. 114, No. 205.
- [235] Marchuk G. Some applucation of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems, Appl. Math. – 1968. – V. 13, No. 2.
- [236] Marchuk G .I. L’établissement d’un modele de changements de climat et le probleme de la prevision meteorologigue a long term // La meteorologie, VI serie. – 1979. – No. 16. – Pp. 103–116.
- [237] Marchuk G. I. Formulation of the Theory of Perturbations for Complicated Models. Part I. The Estimation of the Climate Change // Geofisica International, Mexico. – 1975. – V. 15, No. 2. – Pp. 103–156; Part II. Weather Prediction // Ibid. – Pp. 169–182.

- [238] Marchuk G. I. Mathematical Issues of Industrial Effluent Optimization // J. of the Meteorological Society of Japan. – 1982. – V. 60, No. 1. – Pp. 481–485.
- [239] Marchuk G. I. Perturbation Theory and the Statement of Inverse Problems // Lect. Notes Comput. Sci. – 1973. – V. 4. – Pp. 159–166.
- [240] Marchuk G. I. Methods of Numerical Mathematics. – N. Y. etc.: Springer, 1975.
- [241] Marchuk G. I. Splitting and alternating direction methods, in Handbook of Numerical Analysis, V. 1, ed. by P. G. Giarlet and J.-L. Lions, North-Holland, 197, 1990.
- [242] Marchuk G. I. Adjoint Equations and Analysis of Complex. – Kluwer, Dordrecht, 1995. – 466 p.
- [243] Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems: 1. Principles of construction of conjugate operators // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1988. – No. 1. – Pp. 21–46.
- [244] Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems: 2. Perturbation algorithms // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1988. – No. 2. – Pp. 115–136.
- [245] Marchuk G. I., Agoshkov V. I. On solvability and numerical solution of data assimilation problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1993. – V. 8, No. 1. – P. 1.
- [246] Marchuk G. I., Kusin V. I. Obraztsov N.N. Numerical modelling of distribution sources in a water basin. – Novosibirsk, 1979. (Preprint/Academy of Science of the USSR. Computing Center.)
- [247] Marchuk G. I., Penenko V. V. Application of optimization method to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment, in Modelling and Optimization of Complex Systems: Proc. of the IFIP – TC7 Work Conf. – Novosibirsk, 1978. – P. 240.

- 
- [248] Marchuk G. I., Skiba Yu. N. Numerical calculation of the conjugate problem for a model of the thermal interaction of the atmosphere with the oceans and continents // *Atm. and Ocean. Phys.* – 1976. – V. 12. – P. 279.
- [249] Marchuk G. I., Skiba Yu. N. Role of adjoint equations in estimating monthly mean air surface temperature anomalies // *Atmosfera.* – 1992. – V. 5. – P. 119.
- [250] Marchuk G. I., Shutyaev V. P. Iterative algorithms for solving a data assimilation problem // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1994 (to be published).
- [251] Marchuk G. I., Zalesny V. B. A numerical technique for geofisical data assimilation problem using Pontryagin's principle and splitting-up method // *Russ. J. Num. Anal. Math. Mod.* – 1993. – V. 8, No. 4.
- [252] Marchuk G. I., Rusakov A. S., Zalesny V. B., Diansky N. A. Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation // *Pure appl. Geophys.* – 2005. – V. 162. – Pp. 1407–1429.
- [253] Marchuk G., Shutyaev V., Zalesny V. Approaches to the solution of data assimilation problems, in: Menaldi J. L., Rofman E., Sulem A. (eds.) *Optimal Control and Partial Differential Equations.* – Amsterdam: IOS Press, 2001. – Pp. 489–497.
- [254] Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P. *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems.* CRC Press Inc. – N. Y., 1996. – 275 p.
- [255] Marchuk G. I., Schroeter J., Zalesny V. B. Numerical study of the global ocean equilibrium circulation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2003. – V. 18, No. 4. – Pp. 307–335.
- [256] Mignot F., Puel J. P., *Optimal control in some variational inequalities* // *SIAM J. on Control and Opt.* – 1984. – V. 22. – 466 p.
- [257] Millman M. N., Keller J. B. *Perturbation Theory of Nonlinear Boundary Value Problems* // *J. of Math. Phys.* – 1969. – V. 10, No. 2. – Pp. 342–361.

- [258] Moser J. Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung // *Math. Ann.* – 1953. – V. 125. – Pp. 366–393.
- [259] Nayfeh A. H. *Perturbation Methods*. – N. Y.: J. Wiley and Sons, 1973.
- [260] Penenko V., Obratsov N. N. A variational initialization method for the fields of the meteorological elements // *Meteorol. Gidrol.* – 1976. – V. 11, No. 1.
- [261] Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Tome 1: Solutions Périodiques. Non Existence des Intégrales Uniforms. Solutions Asymptotiques. – Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°, 1892.
- [262] Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R., Mischenko E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. – N. Y.: Wiley Interscience, 1962.
- [263] Rahema F. Internal Interface Perturbation in Neutrino Transport Theory // *Nucl. Scien. and Eng.* – 1984. – V. 86. – Pp. 76 – 90.
- [264] Rellich F. Störungstheorie des Spektralzerlegung. I–V // *Math. Ann.* – 1936. – V. 113. – Pp. 600–619; 667–685; 1939. – V. 116. – Pp. 555–570; 1940. – V. 117. – Pp. 436–382; 1942. – V. 118. – Pp. 462–484.
- [265] Rellich F. Störungstheorie des Spektralzerlegung // *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Cambridge, Mass., 1950). – N. Y.: Providence, 1952. – V. 1. – P. 606–613.
- [266] Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. – N. Y.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1969.
- [267] Rayleigh, Lord (Strutt J. W.) *Theory of Sound*. – London: Mac Millan, 1926. – V. 1-2
- [268] Riesz F., Sz. - Nagy B. *Functional Analysis*. – N. Y.: Frederick Ungar, 1955.

- 
- [269] Rosenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence // Pacific J. Math. – 1957. – V. 7. – Pp. 997–1010.
- [270] Sadokov V. P., Shteynbok D. B. Application of adjoint functions to the analysis and forecast of the temperature anomalies // Soviet Met. and Hydrology. – 1976. – V. 8, No. 6.
- [271] Sanchez-Palencia E. Nonhomogeneous Media and Vibration Theory. – Springer-Verlag, 1980.
- [272] Sarkisyan A. S., Ibraev R. et al. A note on modelling the world ocean climate // Ocean Modelling. 1990. V. 89, No. 10.
- [273] Sarkisyan A. S., Suendermann J. E. Modelling ocean climate variability. Springer Science + Business Media B. V. – N. Y. ; Heidelberg, 2009. – 374 p.
- [274] Sarkisyan A. S., Zalesny V. B. Splitting-up method and adjoint equation method in the ocean dynamics problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2000. – V. 15, No. 3-4. – Pp. 333–347.
- [275] Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem // Ann. Phys. – 1926. – V. 80. – Pp. 437–490.
- [276] Schwartz L. Théorie des distributions. – Paris: Hermann, 1966.
- [277] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1. The basic experiment // Mon. Weather Rev. – 1963. – V. 91, 99.
- [278] Smedstad O. M., O'Brien J. J. Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial Pacific Ocean model // Prog. Oceanolog. – 1991. – V. 26, No. 179.
- [279] Sobolev S. L. Application of Functional Analysis in Mathematical Physics. – Leningrad, 1950 (Transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Math. Mono 7, 1963.)
- [280] Stoker L. J. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. – N. Y.: Interscience Publishers (Pure and Appl. Math. A Series of Texts and Monographs, V. VI), 1957.

- [281] Strang G. On the construction and comparison of difference schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1968. – V. 6.
- [282] Strang G. *Linear Algebra and its Applications.* – N. Y. etc.: Academic Press, 1976.
- [283] Talagrand O., Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part I: Theory // *Quart J. Roy. Meteor. Soc.* – 1987. – V. 113. – P. 1311.
- [284] Titchmarsh E. C. Some theorems on perturbation theory. V // *J. Analyse Math.* – 1954/55. – V. 4. – Pp. 187–208.
- [285] Van Dyke M. D. *Perturbation methods in fluid mechanics.* – N. Y.: Academic Press, 1964.
- [286] Wallace J. M., Hobbs P. V. *Atmospheric Science (an introductory survey).* – N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1977.
- [287] Wang Zhi, Navon I. M., Le Dimet F. X., Zou X. The second order adjoint analysis: Theory and Applications // *Meteorology and Atmospheric Physics.* – 1992.
- [288] Weinderg A., Wigner E. *The physical Theory of Neutron Chain Reactors.* – Chicago, 1958.
- [289] Wilkinson J. *The Algebraic Eigenvalue Problem.* – Oxford: Claredon Press, 1965.
- [290] Yosida K. *Functional Analysis.* – Berlin: Springer, 1971.
- [291] Zalesny V. B., Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Bagno A. V., Gusev A. V., Diansky N. A., Moshonkin S. N., Tamsalu R., Volodin E. M. Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on the multicomponent splitting method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2010. – V. 25, No. 6. – Pp. 581–609.
- [292] Zalesny V. B., Rusakov A. S. Numerical algorithm of data assimilation based on splitting and adjoint equation methods // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2007. – V. 22, No. 2. – Pp. 199–219.

- [293] Zalesny V. B., Gusev A. V. Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – V. 24, No. 2. – Pp. 171–190.
- [294] Zalesny V. B., Zakharova N. B., Gusev A. V. Four-dimensional problem of variational initialization of hydrophysical fields of the World Ocean // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2011. – V. 26, No. 2. – Pp. 209–229.
- [295] Zou X., Navon I. M., Le Dimet F. X. Incomplete observations and control of gravity waves in variational data assimilation, Tellus, 44A, 273, 1992.
- [296] Zou X., Navon I. M., Sela J. G. Variational data assimilation with moist threshold processes using the NMC spectral model (Submitted to Tellus), 1992.

Издатель – Российская академия наук

Публикуется в авторской редакции

Издается по решению Научно-издательского совета  
Российской академии наук (НИСО РАН)  
и распространяется бесплатно

Оригинал–макет подготовлен в ООО «Амирит»

Подписано в печать 28.05.2018 г.

Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 29,06. Тираж 100 экз. Заказ № 47/29117.

Отпечатано в типографии ООО «Амирит»,  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.

Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33

E-mail: [zakaz@amirit.ru](mailto:zakaz@amirit.ru)

Сайт: [amirit.ru](http://amirit.ru)