

Российская академия наук  
Институт вычислительной математики

Марчук Г.И.  
Избранные труды

**Том 5**

**Методы расчёта  
ядерных реакторов**

Москва 2018

УДК 519.6  
ББК 22.19  
С56

Ответственный редактор: д.ф.-м.н., профессор Шутяев В.П.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Ильин В.П.

Марчук Г.И. Избранные труды: в 5 т. / Российская академия наук, Институт вычислительной математики. – М.: РАН, 2018.

Т.5.: Методы расчета ядерных реакторов / [отв. ред. В.П. Шутяев]. – 600 с.

В пятом томе собрания трудов Г. И. Марчука представлены работы по численным методам в теории переноса и методам расчёта ядерных реакторов, в которых изложены главные тенденции в развитии вычислительных методов теории переноса: построение итерационных алгоритмов и оптимизация их на основе аппроксимации операторов задач переноса более простыми операторами, построение оптимальных алгоритмов на основе вариационных методов, применение метода расщепления для редукции сложных задач к простейшим. На фоне этих ведущих направлений представлены алгоритмы, отличающиеся своеобразием и оригинальностью и составившие фундаментальную базу для развития методов расчёта ядерных реакторов. В конце тома приведён развернутый комментарий.

Для специалистов в области теории ядерных реакторов, вычислительной математики и математического моделирования, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-906906-34-2

© Российская академия наук,  
Институт вычислительной  
математики, 2018  
© Марчук Г.И., 2018

# Оглавление

<b>Глава Введение</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Односкоростное кинетическое уравнение переноса нейтронов</b>	<b>23</b>
1.1. Основные определения и понятия	23
1.2. Вывод основного кинетического уравнения	28
1.3. Кинетическое уравнение для различных геометрий	32
1.3.1. Плоскопараллельные задачи	32
1.3.2. Задачи со сферической симметрией	34
1.3.3. Задачи цилиндрической симметрии	36
1.4. Интегральное уравнение Пайерлс	37
1.5. Транспортное приближение	46
1.6. Задачи на критический размер	47
<b>Глава 2. Точечный источник нейтронов в бесконечной среде</b>	<b>51</b>
2.1. Изотопное рассеяние нейтронов	51
2.2. Анизотропное рассеяние. Асимптотический поток нейтронов	57
2.3. Метод моментов	66
2.4. Метод аппроксимации	77
<b>Глава 3. Методы решения кинетических уравнений</b>	<b>86</b>
3.1. Метод Владимирова	86
3.2. Метод Карлсона	102
3.3. Улучшение сходимости метода последовательных приближений	107
3.4. Другой метод улучшения сходимости итерационного процесса	109
3.5. Вариационный принцип	113
3.6. Метод Бубнова – Галеркина	122

<b>Глава 4. Методы решения интегральных уравнений Пайерлса</b>	<b>126</b>
4.1. Метод Крылова - Боголюбова	126
4.2. Распределение нейтронов внутри плоского слоя	128
4.3. Метод вырожденных ядер	130
4.4. Расчет критического размера однородного шара в случае линейной индикатрисы рассеяния с помощью метода вырожденных ядер	138
<b>Глава 5. Метод сферических гармоник</b>	<b>149</b>
5.1. Основные положения метода сферических гармоник. Плоскопараллельные и сферически- симметричные системы	149
5.2. Бесконечные цилиндрические системы	154
5.3. $P_1$ -приближение. Уравнение диффузии	162
5.4. $P_2$ -приближение	168
5.5. Вариационный принцип и метод сферических гармоник	174
<b>Глава 6. Конечно-разностные уравнения для одномерных областей</b>	<b>179</b>
6.1. Общий метод построения конечно-разностных уравнений диффузий для одномерной геометрии	179
6.2. Точность конечно-разностных схем в классе непрерывных функций	183
6.3. Конечно-разностные уравнения в классе разрывных функций	188
6.4. Усовершенствованные конечно-разностные схемы .	192
6.5. Конечно-разностные уравнения для систем дифференциальных уравнений первого порядка	196
6.6. Постановка основных задач	200
6.7. Соотношение баланса	202
6.8. О точности проведения численных расчетов по конечно-разностным схемам	204
6.9. Конечно-разностные уравнения с «фиктивными точками»	207



<b>Глава 7. Конечно-разностные уравнения диффузии для двумерных областей</b>	<b>210</b>
7.1. Общий метод построения конечно-разностных уравнений для двумерных областей	210
7.2. Конечно-разностные уравнения в классе разрывных функций	213
7.3. Дальнейшие обобщения результатов	215
7.4. Матричная форма записи конечно-разностных уравнений для двумерных областей	219
7.5. Соотношение баланса	220
<b>Глава 8. Конечно-разностные уравнения метода сферических гармоник</b>	<b>223</b>
8.1. Конечно-разностные уравнения для задач в плоскопараллельной геометрии	223
8.2. Сферическая геометрия	230
8.3. Цилиндрическая геометрия	240
<b>Глава 9. Решение конечно-разностных уравнений</b>	<b>244</b>
9.1. Метод факторизации уравнения диффузии	244
9.2. Метод факторизации конечно-разностных уравнений для одномерных областей	246
9.3. Метод разностных уравнений методом матричной факторизации	251
9.4. Итерационные методы решения разностных уравнений	255
<b>Глава 10. Элементарные процессы в ядерных реакторах</b>	<b>263</b>
10.1. Упругое рассеяние нейтронов	263
10.2. Неупругое рассеяние нейтронов. Реакция $(n, 2n)$	266
10.3. Деление	269
10.4. Захват нейтронов	271
10.5. Резонансная структура сечений	272
10.6. Физический расчет ядерного реактора	274
<b>Глава 11. Кинетическое уравнение реактора</b>	<b>278</b>
11.1. Кинетическое уравнение замедления	278
11.2. Граничные условия	288
11.3. Односкоростное кинетическое уравнение	289

11.4. Кинетическое уравнение для бесконечной однородной среды	292
<b>Глава 12. Сопряженные уравнения</b>	<b>294</b>
12.1. Общая теория сопряженных уравнений реактора	294
12.2. Сопряженные уравнения реактора	299
12.3. Односкоростное сопряженное уравнение реактора	303
12.4. Сопряженной уравнение для бесконечной однородной среды	304
12.5. Теория возмущений	305
12.6. Формулы теории возмущений	307
<b>Глава 13. Диффузное приближение</b>	<b>311</b>
13.1. $P_1$ -приближение	311
13.2. Сопряженные уравнения в диффузионном приближении	315
13.3. Диффузионно-возрастное приближение	317
13.4. Уточнение возрастной теории	323
<b>Глава 14. <math>P_n</math>-приближение</b>	<b>331</b>
14.1. Основные уравнения реактора в $P_n$ -приближении	331
14.2. Сопряженные уравнения в $P_n$ -приближении	336
14.3. $P_3$ -приближение	343
<b>Глава 15. Многогрупповые кинетические уравнения реактора</b>	<b>348</b>
15.1. Основные положения	348
15.2. Формулы усреднения для групповых констант	349
15.3. Многогрупповая система основных и сопряженных уравнений реактора	355
15.4. Дальнейшие обобщения метода групп	358
15.5. Многогрупповая теория возмущений	360
<b>Глава 16. Многогрупповые уравнения реактора в <math>P_1</math>-приближении</b>	<b>363</b>
16.1. Уравнения реактора в $P_1$ -приближении	363
16.2. Метод усреднения физических констант в надтепловой области	370
16.3. Дальнейшие преобразования формул для усредненных групповых констант	377

16.4. Простейшие методы усреднения физических констант	385
16.5. Приведение многогрупповых уравнений реактора к виду, удобному для расчетов	388
16.6. Учет резонансных эффектов	391
<b>Глава 17. Многогрупповая система уравнений реактора в диффузионно-возрастном приближении</b>	<b>394</b>
17.1. Многогрупповая система основных и сопряженных уравнений	394
17.2. Приближенный расчет спектра нейтронов в реакторе	397
17.3. Усреднение физических констант по спектру нейтронов в реакторе	403
17.4. Расчет эффективной добавки	405
<b>Глава 18. Многогрупповая система уравнений реактора в <math>P_n</math>-приближении</b>	<b>408</b>
18.1. Основные и сопряженные уравнения в $P_n$ -приближении	408
18.2. Приведение уравнений реактора к виду, удобному для расчетов	414
18.3. $P_2$ -приближение	418
18.4. Эффективные методы расчета многогрупповых констант	421
18.5. Теория возмущений	423
<b>Глава 19. Проекционно-сеточный метод и <math>P_{NI}</math>-уравнения</b>	<b>427</b>
19.1. Формулировка задачи переноса и некоторые обозначения	427
19.2. Формулировка проекционно-сеточного алгоритма на основе минимизации функционала	436
19.3. Проекционно-сеточные схемы для некоторых задач	444
19.3.1. Плоская геометрия	444
19.3.2. Сферически-симметричная геометрия	448
19.3.3. Многомерный случай	450
19.4. $P_{NI}$ -уравнения, вывод	452

19.5. $P_{1l}$ -уравнения	455
19.6. Построение проекционно-сеточных схем на основе метода Галеркина	457
19.7. Обобщенный метод Бубнова – Галеркина со специальным выбором базисных функций	460
19.7.1. Общая схема алгоритма	460
19.7.2. Решение уравнения переноса в плоскопараллельной геометрии	462
<b>Глава 20. Итерационные методы решения задач переноса.</b>	<b>467</b>
20.1. Специфика итерационных методов для задач переноса. Метод простой итерации	467
20.2. Метод Л. А. Люстерника	470
20.3. Метод оценки итерационных отклонений	471
20.4. Итерационные схемы с балансными множителями и мультипликативными поправками	473
20.5. Квазидиффузионный метод	475
20.6. $KP$ -метод	478
20.7. Сходимость $KP$ -метода	480
20.8. Решение кинетического уравнения методом расщепления	482
20.9. О некоторых монотонных схемах расщепления	487
20.10 Метод сопряженных градиентов решения кинетических уравнений	489
<b>Глава 21. Физический расчет ядерных реакторов</b>	<b>496</b>
21.1. Многогрупповой расчет критической массы реактора и спектра нейтронов	496
21.2. Усреднение групповых констант	501
21.3. Малогрупповые приближения	503
21.4. Расчет гетерогенных реакторов и системы компенсации	505
<b>Глава 22. Критические массы гомогенных реакторов</b>	<b>508</b>
22.1. Общие положения расчета критических масс	508
22.2. Реакторы на графите	510
22.3. Реакторы на бериллии	513

---

22.4. Реакторы на воде	515
22.5. Сопоставление результатов расчета критических масс гомогенных реакторов с экспериментальными данными	518
<b>Глава 23. К расчету секционированных ядерно-энергетических установок</b>	<b>525</b>
23.1. Секционированная реакторная система	525
23.2. Математическая модель системы	527
23.3. Результаты численных расчетов	531
<b>Литература</b>	<b>536</b>
<b>Приложение</b>	<b>587</b>
<b>Комментарии</b>	<b>593</b>

## Введение

Широкое применение в расчетах быстродействующей вычислительной техники создало благоприятные условия для развития многих областей науки и техники. Новейшие достижения вычислительной математики позволили пересмотреть алгоритмы решения многих задач математической физики и разработать новые алгоритмы, основанные на использовании численных методов, поддающихся эффективной реализации на вычислительных машинах.

Таким образом, аналитические методы решения задач во многих случаях уступили место более эффективным численным методам.

Использование в расчетах быстродействующей вычислительной техники позволило поставить новые задачи науки и техники, большой объем вычислительных работ которых казался ранее практически неосуществимым. В результате создались такие условия, при которых оказалось возможным решать сложнейшие математические и логические задачи. В связи с этим основное значение приобрели вопросы, связанные с математической постановкой задач и с разработкой эффективных вычислительных алгоритмов.

Успехи в области вычислительной математики оказали большое влияние на развитие теории и методов расчета ядерных реакторов. После книги С. Глесстона и М. Эдлунда [106], в которой были изложены элементарные основы теории реакторов на тепловых нейтронах, появилась монография А. Д. Галанина [84], посвященная вопросам дальнейшего развития теории реакторов на тепловых нейтронах. Общие научные и теоретические основы атомной энергетики в дальнейшем были изложены в книгах А. Вейгберга и Е. Вигнера [66], а также Б. Дэвисона [135]. Наконец, в монографии [230] рассмотрены численные методы расчета ядерных реакторов.

Не утратили своего теоретического значения работы раннего периода развития атомной энергетики. Это работы

У. Вигнера [521], Г. Плачека [489, 491, 492], Пайерлса [486], Р. Маршака [476–479], Н. Н. Боголюбова [50], И. И. Гуревича и И. Я. Померанчука [119], Г. Вика [519, 520], А. Вейнберга [516, 517], Г. Бете [410].

Дальнейшее развитие теории ядерных реакторов и методы расчета получили в докладах Первой и Второй международных конференций по мирному использованию атомной энергии в Женеве.

Большое развитие теории ядерных реакторов и методы расчета получили в Советском Союзе в работах И. В. Курчатова [191], А. П. Александрова [23], А. И. Алиханова [25], Д. И. Блохинцева [46–48], В. С. Фурсова [374], И. И. Гуревича и И. Я. Померанчука [119], А. К. Красина [174, 175], С. М. Фейнберга [368–372], А. Д. Галанина [84–91], В. И. Мостового [285], В. В. Орлова [298, 299], Б. Г. Дубовского [129, 241], В. Ф. Турчина [359, 360], В. В. Смелова [260], [330–336] и др. На основе этих работ были научно обоснованы проекты ядерных реакторов для большого числа энергетических установок, таких как Воронежская, Белоярская атомные электростанции, ледокол «Ленин» и др., а также большого числа экспериментальных реакторов с различными замедлителями и теплоносителями [92, 327, 370–372].

Теория и методы расчета реакторов на промежуточных нейтронах получили развитие в работах А. И. Лейпунского, А. С. Романовича, Л. Н. Усачева [362, 365], В. Я. Пупко [259, 309, 310], В. А. Кузнецова, Б. Ф. Громова, Г. И. Тошинского, А. И. Могильнера, В. В. Чекунова, В. В. Орлова [257, 299].

Методы расчета реакторов на быстрых нейтронах были развиты в работах А. И. Лейпунского [217, 218], Д. И. Блохинцева [49], Л. Н. Усачева [362, 365], О. Д. Казачковского [151, 217,

218], И. И. Бондаренко [52, 217, 218], С. Б. Шихова [294, 385], Ю. А. Стависского [217, 218], а также В. С. Владимирова [70, 80], Ю. А. Романова [315] и др. Указанные работы позволили научно обосновать проекты атомных энергетических установок БР-1 и БР-2, построенных и пущенных в эксплуатацию соответственно в 1957 и 1959 гг.

Обзор работ иностранных ученых по теории и методам расчета реакторов был сделан в докладах, представленных

на Первую и Вторую международные конференции по мирному использованию атомной энергии в Женеве [164-165, 220, 272, 284, 296, 345, 347] и др.

Существенное развитие в те годы получила также и вычислительная математика, основные результаты которой были получены коллективом Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР под научным руководством академика М. В. Келдыша. Наиболее значительные результаты этих работ относятся к решению конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами.

Для решения трехточечных конечно-разностных уравнений эллиптического типа И. М. Гельфанд и О. В. Локуциевский [96] и, независимо, А. С. Кронрод и Штарк сформулировали метод факторизации, который позволил краевую задачу свести к последовательному решению трех конечно-разностных уравнений первого порядка. В дальнейшем М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд и О. В. Локуциевский вместе с К. И. Бабенко, В. В. Русановым и Н. Н. Ченцовым (см. [230]) существенно развили методы решения конечно-разностных уравнений, разработав аппарат матричной факторизации применительно к системам разностных уравнений. В частности, это позволило сформулировать новый метод решения многомерных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Метод матричной факторизации оказал решающее влияние на развитие численных методов решения уравнений метода сферических гармоник применительно к задачам атомной энергетики.

Изучению конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения эллиптического типа, посвящены работы А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [353-356]. А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским весьма полно исследованы вопросы построения трехточечных конечно-разностных схем, даны практические алгоритмы наиболее рациональной аппроксимации дифференциальных уравнений конечно-разностными, а также установлены общие свойства решений разностных уравнений. Ими введено понятие интегральной точности решения конечно-разностного уравнения по отношению к решению дифференциального уравнения и доказаны теоремы о сходимости



сти решений конечно-разностного уравнения. В частности, доказано, что построенные ими разностные уравнения в классе разрывных коэффициентов имеют второй интегральный порядок точности.

В связи с развитием функционального анализа, теории обобщенных функций и теории обобщенных решений краевых задач получили глубокое развитие математические исследования свойств решений задач переноса. Исследования таких вопросов, как существование и единственность решения, его гладкость, непрерывная зависимость от коэффициентов уравнения и правой части, спектральные свойства, вариационные принципы и свойства операторов уравнения переноса, заложили фундамент для применения и оценки эффективности численных методов. Этим вопросам посвящены работы В. С. Владимирова В. С. [69–78], Гермогеновой Т. А. [99–104], Шихова С. Б. [387], Агошкова В. И. [7–12], Шутяева В. П. [391–394, 497] и др. Математическая теория ядерных реакторов для нелинейных задач развита в работах Шихова С. Б. и А.Крянева А. В. [388].

За последние годы для решения кинетических уравнений было создано большое число разнообразных и оригинальных разностных аппроксимаций и вычислительных алгоритмов, основанных на итерационных методах и вариационных принципах. Это позволило существенно повысить эффективность реализации алгоритмов на ЭВМ. Актуальными стали исследования связей между объемом вычислительной работы и достижимым качеством приближения. Очевидно, что тип аппроксимации разностными уравнениями, разность между решениями дискретной и непрерывной задач, скорость сходимости итерационного метода решения разностных уравнений (и выбор в нем итерационных операторов), общее число действий, необходимых для решения задачи с заданной точностью, а также выбор пространств, в которых оцениваются погрешность и скорость сходимости итераций, являются взаимосвязанными характеристиками. Современное состояние вычислительной математики уже настоятельно требует исследования и учета при выборе алгоритма решения взаимных зависимостей описанных факторов, ибо только тогда можно говорить о разумном выборе вычислительного алгоритма и его операторов для решения с хорошей

точностью непрерывной задачи. Перечисленным вопросам посвящены работы Лебедева В. И. [200–216], Владимирова В. С. [69–79], Агошкова В. И. [4–12] и др.

Если говорить о главных тенденциях в развитии вычислительных методов в настоящее время, то можно отметить следующие: построение итерационных алгоритмов и оптимизация их на основе аппроксимации операторов задач переноса более простыми операторами, построение оптимальных алгоритмов на основе вариационных методов, применение метода расщепления для редукции сложных задач к простейшим. На фоне этих ведущих направлений возникают алгоритмы, отличающиеся своеобразием и оригинальностью.

Все указанные выше работы по численным методам подготовили базу для дальнейшего развития методов расчета ядерных реакторов. Эти методы и составляют основное содержание настоящей монографии.

Книга состоит из 23 глав. Первая часть книги (главы 1–5) посвящена вопросам диффузии нейтронов. Рассмотрение вопросов ведется в предположении, что все нейтроны имеют одинаковую скорость и различаются только направлением вектора скорости.

В главе 1 дан краткий вывод односкоростных уравнений переноса нейтронов. Получено интегро-дифференциальное уравнение в различных геометриях, а также рассмотрено интегральное уравнение Пайерлса, соответствующее уравнению переноса частиц. Особое внимание уделено транспортному приближению. В заключение сформулированы задачи на критический размер ядерного реактора.

В главе 2 изложены результаты решения уравнений переноса в случае точечного источника нейтронов в бесконечной среде. Рассмотрение ведется сначала для случая изотропного рассеяния нейтронов.

Далее исследуется задача об асимптотической плотности нейтронов на больших расстояниях от источника. Напримере односкоростной задачи рассмотрен метод моментов, а также метод аппроксимаций, разработанный Ш. С. Николайшвили [291]. В различных случаях эти методы позволяют получать решения задач на перенос нейтронов и  $\gamma$ -квантов.

В главе 3 изложены численные методы решения кинетических уравнений. Существенное внимание уделено наиболее распространенным в физических расчетах ядерных реакторов численным методам В. С. Владимирова [70] и Б. Карлсона [159]. Подробно изучен вопрос об улучшении сходимости итерационных процессов, являющихся составным элементом алгоритмов решения кинетических уравнений по методу Владимирова и Карлсона. Наряду с хорошо известным методом Л. А. Люстерника, излагается другой метод улучшения сходимости метода последовательных приближений, сформулированный В. П. Морозовым [283]. В заключение главы описан предложенный В. С. Владимировым вариационный метод решения уравнений переноса нейтронов [77].

В главе 4 изложены методы решения интегральных уравнений Пайерлса. Сначала рассмотрен метод Крылова-Боголюбова, получивший широкое распространение при решении интегральных уравнений. Этот метод иллюстрируется на задаче о распределении нейтронов внутри плоского слоя. Затем особое внимание уделяется методу вырожденных ядер. Этот метод иллюстрируется на примере расчета критического размера однородного шара в случае изотропной, а также в простейшем случае – неизотропной индикатрисы рассеяния нейтронов.

В главе 5 дано общее описание метода сферических гармоник, развитого в работах Г. Вика [520], Р. Маршака [478, 476, 477], С. Марка [475], Б. Дэвисона [135, 426, 427], Л. Н. Усачева [363], М. Вана и Е. Гута [515], С. Чандрасекара [377] и др., а также приведены основные положения метода, дополненные конкретными применениями к случаю плоско-параллельных и сферически-симметричных систем. Рассмотрены одномерные цилиндрические системы. Особое внимание уделяется  $P_1$ -приближению, а также диффузионному приближению.

Г. Я. Румянцев впервые обратил внимание на возможность практического использования в расчетах четных приближений метода сферических гармоник, при этом им было уделено особое внимание приближению в расчетах  $P_2$ -приближения. Следует отметить, что Г. Я. Румянцев также развил метод сферических гармоник для произвольной геометрии в вопросах постановки корректных граничных условий [317, 318].

Исследование вопроса о решении уравнения переноса в случае точечного источника в бесконечной среде с помощью метода сферических гармоник проведено Ш. С.Николайшвили [254, 255].

В заключение главы сформулирован вариационный принцип, предложенный В. С. Владимировым [71, 72, 77]. На основе вариационного принципа осуществлен вывод уравнений сферических гармоник для различных геометрий в случае изотропной индикатрисы рассеяния и одновременно получены граничные уравнения, совпадающие с условиями Р. Маршака. Следует отметить, что методы, изложенные в главах 1–5 книги, имеют общий характер и без особого труда могут быть применены к решению более сложных задач. В частности, они могут служить основой для решения задач на критический размер реактора.

Следующая часть книги посвящена вопросам построения конечно-разностных уравнений эллиптического типа, имеющих большое значение в расчетах ядерных реакторов.

В главе 6 рассмотрены конечно-разностные уравнения диффузии для одномерных областей. Изложение ведется на основе упомянутых выше результатов А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [354, 353].

Рассмотрены простейшие конечно-разностные уравнения диффузии в классе разрывных коэффициентов. Указаны пути усовершенствования конечно-разностных уравнений. Построены разностные уравнения для системы двух диффузионных уравнений первого порядка. Введены в рассмотрение конечно-разностные уравнения баланса, позволяющие контролировать правильность решения задачи в конечно-разностной формулировке. Наконец, приводится замечание о точности проведения численных расчетов по конечно-разностным схемам, а также устанавливается связь между конечно-разностными уравнениями непрерывного счета с разностными уравнениями, построенными с помощью метода введения фиктивных точек.

В главе 7 изложены результаты построения конечно-разностных уравнений для двумерных областей. Вводится в рассмотрение общий метод построения разностных уравнений для многомерных областей в классе разрывных коэффициентов. Приведена матричная форма записи конечно-разностных урав-

нений для двумерных областей, а также сформулированы соответствующие соотношения баланса.

В главе 8 дано построение конечно-разностных уравнений методом сферических гармоник. Это построение целесообразно при использовании матричной записи исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, составляющих вместе с граничными условиями краевую задачу. Конечно-разностные уравнения сформулированы для областей плоскопараллельной, сферически-симметричной и цилиндрической геометрий. Следует подчеркнуть, что использование новых методов решения конечно-разностных уравнений позволило существенно повысить эффективность применения метода сферических гармоник для решения широкого класса реакторных задач.

В главе 9 изложены методы решения конечно-разностных уравнений. Наиболее эффективным методом решения разностных уравнений эллиптического типа является метод факторизации. Метод линейной конечно-разностной факторизации позволяет эффективно решать многие задачи физического расчета реакторов. Далее изложены методы решения конечно-разностного уравнения диффузии для двумерной геометрии. Соответствующую задачу оказалось возможным сформулировать в векторно-матричной форме, формально совпадающей с трехточечной линейной матричной схемой. Решение этой задачи находится с помощью метода матричной факторизации. Следует, однако, заметить, что при решении конечно-разностного уравнения эллиптического типа методом матричной факторизации при большом числе узловых точек приходится иметь дело с матрицами высокого порядка. Это существенно снижает возможности эффективного применения матричной факторизации для решения указанных задач.

Н. И. Булеев сделал удачную попытку разработать итерационный метод, являющийся комбинацией релаксационного процесса с методом линейной факторизации [59, 60]. Этот метод по своей простоте не уступает простейшим итерационным процессам Либмана и Зейделя, но сходится во много раз быстрее. Среди других методов, успешно применяемых к решению двумерных конечно-разностных уравнений, следует отметить ме-

тод продольно-поперечной линейной факторизации, рассмотренный Дж. Дугласом [429, 430], Н. Н. Яненко [398, 399] и К. К. Саулевым [323, 324].

Следует отметить, что эффективное решение конечно-разностных уравнений сферических гармоник проводится методом матричной факторизации.

Часть книги посвящена вопросам замедления нейтронов. Глава 10 носит вводный характер. В ней рассмотрены элементарные процессы, происходящие в ядерном реакторе, обсуждена структура сечений взаимодействия нейтронов с ядрами и сформулированы основы физического расчета ядерного реактора.

В главе 11 дан вывод кинетического уравнения реактора. Сформулировано уравнение замедления и поставлены граничные условия. Рассмотрены частные случаи кинетического уравнения реактора, а именно, задача с постоянными сечениями и задача с энергетической зависимостью.

В главе 12 сформулированы сопряженные уравнения реактора. Приводится общая теория сопряженных уравнений, разработанная автором совместно с В. В. Орловым [257], которая несколько обобщает известные результаты Е. Вигнера [516, 521], Л. Н. Усачева [362, 365], Н. Фукса [442], Б. Б. Кадомцева [147] и Б. Дэвисона [135]. Введены в рассмотрение важнейшие линейные функционалы и построены сопряженные уравнения по отношению к данным функционалам. Рассмотрение теории сопряженных уравнений заканчивается выводом формул теории возмущений.

Глава 13 посвящена диффузионному приближению. Следуя Р. Маршаку [479], приближенное решение кинетического уравнения ищется с помощью двух членов ряда по сферическим функциям. В результате приходим к двум интегро-дифференциальным уравнениям, образующим замкнутую систему уравнений реактора. Для замедлителей с  $M \gg 1$  решение уравнений замедления ищется в виде ряда по летаргии. Это позволяет освободиться в уравнениях от интегрального оператора и в результате задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений для функций, зависящих от пространственных координат и летаргии. В заключении главы рассмотрены вопро-

сы об уточнении диффузионно-возрастной теории, исследованные Е. Грейлингом и Д. Гёрцелем (см. [106]).

В главе 14 изложены методы решения уравнений реактора в  $P_n$ -приближении, позволяющие уточнить решения, полученные в диффузионном приближении. Сформулированы основные и сопряженные уравнения в  $P_n$ -приближении и соответствующие граничные условия. Особое внимание уделено  $P_3$ -приближению, представляющему большой интерес в задачах на критическую массу реактора.

В следующей части книги рассмотрены методы группового представления уравнений реактора.

Глава 15 посвящена выводу многогрупповой системы основных и сопряженных кинетических уравнений реактора. Метод группового усреднения производится таким образом, чтобы при переходе от исходной задачи к многогрупповой наиболее существенный функционал не изменился. Если в качестве функционала задачи рассматривать критический размер реактора, то при построении многогруппой системы требуется, чтобы критическая масса реактора не изменялась. Если в качестве функционала выбрать, например, дозу выходящего из реактора излучения, как это имеет место при расчетах защиты от излучения, то при переходе к многогрупповой задаче требуется, чтобы доза выходящего излучения оставалась неизменной. Естественно, что при усреднениях, рассчитанных на сохранение тех или иных функционалов, изменяется вид сопряженных функций, которые также берутся по отношению к фиксированному функционалу. Если количество групп возрастает, то оказывается безразличным способ усреднения и, таким образом, имеется возможность составления универсальных многогрупповых констант, не зависящих от спектра нейтронов в реакторе. Это, во всяком случае, справедливо для задач, связанных с расчетом критической массы или реактивностью реактора. Что касается задач на прохождение нейтронов через защиту, то для них, по-видимому, практически невозможно составить универсальную многогрупповую систему констант, справедливую для расчетов как малогабаритных, так и асимптотических больших защит.



В главе 16 изложены основные алгоритмы для получения многогрупповых уравнений реактора в  $P_1$ -приближении. Изложены методы усреднения физических констант в надтепловой области, проведены преобразования формул для усредненных физических констант и даны простейшие методы усреднения.

Следует отметить, что вопросу наиболее рационального усреднения физических констант в литературе уделено достаточно большое внимание. Эти вопросы, в частности, нашли отражение в работах Р. Эрлиха и Г. Гурвитца [434], С. Глесстона и М. Эдлунда [106], Л. Н. Усачева [362, 365], Г. И. Марчука [230, 261, 234] и др. Во многих указанных работах физические константы усредняются для реакторов с замедлителями из смеси элементов, не содержащих водород.

Метод усреднения констант по группам для смесей, содержащих ядра водорода, был предложен Г. И. Марчуком и Н. Я. Лященко [372]. В дальнейшем этот метод был существенно развит Н. Я. Лященко и применен к широкому классу задач.

В монографии автора [230] сформулирован аппроксимационный метод расчета уран-водных реакторов, который можно также использовать для физических расчетов. В настоящей монографии при рассмотрении вопросов многогруппового представления уравнений реактора автор избрал другой путь, основанный на применении аппарата теории возмущений, позволяющего производить усреднение констант с учетом статистических весов, которыми являются решения многогрупповой системы сопряженных уравнений реактора по отношению к фиксированному функционалу.

В заключении гл. 16 основные и сопряженные уравнения реактора приводятся к виду, удобному для ведения практических расчетов. Существенное внимание также уделено учету резонансных эффектов при многогрупповом расчете.

В главе 17 дается построение многогрупповой системы уравнений реактора в диффузионно-возрастном приближении. Выводятся формулы многогруппой системы констант и обсуждаются пути практического осуществления алгоритма. Существенное внимание уделено методу расчета пространственноэнергетического распределения нейтронов в ре-



акторе. Полученный спектр нейтронов в реакторе может быть использован для многогруппового усреднения констант и более точного решения задачи. В заключение приводится метод расчета эффективной добавки к активной зоне за счет отражателя.

Глава 18 посвящена распространению многогруппового метода на задачи в  $P_n$ -приближении. Даны эффективные методы расчета многогрупповой системы констант, основанные на использовании спектра нейтронов, полученного в диффузионном или  $P_1$ -приближениях. Особое место в главе отводится  $P_2$ -приближению, которое по своей реализации не более сложно, чем  $P_1$ -приближение.

В главе 19 излагаются проекционно-сеточные алгоритмы для решения задач теории переноса. Эти методы получили развитие в работах С. Юкаи [508], В. И. Лебедева [203], П. Лесэна, П. Равьяра [466], М. Борисевича, Р. Станкевича [412], Г. И. Марчука, В. И. Агошкова [237, 4]. Здесь на основании интегральных тождеств построены так называемые  $P_{NI}$ -уравнения для приближённого решения кинетических уравнений. Рассмотрены проекционно-сеточные алгоритмы со специальным выбором базисных функций.

Глава 20 посвящена итерационным методам решения задач переноса нейтронов. Особое внимание уделено вопросам сходимости алгоритмов. Здесь обсуждается построение итерационных алгоритмов и их оптимизация на основе аппроксимации операторов задач переноса более простыми операторами, применение метода расщепления для редукции сложных задач к последовательности простейших.

В главе 21 изложены методы физического расчета ядерных реакторов; сформулированы типичные задачи на расчет критических масс и спектра нейтронов; приведены практические алгоритмы усреднения групповых констант; дана постановка задач, учитывающих использование малогрупповых приближений. В заключение рассмотрены задачи расчета гетерогенных реакторов и системы компенсации. В сущности говоря, в этой главе приведена постановка большинства задач физического расчета и обсуждены практические алгоритмы их решения на основе результатов предыдущих глав книги.

В главе 22 приведены результаты расчета критических масс реакторов в широком диапазоне нейтронных спектров: от быстрых до тепловых. Первая попытка систематического обобщения результатов расчета критических масс гомогенных реакторов была сделана в работах В. Я. Пупко [309, 310] и в работе Т. Н. Зубарева, Г. И. Марчука и А. К. Соколова [144].

В работе [144] приведены критические массы уран-бериллиевых, уран-графитовых и уран-водных реакторов, а также реакторов, состоящих из смесей урана-235 и плутония-239, расчет которых произведен автором совместно с В. П. Кочергиным, Е. И. Погудалиной, В. В. Колесовым, Г. А. Илясовой и Л. И. Кузнецовой [249, 250, 251, 245]. Впоследствии эти работы были повторены автором совместно с В. П. Кочергиным, А. И. Невиницей и О. П. Узнадзе [247] на основе использования более точной 21-групповой системы констант. Кроме того, рассчитано большое количество новых вариантов, существенных для проектирования реакторов разнообразных спектров.

Глава 23 посвящена расчёту секционированных ядерно-энергетических установок, предусматривающих возможность получения ядерной энергии в подкритических реакторах и значительного увеличения глубины выгорания делящегося изотопа. Математические методы расчётов основаны на использовании матричной факторизации конечно-разностных уравнений реактора. Эти расчёты были выполнены автором совместно с Б. Г. Дубовским, В. В. Смеловым, З. Н. Милютиной [241].

В приложении к книге приведены некоторые сведения о работах физико-энергетического института по термоядерному оружию.

## 1

# Односкоростное кинетическое уравнение переноса нейтронов

## 1.1. Основные определения и понятия

Нейтрон является элементарной частицей. Нейтрон не заряжен, масса его приблизительно равна массе протона. В дальнейшем условно примем массу нейтрона равной единице. Будем считать, что в момент времени  $t$  нейтрон характеризуется радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и вектором скорости  $\mathbf{v}$ . Совокупность векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  образует шестимерное фазовое пространство.

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  запишем в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Вектор скорости нейтронов будем считать равным

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\Omega},$$

где  $v$  — скорость нейтрона, а  $\boldsymbol{\Omega}$  — единичный вектор направления полета нейтрона

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}.$$

В сферической системе координат компоненты вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  представляются в виде

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \sin \vartheta \cos \psi, \\ \Omega_y &= \sin \vartheta \sin \psi, \\ \Omega_z &= \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Элемент объема в шестимерном фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  равен

$$dV = d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

Наряду с пространством  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  удобно ввести в рассмотрение также шестимерное фазовое пространство  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  с элементом объема

$$dW = d\mathbf{r} d\boldsymbol{\Omega}.$$

Очевидно, связь элементов объема  $dV$  и  $dW$  осуществляется с помощью равенства

$$dV = v^2 dW.$$

*Плотностью нейтронов* будем называть количество нейтронов в единице фазового пространства, летящих в направлении  $\Omega$  в момент времени  $t$ . Плотность нейтронов в пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  будем характеризовать величиной  $n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , а в пространстве  $(\mathbf{r}, \Omega)$  — величиной  $n(\mathbf{r}, \Omega)$ . Тогда количество нейтронов в элементе фазового пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  будет равно

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

а в элементе фазового пространства  $(\mathbf{r}, \Omega)$  —

$$n(\mathbf{r}, \Omega) d\mathbf{r} d\Omega.$$

Потребуем, чтобы полное число нейтронов во всем пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  равнялось по числу нейтронов в пространстве  $(\mathbf{r}, \Omega)$ , то есть

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r} \int d\Omega n(\mathbf{r}, \Omega).$$

Учитывая, что  $d\mathbf{v} = v^2 d\Omega$ , будем иметь

$$\int d\mathbf{r} \int d\Omega v^2 n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r} \int d\Omega n(\mathbf{r}, \Omega).$$

Отсюда следует, что связь между плотностью нейтронов в пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  и плотностью нейтронов в пространстве  $(\mathbf{r}, \Omega)$  осуществляется с помощью равенства

$$v^2 n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}, \Omega).$$

*Поток нейтронов* определим как количество нейтронов, пересекающих в единицу времени единичную площадку, ориентированную перпендикулярно вектору скорости. Эту величину будем обозначать для пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

и для пространства  $(\mathbf{r}, \Omega)$

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = v n(\mathbf{r}, \Omega).$$

*Полный поток нейтронов* определим как число нейтронов, пересекающих в единицу времени единичную сферу около точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned}\varphi_0(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \\ \varphi_0(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega).\end{aligned}$$

*Индикатриса рассеяния.* Будем предполагать, что рассеяние нейтронов на ядре вещества происходит без потери скорости. Это значит, что при рассеянии нейтрон может изменить только направление полета. Так, если нейтрон до столкновения с ядром летел по направлению  $\Omega'$ , то после столкновения он полетит по направлению  $\Omega$ . Вероятность такого события равна

$$\frac{1}{4\pi} g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (1.1.1)$$

где  $\frac{1}{4\pi} g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  — плотность рассеяния нейтрона, или индикатриса рассеяния. В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \Omega)$  индикатриса рассеяния имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} g(\Omega' \rightarrow \Omega).$$

Связь функций  $g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  и  $g(\Omega' \rightarrow \Omega)$  дается соотношением

$$v^2 g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = g(\Omega' \rightarrow \Omega).$$

Так как вероятность того, что нейтрон в результате рассеяния полетит в каком-нибудь направлении — событие достоверное, то мы приходим к нормировке для индикатрисы рассеяния

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v} g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 1,$$

или

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega g(\Omega' \rightarrow \Omega) = 1. \quad (1.1.2)$$

Если рассеяние нейтронов изотропно, то есть равновероятно по отношению к телесному углу  $\Omega$ , то в этом случае

$$g(\Omega' \rightarrow \Omega) = 1. \quad (1.1.3)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением таких случаев, когда индикатриса рассеяния зависит только от величины

$$\Omega\Omega' = \mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi-\psi'),$$

где

$$\mu = \cos \vartheta; \quad \mu' = \cos \vartheta'.$$

Тогда будем иметь

$$g(\Omega' \rightarrow \Omega) = g(\mu_0). \quad (1.1.4)$$

*Средний свободный пробег нейтрона.* Рассмотрим пространство, заполненное веществом, поток нейтронов в котором обозначим  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$ . Выделим из среды элементарные объемы вещества  $dr$  и  $dr'$  соответственно около точек  $M$  и  $M'$  (рис. 1). Рассмотрим ослабление потока нейтронов при движении вдоль направления  $\Omega$  из элемента объема  $dr$  в  $dr'$ .

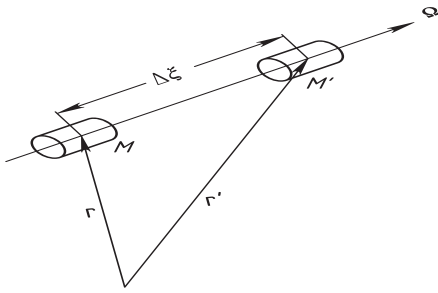


Рис. 1. Путь нейтрона в среде:  $\Omega$  — единичный вектор скорости нейтрона;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор нейтрона в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор в момент  $t + \Delta t$

При движении нейтронов вдоль луча  $\Omega$  часть из них поглотится, а часть рассеется на ядрах вещества. Так как при рассеянии нейтрон изменяет направление полета, то он выбывает из первоначального пучка. Очевидно, число нейтронов, выведенных из первоначального пучка в результате соответствующего ядерно-физического процесса, пропорциональ-

но первоначальному потоку  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$  и пути нейтрона  $\Delta\xi$ . Составим уравнение баланса нейтронов в элементе объема  $dr = dr'$ . С этой целью рассмотрим нейтроны из пучка  $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ . Тогда получим

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) dr d\Omega - \varphi(\mathbf{r}', \Omega) dr d\Omega = \Sigma \Delta\xi \varphi(\mathbf{r}, \Omega) dr d\Omega, \quad (1.1.5)$$

где  $\Sigma$  — константа с размерностью  $(\text{длина})^{-1}$ , зависящая от свойств вещества по отношению к рассматриваемому

ядерно-физическому процессу. Величину  $\Sigma$  называют *макроскопическим сечением*. После сокращений на  $dr d\Omega$  уравнение баланса нейтронов запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) - \varphi(\mathbf{r}', \Omega) = \Sigma \Delta \xi \varphi(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1.1.6)$$

Предположив, что функция  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$  непрерывна и дифференцируема в окрестности точки  $M$ , разложим функцию  $\varphi(\mathbf{r}', \Omega)$  в ряд Тейлора. Ограничиваясь в разложении двумя первыми членами, будем иметь

$$\varphi(\mathbf{r}', \Omega) = \varphi(\mathbf{r}, \Omega) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Delta \xi. \quad (1.1.7)$$

Подставив (1.1.7) в уравнение (1.1.6), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \Sigma \varphi = 0. \quad (1.1.8)$$

Решение уравнения (1.1.8) при условии

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = I(\Omega) \quad (1.1.9)$$

имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}', \Omega) = I(\Omega) e^{-\Sigma \xi}. \quad (1.1.10)$$

Макроскопическое сечение  $\Sigma$  пропорционально количеству ядер вещества в единице объема, то есть

$$\Sigma = \varrho \sigma, \quad (1.1.11)$$

где  $\sigma$  — микроскопическое сечение ядерного процесса, обусловленное взаимодействием нейтрона с единичным ядром вещества. Эту величину можно найти в результате обработки результатов ядерно-физических экспериментов. Величина  $\varrho$  называется *ядерной концентрацией вещества* и находится по формуле

$$\varrho = \gamma \frac{N}{A} = 6,02 \frac{\gamma}{A} \cdot 10^{23}, \quad (1.1.12)$$

где  $\gamma$  — плотность вещества, г/см<sup>3</sup>;  $A$  — атомный номер;  $N$  — число Авогадро ( $6,02 \cdot 10^{23}$ ).

Если вещество состоит из смеси ядер различных элементов, то

$$\Sigma = \sum_k \varrho_k \sigma_k,$$

где суммирование ведется по всем элементам смеси.

Вычислим далее средний путь, который пройдет нейтрон в веществе, не вызывая данного ядерного процесса. Очевидно, он равен математическому ожиданию величины  $\xi$ , то есть

$$l = \frac{\int_0^{\infty} \xi e^{-\Sigma \xi} d\xi}{\int_0^{\infty} e^{-\Sigma \xi} d\xi} = \frac{1}{\Sigma}. \quad (1.1.13)$$

Величину  $l$  называют *средним свободным пробегом* нейтронов для данного процесса. Если вещество состоит из смеси ядер различных сортов, приходим к выражению

$$\frac{1}{l} = \sum_k \frac{1}{l_k}.$$

До сих пор мы не конкретизировали тип ядерно-физического взаимодействия нейтронов с ядрами вещества. Рассмотрим три процесса: рассеяние, радиационный захват и захват с делением. Соответственно этому введем в рассмотрение сечения  $\sigma_s$ ,  $\sigma_a$  и  $\sigma_f$ . В дальнейшем также удобно ввести следующие величины: сечение захвата

$$\sigma_c = \sigma_a + \sigma_f$$

и полное сечение

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_c.$$

## 1.2. Вывод основного кинетического уравнения

Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор нейтрона в момент времени  $t$ , а  $\mathbf{v}$  — вектор скорости нейтрона. Рассмотрим баланс нейтронов в объеме  $d\mathbf{r}$  около точки  $M$ , летящих в направлении  $\Omega$ . С этой целью около точки  $M$  выделим цилиндр объемом  $d\mathbf{r}$  и образующей, параллельной вектору  $\Omega$  (см. рис. 1).

Через момент времени  $dt$  нейтроны, заключенные в цилиндре  $d\mathbf{r}$  около точки  $M$  и не рассеявшиеся на ядрах вещества, переместятся в положение около точки  $M'$ , так что расстояние  $MM'$  определится следующим образом:

$$d\xi = v dt.$$

Подсчитаем полное изменение числа нейтронов, летящих в направлении  $\Omega$ , за промежуток времени  $dt$ . Если  $n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — число нейтронов в единице фазового пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$



в момент времени  $t$ , то число нейтронов в объеме  $dr$  около точки  $M$ , имеющих разброс скорости в интервале  $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , будет равно

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

В момент времени  $t + dt$  их число будет

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

Таким образом, полное изменение числа нейтронов в объеме  $d\mathbf{r}$  за время  $dt$  опишется разностью

$$dN = [n(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}) - n(\mathbf{r}, \mathbf{v})] d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (1.2.1)$$

Разлагая правую часть выражения (1.2.1) в ряд Тейлора в окрестности точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и пренебрегая членами порядка малости выше первого, получаем

$$dN = \left( \frac{\partial n}{\partial x} dx + \frac{\partial n}{\partial y} dy + \frac{\partial n}{\partial z} dz \right) d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

или

$$dN = \mathbf{v} \nabla n d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt, \quad (1.2.2)$$

где

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Рассмотрим теперь ядерные процессы, в результате которых происходит изменение числа нейтронов в элементе фазового пространства  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  за интервал времени  $dt$ . Во-первых, подсчитаем число нейтронов, выбывающих из элемента фазового пространства. Оно составит из нейтронов, поглощенных и рассеянных средой. Пусть  $l_c$  и  $l_s$  — средние свободные пробеги соответственно до захвата и до рассеяния. Тогда выражения

$$\frac{v dt}{l_c} = \frac{d\xi}{l_c} \quad \text{и} \quad \frac{v dt}{l_s} = \frac{d\xi}{l_s} \quad (1.2.3)$$

описывают число столкновений нейтронов в интервале времени  $dt$ , при которых осуществляется поглощение и рассеяние.

Если в элементе фазового пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  содержится  $n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  нейтронов, то полное число поглощенных и рассеянных нейтронов за интервал времени  $dt$  равно

$$\frac{vn(\mathbf{r}, v)}{l_c} d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt \quad \text{и} \quad \frac{vn(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{l_s} d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt,$$

или

$$\Sigma_c vn(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt \quad \text{и} \quad \Sigma_s vn(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt.$$

Таким образом, полное число нейтронов, выбывающих за интервал времени  $dt$  из элемента  $d\mathbf{r} \mathbf{v}$ , равно

$$dP = \Sigma vn(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt, \quad (1.2.4)$$

где

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s.$$

Подсчитаем далее количество нейтронов, которые за время  $dt$  прибывают в элемент фазового пространства. Оно составит из числа нейтронов объема  $d\mathbf{r}$ , которые до рассеяния в объеме  $d\mathbf{r}$  имели скорость  $\mathbf{v}'$  и после рассеяния изменили ее на  $\mathbf{v}$ , и внешних источников. Число рассеявшихся нейтронов в элементе  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  найдем по формуле

$$dR = \left[ \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v}' \Sigma_s v' n(\mathbf{r}, \mathbf{v}') g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \right] d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt, \quad (1.2.5)$$

а число нейтронов, прибывающих в элемент фазового пространства от внешних источников, обозначим  $dS$ .

Тогда

$$dS = S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt. \quad (1.2.6)$$

В результате приходим к следующему уравнению баланса нейтронов в элементе фазового пространства:

$$dN = -dP + dR + dS. \quad (1.2.7)$$

Подставляя выражения (1.2.2), (1.2.4), (1.2.5) и (1.2.6) в уравнение баланса (1.2.7), приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathbf{v} \nabla n + \Sigma vn = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v}' \Sigma_s v' n(\mathbf{r}, \mathbf{v}') g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) + S(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (1.2.8)$$

Переходя от неизвестной  $n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  к  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , уравнение (1.2.8) перепишем в виде

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\mathbf{v}' \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) + S(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (1.2.9)$$

В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \Omega)$  уравнение (1.2.9) запишется следующим образом:

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') g(\mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1.2.10)$$

Здесь мы также воспользовались специальным видом функции  $g(\Omega' \rightarrow \Omega)$ .

Переход от фазового пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  к пространству  $(\mathbf{r}, \Omega)$  осуществляется с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} v^2 \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{r}, \Omega); \\ v^2 g(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) &= g(\Omega' \rightarrow \Omega); \\ v^2 S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= S(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned}$$

Уравнение (1.2.10) будем называть *основным кинетическим уравнением диффузии нейтронов*.

Уравнение (1.2.10) — интегро-дифференциальное. Дифференциальный характер этого уравнения обусловлен оператором  $\nabla$ .

Для полной определенности задачи необходимо задать граничные условия на внешней поверхности  $S$ .

Пусть среда граничит с вакуумом. Тогда если поверхность выпукла (или невогнута), то в качестве граничного необходимо взять следующее условие:

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } (\Omega \mathbf{n}) < 0, \quad (1.2.11)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Если поверхность  $S$  вогнута так, что луч, совпадающий с вектором  $\Omega$ , дважды пересекает область, занятую реактором, то в точках  $M$  и  $M'$  (рис. 2) следует положить

$$\varphi(\mathbf{r}_M, \Omega) = \varphi(\mathbf{r}_{M'}, \Omega). \quad (1.2.12)$$

Кроме того, предполагается, что решение задачи (1.2.10)–(12.1.1) непрерывно во всех точках области  $G$ , ограниченной  $S$ .

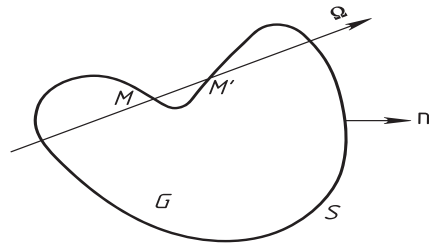


Рис. 2. Путь нейтрона в среде, ограниченной вогнутой поверхностью:  $\Omega$  — единичный вектор скорости нейтрона;  $M$  и  $M'$  — точки поверхности  $S$ ;  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$

### 1.3. Кинетическое уравнение для различных геометрий

Рассмотрим кинетическое уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') g(\mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1.3.1)$$

Вдоль луча  $\xi$ , совпадающего с вектором  $\Omega$ , имеет место соотношение

$$\Omega \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad (1.3.2)$$

где  $\xi$  — координата точки вдоль луча  $\Omega$ .

В декартовой системе координат

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{d\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{d\xi}, \quad (1.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \Omega_x = \sin \vartheta \cos \psi, & \frac{dy}{d\xi} &= \Omega_y = \sin \vartheta \sin \psi, \\ \frac{dz}{d\xi} &= \Omega_z = \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

С учетом равенств (1.3.3) и (1.3.4) кинетическое уравнение (1.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \vartheta \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi &= \\ &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' \varphi(x, y, z, \vartheta', \psi') g(\mu_0) d\vartheta' + S(x, y, z, \vartheta, \psi), \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где

$$\mu_0 = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

#### 1.3.1. Плоскопараллельные задачи

Предположим, что функции  $\Sigma, \Sigma_s, g(\mu_0)$  и  $S$  не зависят от координат  $x, y$  и являются функциями только  $z, \vartheta$  и  $\psi$ . Если далее предположим, что область трехмерного пространства, в которой ищется решение, плоскопараллельна (рис. 3), то, очевидно, решение кинетического уравнения (1.3.5) будет только

функцией  $z, \vartheta$  и  $\psi$ . В результате уравнение (1.3.5) запишется в виде

$$\cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \times \\ \times \varphi(z, \vartheta', \psi') g(\mu_0) + S(z, \vartheta, \psi). \quad (1.3.6)$$

Если решение  $\varphi$  и источники  $S$  не зависят от азимута  $\psi$ , то уравнение (1.3.6) несколько упростится:

$$\cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(z, \vartheta') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' g(\mu_0) + S(z, \vartheta). \quad (1.3.7)$$

Введем новую независимую переменную  $\mu$  по формуле

$$\mu = \cos \vartheta.$$

Тогда уравнение (1.3.7) перепишется в виде

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') \times \\ \times g(\mu' \rightarrow \mu) + S(z, \mu), \quad (1.3.8)$$

где

$$g(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\mu_0) d\psi'.$$

Важно отметить, что функция  $g(\mu' \rightarrow \mu)$  обладает свойством симметрии

$$g(\mu' \rightarrow \mu) = g(\mu \rightarrow \mu'). \quad (1.3.9)$$

Если рассеяние изотропно, то  $g(\mu_0) = 1$ ,  $g(\mu' \rightarrow \mu) = 1$  и, следовательно, уравнение (1.3.8) имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') + S(z, \mu). \quad (1.3.10)$$

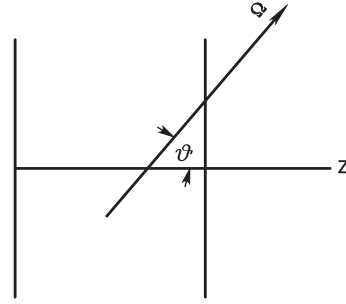


Рис. 3. Путь нейтрона в плоскопараллельной среде:  $\Omega$  — единичный вектор скорости нейтрона;  $\vartheta$  — высотный угол

На границе с вакуумом при  $z = H$  дополнительно необходимо поставить условие

$$\varphi(H, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0. \quad (1.3.11)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если решение кинетического уравнения не зависит от азимута, то нет необходимости сохранять принятую ранее нормировку функций в фазовом пространстве  $(z, \mu, \psi)$ , а удобнее перейти непосредственно к пространству  $(z, \mu)$ . Формально такой переход осуществляется интегрированием кинетического уравнения по углу  $\psi$ . В результате, заменяя

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z, \mu) & \text{ на } \varphi(z, \mu), \\ 2\pi S(z, \mu) & \text{ на } S(z, \mu), \end{aligned}$$

мы приходим к выводу, что уравнение (1.3.10) не изменило своей формы. Отличие состоит только в том, что переход от новых функций  $\varphi(z, \mu)$  и  $S(z, \mu)$  к их глобальным значениям  $\varphi_0(z)$  и  $S_0(z)$  в пространстве  $(z, \mu)$  осуществляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu, \\ S_0(z) &= \int_{-1}^1 S(z, \mu) d\mu. \end{aligned}$$

В частности, если источники нейтронов изотропны, то следует положить

$$S(z, \mu) = \frac{1}{2} S_0(z).$$

Аналогичным образом изотропный поток нейтронов выразится с помощью формулы

$$\varphi(z, \mu) = \frac{1}{2} \varphi_0(z).$$

### 1.3.2. Задачи со сферической симметрией

В качестве координат примем  $r$  — расстояние от центра сферически-симметричной системы до рассматриваемой точки  $M$  и  $\vartheta$  — угол между радиус-вектором точки  $M$

и осью  $z$  (рис. 4). В данном случае будем иметь

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{dr}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\xi}.$$

Из геометрического рассмотре-  
ния нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\xi} &= \Omega_r = \cos\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\xi} &= \Omega_\vartheta = -\frac{\sin\vartheta}{r}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \cos\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

Если в качестве переменной  
принять  $\mu = \cos\vartheta$ , то

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}. \quad (1.3.12)$$

В результате кинетическое уравнение для задач сферической симметрии будет иметь вид

$$\mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \Sigma\varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) + S(r, \mu). \quad (1.3.13)$$

В частности, при изотропном рассеянии

$$\mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \Sigma\varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + S(r, \mu). \quad (1.3.14)$$

Здесь, так же как и выше, переход к глобальным характеристикам  $\varphi_0(r)$  и  $S_0(r)$  осуществляется с помощью равенств

$$\varphi_0(r) = \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) d\mu; S_0(r) = \int_{-1}^1 S(r, \mu) d\mu.$$

Если источник нейтронов изотопен, то

$$S(r, \mu) = \frac{1}{2} S_0(r).$$

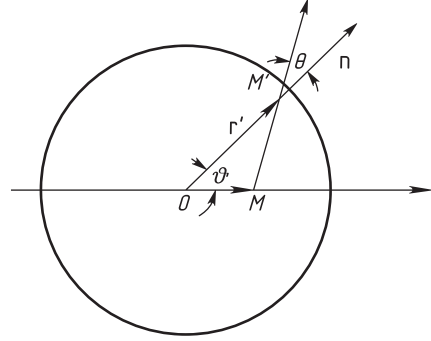


Рис. 4. Система координат для сферически-симметричной области

На границе с вакуумом при  $r = R$  следует поставить условие

$$\varphi(R, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0.$$

### 1.3.3. Задачи цилиндрической симметрии

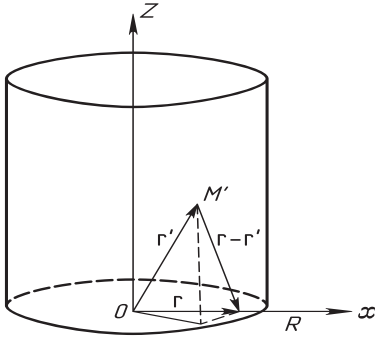


Рис. 5. Система координат для цилиндрической области

Рассмотрим бесконечный цилиндр радиусом  $R$ . Пусть  $z$  — ось цилиндрической симметрии. Если нейтрон находится в точке  $M$ , то  $\vartheta$  — угол между направлением полета нейтрона и вертикалью в точке  $M$ ;  $\psi$  — угол между проекцией направления полета нейтрона на плоскость  $(x, y)$  и осью  $x$ ;  $r$  — расстояние от оси симметрии до проекции точки  $M$  на плоскость  $(x, y)$  (рис. 5). В этом случае

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{dr}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\xi}.$$

Из геометрических рассуждений следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\xi} &= \sin\vartheta \cos\psi, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= -\frac{\sin\vartheta \sin\psi}{r}, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = 0. \end{aligned}$$

В результате кинетическое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \left( \cos\psi \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right) + \Sigma\varphi &= \\ &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \vartheta', \psi') g(\mu_0) + S(r, \vartheta, \psi). \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

При изотропном рассеянии

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \left( \cos\psi \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right) + \Sigma\varphi &= \\ &= \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \vartheta') + S(r, \vartheta). \end{aligned} \quad (1.3.16)$$



## 1.4. Интегральное уравнение Пайерлса

В некоторых случаях удобно иметь дело не с интегродифференциальными уравнениями Больцмана, а с интегральными уравнениями. В настоящем параграфе мы получим интегральное уравнение в предположении, что рассеяние нейтронов изотропно. Ради простоты источники нейтронов будем считать изотропными. Распространение алгоритма на случай неизотропного рассеяния или неизотропных источников нейтронов очевидно.

Рассмотрим невогнутую область  $G$ , заполненную веществом, ограниченную поверхностью  $S$ . Тогда в указанных выше предположениях кинетическое уравнение будет иметь вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}), \quad (1.4.1)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}) &= \Sigma_s \varphi_0(\mathbf{r}) + S_0(\mathbf{r}); \\ \varphi_0(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Если на внешнюю границу  $S$  из вакуума падает изотропный поток нейтронов, то

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}) \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (1.4.3)$$

где  $f(\mathbf{r})$  — заданная функция точек поверхности  $S$ .

Рассмотрим сначала случай, когда свойства среды остаются неизменными для всех точек области  $G$ . Это значит, что  $\Sigma_s = \text{const}$ ,  $\Sigma_c = \text{const}$ .

Функцию  $Q(\mathbf{r})$  временно будем считать известной. Тогда решение уравнения (1.4.1) при условии (1.4.3) нетрудно найти следующим образом. В кинетическом уравнении (1.4.1) скалярное произведение  $\Omega \nabla \varphi$  запишем в виде производной по направлению  $\Omega$ , то есть

$$\Omega \nabla \varphi = -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) \Big|_{\xi=0},$$

где  $\xi$  отсчитывается от точки  $M$  в направлении, противоположном вектору  $\Omega$  (рис. 6).

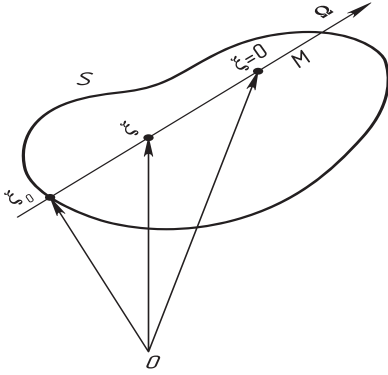


Рис. 6. Схема движения нейтрона в среде вдоль луча  $\Omega$ :  $M$  — точка наблюдения;  $\xi$  — координата по лучу  $\Omega$ , отсчитываемая от точки  $M$ ;  $\xi_0$  — расстояние от точки до поверхности  $S$

Таким образом, вдоль луча  $\Omega$  кинетическое уравнение (1.4.1) запишется следующим образом:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) + \Sigma \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) \quad (1.4.4)$$

при условии, что

$$\varphi(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega). \quad (1.4.5)$$

Заметим, что в уравнении (1.4.4) и граничном условии (1.4.5)  $\mathbf{r}$  является радиус-вектором точки  $M$ .

Решение задачи (1.4.4), (1.4.5) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) e^{-\Sigma(\xi_0 - \xi)} + \frac{1}{4\pi} \int_{\xi}^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi' \Omega) e^{-\Sigma(\xi' - \xi)} d\xi'. \quad (1.4.6)$$

И, следовательно, положив  $\xi = 0$ , получим

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) e^{-\Sigma \xi_0} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) e^{-\Sigma \xi} d\xi. \quad (1.4.7)$$

Равенство (1.4.7) проинтегрируем по  $\Omega$ . Тогда получим

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega f(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) e^{-\Sigma \xi_0} + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) e^{-\Sigma \xi} d\xi. \quad (1.4.8)$$

В соотношении (1.4.8) положим

$$\mathbf{r} - \xi \Omega = \mathbf{r}' \quad \mathbf{r} - \xi_0 \Omega = \mathbf{r}'_S$$

и учтем, что  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , а элементы объема  $d\mathbf{r}'$  и площади  $d\mathbf{r}'_S$  равны

$$d\mathbf{r}' = \xi^2 d\xi d\Omega, \quad d\mathbf{r}'_S = \xi_0^2 \frac{d\Omega}{|\Omega \mathbf{n}|},$$

где

$$\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \xi_0 = |\mathbf{r}'_S - \mathbf{r}|.$$

Тогда выражение (1.4.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \int_G d\mathbf{r}' Q(\mathbf{r}') \frac{e^{-\Sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S d\mathbf{r}'_S f(\mathbf{r}'_S) \cdot \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \mathbf{n} \right| \cdot \frac{e^{-\Sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_S|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|^2}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Если теперь принять во внимание соотношение (1.4.2), то выражение (1.4.9) запишется в виде интегрального уравнения

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int_G d\mathbf{r}' \Sigma_s \varphi_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + F(\mathbf{r}), \quad (1.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) = & \int_G d\mathbf{r}' S_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \int_S d\mathbf{r}'_S f(\mathbf{r}'_S) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \mathbf{n} \right| K(\mathbf{r}'_S \rightarrow \mathbf{r}); \\ K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\Sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Интегральное уравнение (1.4.9) называют уравнением Пайерлса.

В том случае, когда  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{r})$  и  $\Sigma_s = \Sigma(\mathbf{r})$ , то есть когда среда в области  $G$  неоднородна, интегральное уравнение Пайерлса примет вид

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int_G d\mathbf{r}' \Sigma_s(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + F(\mathbf{r}), \quad (1.4.12)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) = & \int_G d\mathbf{r}' S_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \int_S d\mathbf{r}'_S f(\mathbf{r}'_S) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \mathbf{n} \right| K(\mathbf{r}'_S \rightarrow \mathbf{r}); \\ K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\tau(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}; \\ \tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = & \int_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \Sigma(\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}) d\xi. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Величина  $\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  называется оптическим расстоянием от точки  $M'(\mathbf{r}')$  до точки  $M(\mathbf{r})$ .

До сих пор предполагалось, что внешние источники нейтронов изотропны. Если предположить, что

$$S = S(\mathbf{r}, \Omega) \quad \text{и} \quad f = f(\mathbf{r}, \Omega),$$

то мы снова приходим к интегральному уравнению (14.1.2), где функцию  $F(\mathbf{r})$  необходимо заменить следующей формулой:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) = & \int_G d\mathbf{r}' S\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) 4\pi K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \\ & + \int_S d\mathbf{r}'_S f\left(\mathbf{r}'_S, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|}\right) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \mathbf{n} \right| 4\pi K(\mathbf{r}'_S \rightarrow \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Более подробные сведения о постановке задачи о диффузии нейтронов в случае несферической индикатрисы рассеяния можно найти в книге Б. Дэвисона [135].

Интегральное уравнение (14.1.2) запишем для простейших геометрий. Будем предполагать, что среда, заполняющая область  $G$ , однородна.

Рассмотрим сначала случай плоскопараллельной геометрии. Будем считать, что на слой толщиной  $h$  падает изотропный поток нейтронов интенсивности  $f^+$  при  $z = 0$  и  $f^-$  при  $z = H$ . Внутри слоя источники распределены по закону  $S_0(z)$ . В таких предположениях, очевидно, решение задачи  $\varphi_0$  будет только функцией  $z$ .

Полагая

$$d\mathbf{r}' = dx' dy' dz', \quad d\mathbf{r}_S = dx dy,$$

$$\left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{n} \right| = \cos \vartheta = \frac{|z - z'|}{r},$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

интегральное уравнение Пайерлса запишем в следующем виде:

$$\varphi_0(z) = \Sigma_s \int_0^H \varphi_0(z') K(\Sigma|z - z'|) dz' + F(z), \quad (1.4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \int_0^H dz' S_0(z') K(\Sigma|z - z'|) + f^+ P(\Sigma z) + f^- P(\Sigma|h - z|); \\
 K(\Sigma|z - z'|) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{e^{-\Sigma r}}{r^2}; \\
 P(\Sigma z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{ze^{-\Sigma r}}{r^3}.
 \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Вычислим интеграл в правой части последних равенств в (14.1.6). С этой целью положим  $x - x' = \varrho \cos \alpha$ ;  $y - y' = \varrho \sin \alpha$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 K(\Sigma|z - z'|) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varrho d\varrho \frac{e^{-\Sigma \sqrt{\varrho^2 + (z - z')^2}}}{\varrho^2 + (z - z')^2}; \\
 P(\Sigma z) &= \frac{z}{2} \int_0^{\infty} \varrho d\varrho \frac{e^{-\Sigma \sqrt{\varrho^2 + z^2}}}{(\varrho^2 + z^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \right\} \tag{1.4.17}$$

Перейдем к новой переменной интегрирования  $t$  по формуле

$$t = \Sigma \sqrt{\varrho^2 + (z - z')^2}.$$

Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned}
 K(\Sigma|z - z'|) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma|z - z'|}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt; \\
 P(\Sigma z) &= \frac{\Sigma z}{2} \int_{\Sigma z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.
 \end{aligned} \right\} \tag{1.4.18}$$

Учитывая, что<sup>1)</sup>

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt = E_n(x),$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned}
 K(\Sigma|z - z'|) &= \frac{1}{2} E_1(\Sigma|z - z'|); \\
 P(\Sigma z) &= \frac{1}{2} \Sigma z E_2(\Sigma z).
 \end{aligned} \right\} \tag{1.4.19}$$

---

<sup>1)</sup> См. работу [170].

В заключение вычислим функцию  $F(z)$  в том предположении, что источник сосредоточен в плоскости  $z = 0$ , а потоки нейтронов из вакуума отсутствуют, то есть  $f^\pm = 0$ . Тогда получим

$$F(r) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma z).$$

В этом случае интегральное уравнение Пайерлса (14.1.5) примет вид

$$\varphi_0(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^H dz' \varphi_0(z') E_1(\Sigma|z - z'|) + \frac{1}{2} E_1(\Sigma z). \quad (1.4.20)$$

Если среда бесконечна, то уравнение (1.4.20) переходит в следующее:

$$\varphi_0(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi_0(z') E_1(\Sigma|z - z'|) + \frac{1}{2} E_1(\Sigma z). \quad (1.4.20')$$

Следует отметить, что та часть решения, которая представлена функцией

$$B_0(z) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma z), \quad (1.4.21)$$

описывает полное число нейтронов, которые не испытали ни одного соударения при движении от источника до плоскости  $z$ . Эти нейтроны называют нерассеянными.

Рассмотрим далее случай сферической геометрии. Будем считать, что область  $G$  представляет собой шар радиусом  $R$ . На внешнюю границу шара со стороны вакуума падает изотропный поток нейтронов с плотностью  $f_0$ . Внутри шара заданы источники нейтронов  $S_0(r)$ .

В указанных предположениях решение задачи  $\varphi_0$  будет функцией только  $r$ .

Учитывая соотношения (см. рис. 4)

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}' &= r'^2 dr' d\mu' d\psi', & d\mathbf{r}'_S &= R^2 d\mu d\psi, \\ \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{n} \right| &= \cos \Theta = \frac{R - r \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta}}, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\varphi_0(r) = \Sigma_s \int_0^R \varphi_0(r') K(r' \rightarrow r) dr' + F(r), \quad (1.4.22)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(r) &= \int_0^R S_0(r') K(r' \rightarrow r) dr' + f_0 P(r); \\
 K(r' \rightarrow r) &= \frac{r'^2}{2} \int_{-1}^1 d\mu \frac{e^{-\Sigma \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu}}}{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu}; \\
 P(r) &= \frac{R^2}{2} \int_{-1}^1 d\mu (R - r\mu) \frac{e^{-\Sigma \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\mu}}}{(R^2 + r^2 - 2Rr\mu)^{3/2}}. \quad (1.4.23)
 \end{aligned}$$

Здесь мы перешли к новой переменной интегрирования  $\mu = \cos \vartheta$  и произвели интегрирование по азимуту  $\psi$ . С помощью замены переменной интегрирования  $\mu$  на  $t = \Sigma \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu}$  второе и третье соотношения системы (14.2.3) приведем к виду

$$\left. \begin{aligned}
 K(r' \rightarrow r) &= \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \int_{\Sigma|r-r'|}^{\Sigma|r+r'|} \frac{e^{-t}}{t} dt; \\
 P(r) &= \frac{R^2 - r^2}{4r} \int_{\Sigma(R-r)}^{\Sigma(R+r)} \frac{e^{-t}}{t^2} dt + \frac{1}{4r\Sigma^2} \int_{\Sigma(R-r)}^{\Sigma(R+r)} e^{-t} dt.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.24)$$

С учетом соотношения (14.1.9) будем иметь

$$\begin{aligned}
 K(r' \rightarrow r) &= \frac{1}{2} \frac{r'}{r} [E_1(\Sigma|r-r'|) - E_1(\Sigma|r+r'|)]; \\
 P(r) &= \frac{R^2 - r^2}{4r} [E_2(\Sigma|R-r|) - E_2(\Sigma|R+r|)] + \\
 &\quad + \frac{1}{4r\Sigma^2} [e^{-\Sigma(R-r)} - e^{-\Sigma(R+r)}]. \quad (1.4.25)
 \end{aligned}$$

Полезно обратить внимание на следующий факт. Если предположить, что поток нейтронов, падающих на шар со стороны вакуума, отсутствует, то есть  $f_0 = 0$ , то с помощью соотношений  $r\varphi_0(r) = \varphi(r)$  и  $S_0(r) = S(r)$  уравнение (14.2.2) преобразуется к виду

$$\varphi(r) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-R}^R \varphi(r') E_1(\Sigma|r-r'|) dr' + \frac{1}{2} \int_{-R}^R S(r') E_1(\Sigma|r-r'|) dr'. \quad (1.4.25')$$

Таким образом, в этом случае интегральное уравнение для шара формально совпадает с интегральным уравнением для слоя.

Подсчитаем теперь нерассеянную часть излучения. Для этого предположим, что в центре сферы помещен сосредоточенный источник единичной мощности, то есть

$$S(r) = \delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2},$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  нормирована следующим образом:

$$\int \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 4\pi \int \delta(r) r^2 dr = 1. \quad (1.4.26)$$

Если предположить, что поток нейтронов из вакуума отсутствует, то из соотношения (14.2.5) следует, что

$$B_0(r) = F(r) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r}. \quad (1.4.27)$$

Переходим теперь к рассмотрению цилиндрических областей. Для простоты ограничимся случаем однородного бесконечного цилиндра радиусом  $R$ . В качестве координат примем  $\varrho, z, \psi$ . Очевидно,

$$\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi};$$

$$\left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{n} \right| = \cos \vartheta = \frac{R - r \cos \psi}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi}}.$$

Ввиду того, что решение интегрального уравнения есть функция только  $r$ , перейдем к следующему интегральному уравнению:

$$\varphi_0(r) = \Sigma_s \int_0^R \varphi_0(r') K(r' \rightarrow r) dr' + F(r), \quad (1.4.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= \int_0^R S(r') K(r' \rightarrow r) dr' + fP(r); \\ K(r' \rightarrow r) &= \frac{r'}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-\Sigma \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi}}}{r'^2 + r^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi}; \\ P(r) &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} dz (R - r \cos \psi) \frac{e^{-\Sigma \sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi}}}{(R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.29)$$



Ядра интегрального уравнения несколько преобразуем. С этой целью представим выражение для  $K(r' \rightarrow r)$  в виде суммы двух членов:

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{r'}{2\pi} \left( \int_0^\pi d\psi \int_0^\infty dz \frac{e^{-\Sigma\sqrt{r^2+r'^2+z^2}-2rr'\cos\psi}}{r^2+r'^2+z^2-2rr'\cos\psi} + \right. \\ \left. + \int_0^\pi d\psi \int_0^\infty dz \frac{e^{-\Sigma\sqrt{r^2+r'^2+z^2}+2rr'\cos\psi}}{r^2+r'^2+z^2+2rr'\cos\psi} \right). \quad (1.4.30)$$

Примем далее во внимание следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} K_0(xz) &= \int_0^\infty \frac{e^{-x\sqrt{t^2+z^2}}}{\sqrt{t^2+z^2}} dt; \\ \int_x^\infty K_0(xz) dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-x\sqrt{t^2+z^2}}}{t^2+z^2} dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.31)$$

С учетом выражений (14.3.1) получим

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{r'}{2\pi} \left[ \int_0^\pi d\psi \int_\Sigma^\infty K_0(ax) dx + \int_0^\pi d\psi \int_\Sigma^\infty K_0(bx) dx \right], \quad (1.4.32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}, \\ b &= \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.33)$$

Выражение (14.3.2) преобразуем к виду

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{r'}{2\pi} \left( \int_0^\pi \frac{d\psi}{a} \int_{a\Sigma}^\infty K_0(\varrho) d\varrho + \int_0^\pi \frac{d\psi}{b} \int_{b\Sigma}^\infty K_0(\varrho) d\varrho \right). \quad (1.4.34)$$

В первом слагаемом перейдем от переменной  $\psi$  к  $a$  по формуле

$$\cos\psi = \frac{r^2 + r'^2 - a^2}{2rr'},$$

а во втором слагаемом по формуле

$$\cos\psi = \frac{b^2 - r^2 - r'^2}{2rr'}.$$

Тогда окончательно приходим к выражению

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{2r'}{\pi} \times \int_{|r-r'|}^{r+r'} \frac{dx}{\sqrt{(x-r+r')(x+r-r')(r+r'-x)(r+r'+x)}} \int_{\Sigma x}^{\infty} K_0(t) dt. \quad (1.4.35)$$

Аналогичным образом может быть найдено выражение для  $P(r)$ .

Для получения нерассеянной части излучения от линейного источника, расположенного на оси  $z$ , очевидно, следует выражение (14.2.7) проинтегрировать по  $z$ . В результате получим

$$B_0(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-\Sigma \sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} = \frac{\Sigma}{2\pi} \int_{\Sigma r}^{\infty} K_0(x) dx, \quad (1.4.36)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 1.5. Транспортное приближение

При решении различных задач, связанных с физическим расчетом реакторов, широкое применение нашло транспортное приближение. Сущность этого приближения состоит в том, что индикатриса рассеяния нейтронов  $\omega(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} g(\mu_0) \Sigma_s$  заменяется приближенной функцией следующего вида:

$$\omega(\mu_0) = \Sigma_s \left[ \frac{1 - \bar{\mu}_0}{4\pi} + \bar{\mu}_0 \delta(1 - \mu_0) \right], \quad (1.5.1)$$

где

$$\Sigma_s \bar{\mu}_0 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 \mu_0 \omega d\mu_0.$$

Существенным моментом здесь является то, что приближенная функция  $g(\mu_0)$  имеет правильный нулевой и первый моменты, то есть

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 \omega(\mu_0) d\mu_0 &= \Sigma_s; \\ \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 \mu_0 \omega(\mu_0) d\mu_0 &= \bar{\mu}_0 \Sigma_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим теперь кинетическое уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') \omega(\mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1.5.3)$$

Подставив соотношение (1.5.1) в уравнение (1.5.3), получим

$$\begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \\ = \frac{\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)}{4\pi} \varphi_0(\mathbf{r}) + \bar{\mu}_0 \Sigma_s \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') \delta(1 - \mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega), \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

где

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega).$$

Если предположить, что решение уравнения (1.5.4) слабо зависит от направления  $\Omega$ , то под знаком интеграла в уравнении (1.5.4) функции  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega')$  разложим в ряд Тейлора

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega') = \varphi(\mathbf{r}, \Omega) + \text{малые члены}. \quad (1.5.5)$$

Ограничившись в разложении (1.5.5) первым членом и учтя, что

$$\int d\Omega' \delta(1 - \mu_0) = 1,$$

получим

$$\Omega \nabla \varphi + (\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0) + \Sigma_c) \varphi = \frac{\Sigma_s(1 - \mu_0)}{4\pi} \varphi_0(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1.5.6)$$

Анализ уравнения (1.5.6) показывает, что оно отличается от соответствующего уравнения в случае изотропного рассеяния только тем, что макроскопическое сечение рассеяния  $\Sigma_s$  заменено  $\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)$ . Величину  $\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)$  иногда называют транспортным сечением рассеяния<sup>2)</sup>, а уравнение (1.5.6) — односкоростным кинетическим уравнением в транспортном приближении.

## 1.6. Задачи на критический размер

До сих пор предполагалось, что внешние источники нейтронов заданы. Такое положение имеет место в том случае, когда решается задача на прохождение нейтронов в среде от незави-

<sup>2)</sup>В дальнейшем мы под транспортным сечением будем понимать не  $\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)$ , а величину  $\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0) + \Sigma_c$ ; обозначим ее  $\Sigma_{tr}$ .

симых внешних источников. Задачи такого типа особенно часто встречаются при расчете защиты от излучений.

Однако при расчетах пространственно-энергетического распределения нейтронов в системе, где происходит цепная реакция деления ядер, источники нейтронов оказываются сами функцией неизвестного решения.

Если введем в рассмотрение  $\Sigma_f$  макроскопическое сечение вещества, заполняющего объем реактора, по отношению к делению,  $\nu_f$  — число нейтронов, рождающихся в одном акте деления ядер вещества, то источники нейтронов можно выразить через  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$  с помощью следующего соотношения:

$$Q(\mathbf{r}) = (\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f) \varphi_0(\mathbf{r}), \quad (1.6.1)$$

где

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega).$$

Здесь, кроме того, сделано предположение об изотропности процесса деления [363].

Если другие источники нейтронов в системе отсутствуют, кроме источников, реализуемых в результате осуществления цепной реакции деления, то основное кинетическое уравнение реактора в одногрупповом представлении будет иметь вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f}{4\pi} \varphi_0(\mathbf{r}). \quad (1.6.2)$$

В качестве граничного условия следует выбрать

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (1.6.3)$$

где  $S$  — внешняя поверхность реактора.

Из рассмотрения задачи (1.6.2), (1.6.3) следует, что она однородна и, таким образом, можно сформулировать задачу на собственные числа. Для этого введем в рассмотрение формальный параметр  $\lambda$ , который определим следующей задачей:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi &= \frac{1}{4\pi} (\Sigma_s + \lambda \nu_f \Sigma_f) \varphi_0(\mathbf{r}); \\ \varphi(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.4)$$

Параметр  $\lambda$  связан с эффективным коэффициентом размножения нейтронов в реакторе  $K_{\text{эфф}}$  следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{K_{\text{эфф}}}.$$

Теперь задача (1.6.4) состоит в нахождении первого собственного числа  $\lambda = \lambda_1$  и соответствующей ему собственной функции  $\varphi_1(\mathbf{r}, \Omega)$ .

Для решения задачи о критическом размере реактора необходимо поступать следующим образом. Зададимся размером активной зоны реактора и найдем величину  $\lambda$ , соответствующей данной композиции реактора. Затем, изменив размер активной зоны, получим новое значение параметра  $\lambda$ , допускающего ненулевое решение задачи (1.6.4). Продолжая этот процесс, при определенной конструкции реактора получим

$$\lambda_1 = 1. \quad (1.6.5)$$

Соответствующий размер реактора будем называть критическим.

Следует отметить, что изложенный выше способ введения формального математического параметра  $\lambda$  не является единственно возможным. В ряде случаев бывает целесообразно задачу на собственные числа сформулировать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi &= \lambda \frac{\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f}{4\pi} \varphi_0(\mathbf{r}); \\ \varphi(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.6)$$

Для осуществления критического режима в реакторе необходимо потребовать, чтобы

$$\lambda_1 = 1. \quad (1.6.7)$$

В частности, если величина  $\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f$  не зависит от точки, то есть среда однородна по своим рассеивающим свойствам и свойствам деления ядер, то задачу (1.6.6) можно несколько упростить, переписав ее в виде

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi &= \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_0(\mathbf{r}); \\ \varphi(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.8)$$

Тогда для критического состояния реактора необходимо выполнение условия

$$\lambda_1 = \Sigma_s + \nu_f \Sigma_f. \quad (1.6.9)$$

Аналогичным образом формулируется задача на критический размер с помощью интегрального уравнения Пайерлса. Например, в простейшем случае, когда мы имеем дело с задачей (1.6.8),

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \lambda \int_G d\mathbf{r}' \varphi(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}), \quad (1.6.10)$$

где ядро интегрального уравнения  $K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  определяется с помощью второй формулы из системы (14.1.1).

Критический режим работы реактора будет иметь место при условии (1.6.9).

## 2

## Точечный источник нейтронов в бесконечной среде

### 2.1. Изотопное рассеяние нейтронов

Рассмотрение методов решения кинетических уравнений удобно начать с простейших задач. Одной из таких задач является вычисление потока нейтронов от точечного источника в бесконечной однородной среде. Очевидно, что решение задачи с распределенным источником найдется простым интегрированием рассмотренной простейшей задачи.

В настоящей главе рассмотрены методы решения кинетических уравнений как в случае изотропного, так и анизотропного рассеяния нейтронов. Особое внимание уделено получению асимптотических решений на больших расстояниях от источника. Для нахождения решения на малых расстояниях будут использованы метод моментов и родственный ему метод Фано–Спенсера [501].

Рассмотрим бесконечное однородное пространство, заполненное средой с изотропными источниками, распределенными по закону  $f(z)$ . Требуется найти полный поток нейтронов в пространстве  $-\infty < z < \infty$ . Предполагается, что распределение нейтронов симметрично относительно плоскости  $z = 0$ . В этом случае можно ограничиться рассмотрением только полупространства  $z \geq 0$ .

Если рассеяние нейтронов изотропно, то основное кинетическое уравнение переноса нейтронов примет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu + \frac{1}{2} f(z). \quad (2.1.1)$$

Перейдем к безразмерной переменной  $x = \Sigma z$ . Тогда уравнение (2.1.1) представится в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2} F(x), \quad (2.1.2)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\Sigma} f\left(\frac{x}{\Sigma}\right), \quad c = \frac{\Sigma_s}{\Sigma}.$$

Переход от решения уравнения (2.1.2)  $\varphi(x, \mu)$  к решению уравнения (2.1.1)  $\varphi(z, \mu)$  осуществляется простой заменой переменной  $x$  на  $\Sigma z$ .

Предположим теперь, что  $f(z) = \delta(z)$  и  $F(x) = \delta(x)$ . Тогда соответствующие кинетические уравнения будут определять функции Грина для уравнений (2.1.1) и (2.1.1). Обозначим их соответственно  $G(z, \mu)$  и  $\mathcal{G}(x, \mu)$ . Найдем связь между функциями Грина. С этой целью запишем решения уравнений (2.1.1) и (2.1.2) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z') G(z - z', \mu) dz'; \\ \varphi(x, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \mathcal{G}(x - x', \mu) dx'. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим второе из равенств (2.1.3). Заменяя в этом равенстве  $x$  на  $\Sigma z$  и функции  $F$  выразив через  $f$ , получим

$$\varphi(z, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z') \mathcal{G}(\Sigma[z - z'], \mu) dz'. \quad (2.1.4)$$

Сравнивая первое из равенств (2.1.3) с (2.1.4), приходим к выводу, что

$$G(z, \mu) = \mathcal{G}(\Sigma z, \mu).$$

Таким образом, решение задачи об источнике сводится к нахождению функции Грина  $\mathcal{G}(x, \mu)$  с последующей заменой переменных  $x$  на  $\Sigma z$ . Ради удобства функцию  $\mathcal{G}(x, \mu)$  мы по-прежнему будем обозначать  $\varphi(x, \mu)$ . Тогда окончательно будем иметь следующее интегро-дифференциальное уравнение для потока нейтронов от источника:



$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2} \delta(x). \quad (2.1.5)$$

Решение уравнения (2.1.5) будем искать с помощью двухстороннего преобразования Лапласа.

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Phi(k, \mu) e^{-kx} dk; \\ \Phi(k, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \mu) e^{kx} dx. \end{aligned}$$

Умножим почленно уравнение (2.1.5) на  $e^{-kx} dx$  и проинтегрируем по  $x$ . Тогда получим

$$(1 - k\mu)\Phi = \frac{c}{2}\Phi_0(k) + \frac{1}{2}, \quad (2.1.6)$$

где

$$\Phi_0(k) = \int_{-1}^1 d\mu \Phi(k\mu).$$

Уравнение (2.1.6) поделим на  $(1 - k\mu)$  и результат проинтегрируем по  $\mu$ . В результате будем иметь

$$\Phi_0 = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - k\mu} \Phi_0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - k\mu}.$$

Учитывая соотношение

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - k\mu} = \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k},$$

получим

$$\Phi_0(k) = \frac{1}{2k} \frac{\ln \frac{1+k}{1-k}}{1 - \frac{c}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}}.$$

С помощью обратного преобразования Лапласа получим

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi i c} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\frac{c}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}}{1 - \frac{c}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}} e^{-kx} dk. \quad (2.1.7)$$

Здесь  $\varphi_0(x)$  — полный поток нейтронов в точке  $x$ .

Подынтегральная функция равенства в (2.1.7) регулярна в полосе  $-1 < \text{Re} < 1$ , за исключением полюсов  $k = \pm k_0$ , являющихся решениями трансцендентного уравнения

$$\frac{c}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (2.1.8)$$

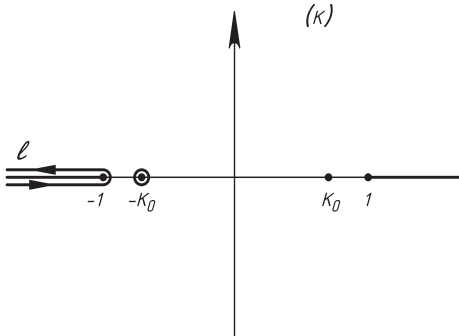


Рис. 7. Контур интегрирования в плоскости комплексной переменной  $k$ :  $\pm k_0$  — полюса подынтегральной функции;  $l$  — контур интегрирования, охватывающий разрез  $(-\infty, -1)$

Вне этой полосы подынтегральная функция имеет две точки ветвления  $k = \pm 1$ . Зафиксируем лист римановой поверхности, проведя разрезы от точек  $k = \pm 1$  до бесконечности вдоль вещественной оси. Продеформируем контур интегрирования таким образом, как показано на рисунке 7.

Тогда интеграл будет состоять из вычета подынтегральной функции в точке  $k = -k_0$  из интеграла

по контуру  $l$ , охватывающему разрез. В результате для  $x \geq 0$  получим

$$\varphi_0(x) = \frac{k_0}{c} \frac{1 - k_0^2}{k_0^2 + c - 1} e^{-k_0 x} + \int_0^\infty \frac{2(1 + \xi) e^{-(1+\xi)x} d\xi}{[2(1 + \xi) - c \ln(1 + 2/\xi)]^2 + \pi^2 c^2}.$$

В соответствии с этим функцию  $\varphi_0(x)$  представим в виде суммы асимптотической части и поправки

$$\varphi_0(x) = \varphi_{as}(x) + \Phi(x), \quad (2.1.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{as}(x) &= \frac{k_0}{c} \frac{1 - k_0^2}{k_0^2 + c - 1} e^{-k_0 x}; \\ \Phi(x) &= \int_0^\infty \frac{2(1 + \xi) e^{-(1+\xi)x} d\xi}{[2(1 + \xi) - c \ln(1 + 2/\xi)]^2 + \pi^2 c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

Перейдем теперь к размерной переменной  $z$ . Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{as}(z) &= \frac{\alpha}{\Sigma_s} \frac{\Sigma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \Sigma \Sigma_c} e^{-\alpha z}, \\ \Phi(z) &= \int_0^\infty \frac{2(1+\xi) e^{-(1+\xi)\Sigma z} d\xi}{[2(1+\xi) - c \ln(1+2/\xi)]^2 + \pi^2 c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11)$$

где  $\alpha = \Sigma k_0$ .

Нетрудно показать, что при  $1 - c \ll 1$  величина  $k_0$  определяется соотношением

$$k_0 = \sqrt{3(1-c)} \left[ 1 - \frac{2}{5} (1-c) \right]. \quad (2.1.12)$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{L} \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{\Sigma_c}{\Sigma} \right), \quad (2.1.13)$$

где

$$L = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma\Sigma_c}}. \quad (2.1.14)$$

Используя приближенное значение для  $\alpha$ , вычисленное по формуле (2.1.3), можно получить

$$\varphi_{as}(z) = \frac{\alpha}{2\Sigma_c} e^{-\alpha z}. \quad (2.1.15)$$

Переходим к рассмотрению функции  $\Phi(z)$ . При  $\Sigma z \ll 1$  приближенно можно положить [66]

$$\Phi(z) \cong \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-(1+\xi)\Sigma z}}{1+\xi} d\xi$$

и, следовательно,

$$\Phi(z) \cong \frac{1}{2} E_1(\xi z). \quad (2.1.16)$$

Из сопоставления выражений (2.1.6) и (14.2.1) следует, что

$$\Phi(z) \cong B_0(z).$$

Это значит, что  $\Phi(z)$  приближенно является нерассеянной частью излучения.

Таким образом, комбинация нерассеянной и асимптотической частей излучения дает весьма полное представление о потоке нейтронов от плоского изотропного источника на всех расстояниях от источника.

Аналогичным образом может быть решена задача о точечном изотропном источнике нейтронов в бесконечной среде. В этом случае уравнение для потока нейтронов принимает вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) d\mu + \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r}). \quad (2.1.17)$$

Решение уравнения (2.1.17) можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) \cong \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha^2}{\Sigma_s} \frac{\Sigma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \Sigma \Sigma_c} \frac{e^{-\alpha r}}{r} + B_0(r), \quad (2.1.18)$$

где

$$B_0(r) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r}.$$

Выражение для  $B_0(r)$  совпадает с (1.3.27) и характеризует нерассеянную часть излучения.

В заключение отметим, что асимптотическая часть потока нейтронов в различных геометриях может быть найдена интегрированием следующего уравнения:

$$\nabla D \nabla \varphi_{as} - \Sigma (\alpha L)^2 \varphi_{as} = -\beta (\alpha L)^2 \delta(\mathbf{r}), \quad (2.1.19)$$

где

$$D = \frac{1}{3\Sigma}, \quad \beta = \frac{2\Sigma_c}{\Sigma_s} \frac{\Sigma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \Sigma \Sigma_c}.$$

В приближении (2.1.1.3) уравнение (2.1.19) принимает вид

$$\nabla D \nabla \varphi_{as} - \Sigma_c \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 \varphi_{as} = -\beta \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 \delta(\mathbf{r}), \quad (2.1.20)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Sigma_c}{\Sigma}, \quad \beta = 1 - \varepsilon.$$

Уравнение (2.1.20) дает правильное значение потока нейтронов при  $|\mathbf{r}| \gg 1$ . Однако оно не удовлетворяет соотношению баланса нейтронов во всем пространстве. В самом деле, интегрируя (2.1.19) по всему пространству, получаем

$$\Sigma_c \int d\mathbf{r} \varphi_{as} \mathbf{r} = \beta.$$

Для того чтобы баланс нейтронов не нарушался, необходимо положить  $\beta = 1$ . Однако в этом случае мы не получим правильный асимптотический поток.

Если предположим, что  $1 - c \ll 1$ , то есть что захват нейтронов мал, то в уравнении (2.1.20) можно положить  $\beta = 1$  и мы приходим к уравнению

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 \varphi = - \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (2.1.21)$$

Это уравнение удовлетворяет условию баланса нейтронов. При  $|\mathbf{r}| \gg 1$  решение уравнения (2.1.21) отличается от точного на величину порядка  $1/\beta$ .

Если источник нейтронов распределен по закону  $f(\mathbf{r})$ , то уравнение (2.1.21) следует записать в виде

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 \varphi = - \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right)^2 f(\mathbf{r}). \quad (2.1.22)$$

В транспортном приближении величину  $D$  необходимо заменить соответствующим значением по формуле

$$D = \frac{1}{3(\Sigma - \bar{\mu}_0 \Sigma_s)}.$$

В заключение полезно обратить внимание на следующий факт. Если требуется найти асимптотический нейтронный поток от источника, распределенного в некоторой *ограниченной* области пространства, то для этого необходимо воспользоваться формулами (2.1.1.1). Для того чтобы избежать интегрирования, можно непосредственно найти решение с помощью уравнения диффузии

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma(\alpha L)^2 \varphi = -\beta(\alpha L)^2 f(\mathbf{r}). \quad (2.1.23)$$

Решение уравнения (2.1.23) совпадает с асимптотическим потоком при  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_0|$ , где  $|\mathbf{r}_0|$  — характерный размер возмущения.

## 2.2. Анизотропное рассеяние.

### Асимптотический поток нейтронов

Задача о точечном источнике в бесконечной однородной среде в случае анизотропного рассеяния была предметом исследования многих авторов. Наиболее полные результаты по асимптотическому исследованию решения на больших расстояниях от источника получены В. И. Масленниковым [268, 269].

В настоящем параграфе мы изложим метод решения задачи, разработанный автором совместно с Ш. С. Николайшвили.

Пусть  $g(\mu_0)$  — заданная неотрицательная функция  $\mu_0$  на интервале  $(-1, 1)$ , нормированная следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\psi - \psi')] d\mu' = 1. \quad (2.2.1)$$

Функцию  $g(\mu_0)$  представим в виде ряда по полиномам Лежандра

$$g(\mu_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} P_{\nu}(\mu_0), \quad (2.2.2)$$

где

$$\gamma_{\nu} = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\nu}(\mu_0) g(\mu_0) d\mu_0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.3)$$

Рассмотрим кинетическое уравнение в плоскопараллельной геометрии с изотропными источниками, записанное в безразмерной переменной  $x = \Sigma z$ :

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(x, \mu') g(\mu_0) + \frac{1}{2} \delta(x). \quad (2.2.4)$$

Требуется найти асимптотическое решение уравнения (2.2.4), интегрируемое с квадратом в интервале  $(-\infty, \infty)$  при заданном значении  $\mu$ .

Если ввести обозначение

$$\gamma(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\psi - \psi')] d\psi', \quad (2.2.5)$$

то уравнение (2.2.4) можно переписать в виде

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \gamma(\mu' \rightarrow \mu) \varphi(x, \mu') d\mu' + \frac{1}{2} \delta(x). \quad (2.2.6)$$

Функция  $\gamma(\mu' \rightarrow \mu)$  симметрична относительно переменных  $\mu$ ,  $\mu'$  и разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\gamma(\mu' \rightarrow \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} P_{\nu}(\mu) P_{\nu}(\mu'). \quad (2.2.7)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Лапласа. Для этой цели положим

$$\Phi(k, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} \varphi(x, \mu) dx. \quad (2.2.8)$$

Тогда для функции  $\Phi(k, \mu)$  будем иметь уравнение

$$(1 - k\mu) \Phi(k, \mu) = \frac{1}{2} c \int_{-1}^1 \gamma(\mu' \rightarrow \mu) \Phi(k, \mu') d\mu' + \frac{1}{2}. \quad (2.2.9)$$

Введем в рассмотрение новую функцию  $\Psi(k, \mu)$  по формуле

$$\Psi(k, \mu) = \sqrt{1 - k\mu} \Phi(k, \mu). \quad (2.2.10)$$

Тогда для функции  $\Psi(k, \mu)$  получим интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\Psi(k, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k) \Psi(k, \mu') d\mu' + \frac{1}{2\sqrt{1 - k\mu}}, \quad (2.2.11)$$

где

$$K(\mu' \rightarrow \mu, k) = \frac{\gamma(\mu' \rightarrow \mu)}{\sqrt{(1 - k\mu)(1 - k\mu')}}. \quad (2.2.12)$$

Если нам удастся найти решение (2.2.11), то, согласно общей теории, решение исходного уравнения (2.2.6) будет определяться интегралом

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-kx} \frac{\psi(k, \mu)}{\sqrt{1 - k\mu}} dk, \quad (2.2.13)$$

взятым вдоль мнимой оси в плоскости  $k$  и представляющим единственное ограниченное решение уравнения (2.2.6), интегрируемое по  $x$  с квадратом на интервале  $(-\infty, \infty)$ .

Таким образом, поставленная нами задача сводится теперь к отысканию решения уравнения (2.2.11) и затем к приближенному вычислению интеграла (2.2.13) при  $|x| \gg 1$ .

Решение уравнения (2.2.11) представляет собой однозначную аналитическую функцию  $k$  во всей полосе  $-1 < \operatorname{Re} k < 1$  плоскости комплексной переменной  $k$ , за исключением изолированных особых точек, лежащих на вещественной оси симметрично относительно точки  $k = 0$  и являющихся полюсами функции  $\Psi(k, \mu)$  [135]. При этом две особые точки,

расположенные к точке  $k = 0$  ближе остальных, являются простыми полюсами функции  $\Psi(k, \mu)$ . Обозначив эти полюса соответственно через  $k_0$  и  $-k_0$ , будем иметь при  $x \gg 1$

$$\varphi(x, \mu) = \frac{e^{-k_0 x}}{\sqrt{1 - k_0 \mu}} \lim_{k \rightarrow k_0} [(k - k_0) \Psi(k, \mu)] + O(e^{-k_1 x}), \quad (2.2.14)$$

где  $k_1$  — первый полюс функции  $\Psi(k, \mu)$ , лежащей справа от полюса  $k = k_0$ , если  $k_1 < 1$  и  $k_1 = 1$ , если внутри интервала  $-1 < k < 1$  другие полюсы отсутствуют.

Рассмотрим теперь однородное интегральное уравнение

$$Y(k, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k) Y(k, \mu') d\mu', \quad (2.2.15)$$

где  $\lambda$  — собственное число задачи при фиксированном значении  $k$ .

Известно, что все особые точки функции  $\Psi(k, \mu)$ , являющейся решением уравнения (2.2.11) при  $\lambda = c$ , представляют собой значения параметра  $k$ , при которых однородное уравнение (2.2.15) имеет своим собственным значением число  $\lambda = c$ . Можно показать, что однородное уравнение (2.2.15) может иметь положительное собственное число меньше единицы только тогда, когда параметр  $k$  есть вещественное число. В этом случае ядро уравнения представляет собой вещественную симметричную функцию аргументов  $(\mu, \mu')$ .

Можно показать, что все собственные числа  $\lambda_\nu$  положительны и наименьшее число  $\lambda_0 < 1$ , причем функция  $\lambda_0(k)$  непрерывна и имеет производную  $\lambda_0'(k) < 0$  на интервале  $(0, 1)$ .

Относительно наименьшего собственного числа  $\lambda$  можно сделать заключение, что оно простое, а соответствующая ему собственная функция  $Y(k, \mu)$  знакопостоянна и непрерывна по  $k$  на интервале  $(0, 1)$ .

Решение неоднородного уравнения (2.2.11) можно представить в виде

$$\Psi(k, \mu) = \frac{1}{2\sqrt{1 - k\mu}} + c \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma_\nu}{\lambda_0 - c} Y(k, \mu), \quad (2.2.16)$$



где

$$\sigma_\nu(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{Y_\nu(k, \mu)}{\sqrt{1 - k\mu}} d\mu. \quad (2.2.17)$$

Ряд, стоящий в правой части соотношения (2.2.16), сходится равномерно и абсолютно во всякой замкнутой области изменения переменных  $k$  и  $\mu$ , если только область изменения  $k$  не содержит корней уравнения

$$\lambda_0(k) = c.$$

В частности, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma_\nu}{\lambda_\nu - c} Y_\nu(k, \mu)$$

сходится равномерно и абсолютно во всякой замкнутой области изменения  $k$ , содержащей корень уравнения

$$\lambda_0(k) = c$$

и не содержащей корней уравнения

$$\lambda_\nu(k) = c \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Принимая это во внимание, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow k_0} [(k - k_0) \Psi(k, \mu)] = \frac{\sigma_0 Y_0(k_0, \mu)}{\lambda'_0(k_0)}. \quad (2.2.18)$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.2.14), окончательно будем иметь

$$\varphi(x, \mu) = \frac{\sigma_0(k_0) e^{-k_0 x}}{\sqrt{1 - k_0 \mu}} \frac{Y_0(k_0, \mu)}{\lambda'_0(k_0)} + 0(e^{-k_1 x}) \quad (2.2.19)$$

для  $x > 0$  и аналогичные выражения для  $x < 0$ .

Остановимся далее на расчетах величин  $\lambda'_0(k_0)$ . Вследствие непрерывности ядра  $K(\mu' \rightarrow \mu, k)$  имеем

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} K(\mu' \rightarrow \mu, k + \Delta k) = K(\mu' \rightarrow \mu, k),$$

причем сходимостъ этого процесса равномерна относительно переменных  $\mu$  и  $\mu'$ .

Пусть  $\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda_0$  и  $Y_0(k, \mu), Y_0(k + \Delta k, \mu)$  — собственные значения и ортонормированные собственные функции уравнения (2.2.12) соответственно при  $k$  и  $k + \Delta k$ :

$$\left. \begin{aligned} Y_0(k, \mu) &= \lambda_0 \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k) Y_0(k, \mu') d\mu'; \\ Y_0(k + \Delta k, \mu) &= \\ &= (\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k + \Delta k) Y_0(k + \Delta k, \mu') d\mu'. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.20)$$

Умножим обе части первого из этих соотношений на  $Y(k + \Delta k, \mu) d\mu$ , а второе — на  $Y_0(k, \mu) d\mu$ , проинтегрируем по  $\mu$  в пределах от  $-1$  до  $+1$  и вычтем из второго соотношения первое. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \int_{-1}^1 Y_0(k, \mu) d\mu \int_{-1}^1 [K(\mu' \rightarrow \mu, k) + \Delta K(\mu' \rightarrow \mu, k)] Y_0(k + \Delta k, \mu') d\mu' = \\ = \lambda_0 \int_{-1}^1 Y_0(k + \Delta k, \mu) d\mu \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k) Y_0(k, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\Delta K(\mu' \rightarrow \mu, k) = K(\mu' \rightarrow \mu, k + \Delta k) - K(\mu' \rightarrow \mu, k).$$

Используя свойство симметрии ядра  $K(\mu' \rightarrow \mu, k)$  относительно переменных  $\mu, \mu'$ , получим далее

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \int_{-1}^1 Y_0(k, \mu) Y_0(k + \Delta k, \mu) d\mu = \\ = -(\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \int_{-1}^1 Y_0(k + \mu) d\mu \int_{-1}^1 \Delta K(\mu' \rightarrow \mu, k) Y_0(k + \Delta k, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Поделив обе части полученного равенства на  $\Delta k$  и перейдя к пределу при  $\Delta k \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{\lambda'_0}{\lambda_0^2} = - \int_{-1}^1 Y_0(k, \mu) d\mu \int_{-1}^1 \frac{\partial K(\mu' \rightarrow \mu, k)}{\partial k} Y_0(k, \mu') d\mu'. \quad (2.2.23)$$

Последняя формула может быть приведена к весьма удобному виду. Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial K(\mu' \rightarrow \mu, k)}{\partial k} = \frac{1}{2} K(\mu' \rightarrow \mu, k) \left[ \frac{\mu'}{1 - k\mu'} + \frac{\mu}{1 - k\mu} \right]. \quad (2.2.24)$$

Подставив соотношение (2.2.24) в равенство (2.2.23), изменив порядок интегрирования и используя тот факт, что  $Y_0(k, \mu)$  — собственная функция ядра  $K(\mu' \rightarrow \mu, k)$  при  $\lambda = \lambda_0$ , получим

$$\frac{\lambda'_0}{\lambda_0} = - \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{1 - k\mu} Y_0^2(k, \mu) d\mu. \quad (2.2.25)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении величин  $\lambda_0(k)$  и  $Y_0(k, \mu)$ . Принимая во внимание свойства интегрального уравнения с симметричным ядром (2.2.15), для нахождения первого собственного числа и соответствующей ему собственной функции воспользуемся методом Келлога [460]. В результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_0^{(n)}(k, \mu)}{Y_0^{(n-1)}(k, \mu)}, \\ Y_0(k, \mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Y_0^{(n)}(k, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.26)$$

Индексом  $n$  отмечен номер последовательного приближения в итерационном процессе

$$Y_0^{(n)}(k, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(\mu' \rightarrow \mu, k) Y_0^{(n-1)}(k, \mu') d\mu'. \quad (2.2.27)$$

Рассмотрим случай, когда в ряду (2.2.7), представляющем функцию  $\gamma(\mu' \rightarrow \mu)$ , все коэффициенты ряда  $\gamma_\nu$ , начиная с некоторого номера  $n + 1$ , обращаются в нуль:

$$\gamma_\nu = 0, \quad \nu = n + 1, n + 2, \dots$$

В этом случае ядро уравнения (2.2.15) будет иметь вид

$$K_n(\mu' \rightarrow \mu, k) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\gamma_\nu P_\nu(\mu) P_\nu(\mu')}{\sqrt{(1 - k\mu)(1 - k\mu')}},$$

а само уравнение примет форму

$$Y(k, \mu) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\nu=0}^n \frac{\gamma_\nu P_\nu(\mu)}{\sqrt{(1 - k\mu)}} c_\nu, \quad (2.2.28)$$

где коэффициенты  $c_\nu$ , зависящие от  $k$ , определяются по формуле

$$c_\nu = \int_{-1}^1 \frac{P_\nu(\mu)}{\sqrt{(1 - k\mu)}} Y(k, \mu) d\mu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.29)$$

Подставив в последнюю формулу выражения (2.2.28), получим

$$c_\nu = \lambda \sum_{\nu'=0}^n g_{\nu\nu'} \gamma_{\nu'} c_{\nu'}, \quad (2.2.30)$$

где

$$g_{\nu\nu'} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_\nu(\mu) P_{\nu'}(\mu)}{1 - k\mu} d\mu. \quad (2.2.31)$$

Введя вместо параметра  $\lambda$  обратную ей величину  $\beta = 1/\lambda$ , перепишем систему (2.2.29) в виде

$$\sum_{\nu'=0}^n g_{\nu\nu'} \gamma_{\nu'} c_{\nu'} - \beta c_\nu = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.32)$$

Полученная система имеет ненулевое решение только тогда, когда определитель системы  $D_n(\beta, k)$  равен нулю:

$$D_n(\beta, k) = \begin{vmatrix} g_{00} - \beta & \gamma_1 g_{01} & \dots & \gamma_n g_{0n} \\ g_{10} & \gamma_1 g_{11} - \beta & \dots & \gamma_n g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n0} & g_{n1} & \dots & \gamma_1 g_{nn} - \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2.33)$$

Значения  $\beta$  при фиксированном  $k$ , при котором имеет место равенство (2.2.33), есть характеристические числа уравнения (2.2.15) при  $K(\mu' \rightarrow \mu, k) = K_n(\mu' \rightarrow \mu, k)$ . Что касается собственных функций уравнения с ядром  $K_n(\mu' \rightarrow \mu, k)$ , то они могут быть получены по формуле (2.2.28) при  $\lambda = 1/\beta$ , если подставить в правую часть этой формулы вместо коэффициентов  $c_\nu$  ненулевое решение системы (2.2.32) при рассматриваемом значении  $\beta$ .

Величину  $\lambda = \lambda_0$  и соответствующие значения  $c_\nu$  можно найти с помощью итерационного процесса

$$c_\nu^{(m)} = \sum_{\nu'=0}^n g_{\nu\nu'} \gamma_{\nu'} c_{\nu'}^{(m-1)}, \quad (2.2.34)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_\nu^{(m)}}{c_\nu^{(m-1)}}, \\ c_\nu &= \lim_{m \rightarrow \infty} c_\nu^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.35)$$

Остается получить выражение для  $\lambda'_0(k)$ . Для этого подставим (2.2.28) в формулу (2.2.25). Тогда получим

$$\frac{\lambda'_0(k)}{\lambda_0^3(k)} = - \sum_{\nu, \nu'=0}^n \gamma_\nu \gamma_{\nu'} c_\nu c_{\nu'} g_{\nu\nu'}^*, \quad (2.2.36)$$

где

$$g_{\nu\nu'}^* = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{\mu P_\nu(\mu) P_{\nu'}(\mu)}{(1 - k\mu)^2} d\mu.$$

Можно доказать, что  $\lambda'_0(k) < 0$ .

Итак, алгоритм решения задачи о нахождении асимптотической части решения таков. Методом проб находится значение  $k = k_0$ , при котором

$$\lambda_0(k_0) = c,$$

где  $\lambda_0(k)$  каждый раз находится с помощью первой формулы (2.2.35). Вторая формула дает коэффициенты  $c_\nu$ . Далее, с помощью соотношения (2.2.36) находится величина  $\lambda'_0(k)$ . Наконец, по формуле (2.2.19) отыскивается решение задачи.

Полный поток  $\varphi_0(x)$  дается формулой

$$\varphi_0(x) = \frac{\sigma_0(k_0) e^{-k_0 x}}{\lambda'_0(k_0)} \int_{-1}^1 \frac{Y_0(k_0, \mu)}{\sqrt{1 - k_0 \mu}} d\mu + O(e^{-k_1 x}). \quad (2.2.37)$$

С учетом соотношения (2.2.28) выражение (2.2.37) окончательно примет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{\sigma_0(k_0) e^{-k_0 x}}{\lambda'_0(k_0)} G(k_0), \quad (2.2.38)$$

где

$$G(k_0) = \frac{\lambda_0(k_0)}{2} \sum_{\nu=0}^n \gamma_\nu c_\nu \int_{-1}^1 \frac{P_\nu(\mu)}{1 - k\mu} d\mu. \quad (2.2.39)$$

Переходя от переменной  $x$  к  $z$ , мы будем иметь

$$\varphi_0(z) = \frac{\sigma_0(k_0) e^{-k_0 \Sigma z}}{\lambda'_0(k_0)} G(k_0). \quad (2.2.36')$$

В заключение отметим, что если источник нейтронов не сосредоточенный, а распределенный по  $x$  и зависящий от  $\mu$ , то формулы (2.2.36') и (2.2.39) сохраняют свой вид, с той лишь

разницей, что величина  $\sigma_0(k_0)$  определяется в этом случае соотношением

$$\sigma_0(k_0) = \int_{-1}^1 \sigma(k_0, \mu) Y_0(k_0, \mu) d\mu, \quad (2.2.40)$$

где

$$\sigma_0(k_0, \mu) = \frac{1}{2\sqrt{1-k_0\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{k_0x} F(x) dx. \quad (2.2.41)$$

Если предположить, что рассеяние изотропно, то есть  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_\nu = 0$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , то нетрудно получить

$$Y_0(k_0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{1-k_0\mu}},$$

и мы без труда приходим к  $\varphi_{as}(x)$ , определяемой соотношением (2.1.10).

Переходим теперь к рассмотрению точечного изотропного источника в случае анизотропного рассеяния. В этом случае воспользуемся теоремой Маршака [479], которая позволяет установить связь между решением задачи в бесконечной среде от плоского изотропного и точечного изотропного источников нейтронов. Эта связь для полных потоков имеет вид

$$\varphi_0(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dz} \varphi_0(z) \Big|_{z=r}. \quad (2.2.42)$$

Применяя теорему Маршака, асимптотическое решение задачи для точечного источника находим в виде

$$\varphi_0(r) = \frac{k_0 \sigma_0(k_0) \Sigma}{2\pi \lambda'_0(k_0)} G(k_0) \frac{e^{-k_0 \Sigma r}}{r}. \quad (2.2.43)$$

## 2.3. Метод моментов

Рассмотрим случаи плоского изотропного и точечного изотропного источников излучения. Задача решается методом, впервые использованным для этой цели Л. Спенсером и У. Фано [501] и названным полиномиальным методом. Сущность метода состоит в представлении пространственного распределения излучения в виде ряда Фурье по специальным образом построенной системе полиномов.

Так как обычно основная цель, которая преследуется при решении задач на прохождение нейтронов или  $\gamma$ -квантов, состоит в нахождении пространственно-энергетического распределения нейтронов независимо от их углового распределения, задачи и в плоском, и сферическом случаях, по существу, эквивалентны. Вместе с тем задача с плоским источником несколько проще. Поэтому естественно, что сначала находится решение, соответствующее плоскому источнику. Для перехода к точечному источнику используется известное соотношение между плотностями излучения в плоском и сферическом случаях.

Для простоты в дальнейшем ограничимся рассмотрением только односкоростной задачи. При изложении будем следовать работе Ш. С. Николайшвили [291].

В отличие от Л. Спенсера, для перехода к точечному источнику Ш. С. Николайшвили вводит новую систему полиномов, построенных таким образом, что коэффициенты разложения при полиномах одинаковой степени как в плоском, так и в сферическом случаях совпадают.

Итак, пусть в бесконечной однородной среде задан плоский изотропный источник излучения. Требуется найти распределение излучения на заданном расстоянии от источника.

Сформулированная задача сводится к решению уравнения

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \varphi(z, \mu') \omega(\mu_0) + \frac{1}{2} \delta(z), \quad (2.3.1)$$

где

$$\omega(\mu_0) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} g(\mu_0)$$

при условии, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(z, \mu) = 0. \quad (2.3.2)$$

Тогда интересующий нас полный поток нейтронов на расстоянии  $z$  от источника будет определяться интегралом

$$\varphi_0(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu.$$

Предположим, что функция  $\varphi(z, \mu)$  представлена в виде бесконечного ряда Фурье по полиномам Лежандра

$$\varphi(z, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} \varphi_{\nu}(z) P_{\nu}(\mu), \quad (2.3.3)$$

где

$$\varphi_{\nu}(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) P_{\nu}(\mu) d\mu. \quad (2.3.4)$$

Представим далее функцию  $\omega(\mu_0)$ , входящую в уравнение (2.3.1), в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_{\nu}(\mu_0)$ . Тогда получим

$$\omega(\mu_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} \omega_{\nu} P_{\nu}(\mu), \quad (2.3.5)$$

или, используя теорему сложения полиномов Лежандра

$$P_{\nu}(\mu_0) = P_{\nu}(\mu) P_{\nu}(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{\nu} \frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} P_{\nu}^m(\mu) P_{\nu}^m(\mu') \cos m(\alpha - \alpha'), \quad (2.3.6)$$

где  $P_{\nu}^m(\mu)$  — присоединенные полиномы Лежандра, а  $\alpha$  — азимут, получим

$$\begin{aligned} \omega(\mu_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} \omega \left[ P_{\nu}(\mu) P_{\nu}(\mu') + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\nu} \frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} P_{\nu}^m(\mu) P_{\nu}^m(\mu') \cos m(\alpha - \alpha') \right]. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Подставим теперь выражение (2.3.7) в уравнение (2.3.1) и, пользуясь независимостью решения задачи от азимута, проинтегрируем  $\omega(\mu_0)$  по  $\alpha'$ . Тогда получим

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} \omega_{\nu} \varphi_{\nu}(z) P_{\nu}(\mu) + \frac{1}{2} \delta(z). \quad (2.3.8)$$

Умножим далее уравнение (2.3.8) почленно на  $P_{\nu}(\mu)$  и проинтегрируем по  $\mu$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Тогда, используя рекуррентное соотношение

$$(2\nu+1)\mu P_{\nu}(\mu) = \nu P_{\nu-1}(\mu) + (\nu+1)P_{\nu+1}(\mu),$$



получим

$$\frac{\nu+1}{2\nu+1} \frac{d\varphi_{\nu+1}}{dz} + \frac{\nu}{2\nu+1} \frac{d\varphi_{\nu-1}}{dz} + \Sigma_\nu \varphi_\nu = \delta_{0\nu} \delta(z), \quad (2.3.9)$$

где  $\Sigma_\nu = \Sigma - \omega_\nu$ , а  $\delta_{0\nu}$  — символ Кронекера.

Придавая индексу  $\nu$  последовательно все целые значения от нуля до бесконечности, получим бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения  $\varphi_\nu(z)$ . Решение этой системы, подчиненное дополнительному условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi_\nu(z) = 0, \quad (2.3.10)$$

дает решение уравнения (2.3.1) в виде бесконечного ряда (2.3.3).

Приближенное решение системы (2.3.9) найдем с помощью метода моментов. Метод моментов состоит в следующем.

Из системы (2.3.9) находятся пространственные моменты функции  $\varphi_\nu(z)$ , определенные с помощью интегралов

$$\varphi_\nu^n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} z^n \varphi_\nu(z) dz. \quad (2.3.11)$$

Затем строится некоторое приближенное представление функции  $\varphi_\nu(z)$  в виде полиномов с весом так, чтобы несколько первых моментов построенного приближенного выражения совпадали с соответствующими моментами функций  $\varphi_\nu(z)$ . Это представление и будет приближенным решением системы (2.3.9).

Чтобы получить уравнения для нахождения моментов функции  $\varphi_\nu(z)$ , умножим обе части уравнения (2.3.9) на

$$\frac{1}{n!} z^n$$

и результат проинтегрируем по  $z$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\Sigma_\nu \varphi_\nu^n = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \varphi_{\nu+1}^{n-1} + \frac{\nu}{2\nu+1} \varphi_{\nu-1}^{n-1} + \delta_{0\nu} \delta_{0n}. \quad (2.3.12)$$

Заметим, что величины  $\varphi_\nu^n$  при отрицательных значениях индексов  $n$  и  $\nu$  обращаются в нуль.

Итак, мы пришли к замкнутой системе алгебраических уравнений (2.3.12). Каждая величина  $\varphi_\nu^n$  может быть определена из конечного числа уравнений. В частности, для нахождения первых четных моментов функции  $\varphi_0(z)$  [все нечетные моменты обращаются в нуль в силу четности функции  $\delta(z)$ ] следует решить систему  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнений вида (2.3.12).

Величины  $\varphi_\nu^n$  могут быть найдены в следующей последовательности

$$\varphi_0^0, \varphi_1^1, \varphi_0^2, \varphi_2^2, \varphi_1^3, \varphi_0^4 \text{ и т. д.}$$

Связь между различными моментами функций  $\varphi_\nu(z)$  устанавливается системой (2.3.12).

В случае изотропного точечного источника мы должны исходить из следующего уравнения:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \varphi(r, \mu') \omega(\mu_0) + \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r}). \quad (2.3.13)$$

Полагая

$$\varphi(r, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} \varphi_\nu(r) P_\nu(\mu) \quad (2.3.14)$$

и поступая аналогично тому, как в случае плоского изотропного источника, приходим к системе уравнений

$$\Sigma_\nu \varphi_\nu^n = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \frac{n-\nu}{n} \varphi_{\nu+1}^{n-1} + \frac{\nu}{2\nu+1} \frac{n+\nu+1}{n} \varphi_{\nu-1}^{n-1} + \delta_{0n} \delta_{0\nu}, \quad (2.3.15)$$

где

$$\varphi_\nu^n = \frac{1}{n!} \int 4\pi r^2 \varphi_\nu(r) r^n dr.$$

Так же как и в плоском случае, решение системы уравнений (2.3.15) находится последовательно, шаг за шагом.

Возвращаемся снова к рассмотрению плоской задачи. После того как пространственные моменты найдены, задача сводится к построению приближенного решения  $\varphi_\nu(r)$ . Так как нашей целью является отыскание полного потока нейтронов на расстоянии  $z$  от источника, то в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только функции  $\varphi_0(z)$ .

Итак, предположим, что нам известны  $n$  первых четных моментов функции  $\varphi_0(z)$ . Все нечетные моменты, как отмечалось, обращаются в нуль. Тогда можно построить полином  $(n-1)$ -й степени относительно  $z$  таким образом, чтобы  $n$  первых чет-

ных моментов построенного полинома с некоторым весом совпадали с известными моментами функции  $\varphi_\nu(z)$ . Выбрав весовую функцию так, чтобы удовлетворить условиям на бесконечности, положим

$$Q_{n-1}(|z|) = e^{-\alpha|z|} \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z|^k, \quad (2.3.16)$$

где  $\alpha$  — корень характеристического уравнения (см. § 2.2), а коэффициенты  $a_k$  определяются так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2k} Q_{n-1}(|z|) dz = \frac{1}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2k} \varphi_0(z) dz \quad (2.3.17)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Выражение (2.3.16) перепишем в следующем виде

$$Q_{n-1}(|z|) = e^{-\alpha|z|} \sum_{k=0}^{n-1} b_k U_k(\alpha|z|), \quad (2.3.18)$$

где  $b_k$  — неизвестные коэффициенты, а  $U_k(x)$  — полином  $k$ -й степени относительно  $x$ , подчиненный условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x^{2m} U_k(|x|) dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.3.19)$$

Умножим теперь обе части равенства (2.3.18) на  $\frac{1}{(2m)!} \alpha(|z|)^{2m}$ , проинтегрируем по  $z$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  и учтем (2.3.19). Тогда справа в (2.3.18) останутся только такие  $b_k$ , для которых  $k \leq m$ . Отсюда следует, что  $m+1$  коэффициентов  $b_k$  полностью определяются из знания  $m+1$  первых четных моментов функции  $\varphi_0(z)$ ; учет следующего  $m+2$  четного момента отразится только на последующих коэффициентах разложения  $b_k$ .

Если, наконец, ввести в рассмотрение систему дополнительных полиномов  $U_n^+(x)$ , удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} U_n(x) U_n^+(x) dx = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & n = n'; \\ 0 & n \neq n', \end{cases} \quad (2.3.20)$$

то для коэффициентов  $b_k$  будем иметь

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(z) U_k^+(\alpha|z|) \alpha dz. \quad (2.3.21)$$

Полиномы, определенные из условия (2.3.19) с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^{2n} \Sigma \frac{(n+k)!}{2^k k! (n-k)!} x^{n-k}. \quad (2.3.22)$$

Первые четыре полинома имеют вид

$$\left. \begin{aligned} U_0(x) &= 1; \\ U_1(x) &= \frac{1}{2}(1-x); \\ U_2(x) &= \frac{1}{8}(3-5x+x^2); \\ U_3(x) &= \frac{1}{48}(15-33x+12x^2-x^3). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.22')$$

Система дополнительных полиномов  $U_n^+(x)$  определяется выражением

$$U_n^+(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \binom{n}{k} x^{2k}, \quad (2.3.23)$$

где  $\binom{n}{k}$  — сочетание из  $n$  элементов по  $k$ .

Если вместо  $U_k^+(\alpha x)$  в формуле (2.3.21) подставить последнее выражение, то получим связь между коэффициентами представления  $b_k$  и пространственными моментами функции  $\varphi_0(z)$ . Эта связь имеет вид

$$b_k = \frac{\alpha}{2} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \alpha^{2m} \varphi_0^{2m}. \quad (2.3.24)$$

Таким образом, определяя моменты функции  $\varphi_0(z)$ , найдем коэффициенты  $b_k$ . Функция  $Q_{n-1}(x)$  описывает приближенное распределение потока излучения, то есть

$$\varphi_0(z) = e^{-\alpha|z|} \sum_{k=0}^{n-1} b_k U_k(\alpha|z|). \quad (2.3.25)$$

Как следует из предыдущего, приближенное решение поставленной задачи сводится к нахождению пространственных моментов функции  $\varphi_0(z)$ .

Если в представлении (2.3.18) ограничиться четырьмя членами разложения, то для отыскания коэффициентов  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), согласно (2.3.2.4), потребуется решение системы десяти уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0 \varphi_0^0 &= 1; \\ \Sigma_1 \varphi_1^1 &= \frac{1}{3} \varphi_0^0; \\ \Sigma_0 \varphi_2^0 &= \varphi_1^1; \\ \Sigma_2 \varphi_2^2 &= \frac{2}{5} \varphi_1^1; \\ \Sigma_1 \varphi_3^1 &= \frac{1}{3} (\varphi_0^0 + 2\varphi_2^0); \\ \Sigma_0 \varphi_4^0 &= \varphi_3^1; \\ \Sigma_3 \varphi_3^3 &= \frac{1}{7} (3\varphi_2^0 + 4\varphi_2^2); \\ \Sigma_2 \varphi_4^2 &= \frac{1}{5} (2\varphi_3^1 + 3\varphi_3^3); \\ \Sigma_1 \varphi_5^1 &= \frac{1}{3} (\varphi_4^0 + 2\varphi_4^2); \\ \Sigma_0 \varphi_6^0 &= \varphi_5^1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.26)$$

Система уравнений (2.3.2.6) решается последовательно.

Переходим теперь к рассмотрению случая точечного изотропного источника излучения. С этой целью воспользуемся теоремой Маршака (2.2.42).

Приближенное представление функции  $\varphi_0(z)$  уже найдено. Следовательно, задача состоит теперь в построении приближенного представления величины  $\frac{d\varphi_0}{dz} \Big|_{z=r}$ , когда приближенное представление для функции  $\varphi_0(z)$  известно. Это можно сделать различными способами. Ш.С. Николайшвили разработал для этой цели следующий удобный метод.

Построим новую систему полиномов  $\bar{U}_k(x)$  так, чтобы коэффициенты разложения

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d\varphi_0}{dz} \Big|_{z=r} = e^{-\alpha r} \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \bar{U}_k(\alpha r) \quad (2.3.27)$$

в точности совпадали с коэффициентами разложения (23.2.5), то есть чтобы выполнялось соотношение

$$\bar{b}_k = b_k. \quad (2.3.28)$$

Если воспользоваться системой дополнительных полиномов  $\bar{U}_k^+(x)$ , определенных из условий

$$2 \int_0^\infty e^{-x} \bar{U}_k(x) \bar{U}_{k'}^+(x) dx = \delta_{kk'}, \quad (2.3.29)$$

то для коэффициентов разложения получим

$$\bar{b}_k = -2\varphi_0(r) \bar{U}_k^+(\alpha r) \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \varphi_0(r) \frac{d\bar{U}_k^+}{dr} dr.$$

Из последнего соотношения вместе с (2.3.20) следует, что условие (23.2.8) будет выполнено, если потребовать

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{U}_k^+(x)}{dx} &= U_k^+(x); \\ \bar{U}_k^+(x) \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.30)$$

Соотношения (2.3.30) однозначно определяют систему дополнительных полиномов  $\bar{U}_k^+(x)$ . Система основных полиномов  $\bar{U}_k(x)$  тогда может быть построена с помощью соотношений ортогональности (23.2.9).

Действительно, поскольку полином  $\bar{U}_k(x)$  может быть представлен в виде

$$\bar{U}_k(x) = e^x \frac{d}{dx} [e^{-x} \tilde{U}_k(x)], \quad (2.3.31)$$

где  $\tilde{U}_k(x)$  — полином степени  $k$  относительно  $x$ , соотношению (23.2.9) можно придать вид

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty e^{-x} \bar{U}_k(x) \bar{U}_{k'}^+(x) dx &= 2 \int_0^\infty \frac{d}{dx} [e^{-x} \tilde{U}_k(x)] \bar{U}_{k'}^+(x) dx = \\ &= -2 \int_0^\infty e^{-x} \tilde{U}_k(x) U_{k'}^+(x) dx = \delta_{kk'}, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

откуда, используя соотношение (2.3.19), получим

$$\tilde{U}_k(x) = -U_k(x),$$

где  $U_k(x)$  — уже известные нам полиномы.

Таким образом, искомая система полиномов очень просто связана с полиномами  $U_k(x)$ , а именно

$$\bar{U}_k(x) = -e^x \frac{d}{dx} [e^{-x} U_k(x)]. \quad (2.3.33)$$

В частности, четыре первых полинома  $\bar{U}_k(x)$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_0(x) &= 1; \\ \bar{U}_1(x) &= 1 - \frac{1}{2}x; \\ \bar{U}_2(x) &= 1 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2; \\ \bar{U}_3(x) &= 1 - \frac{19}{16}x + \frac{5}{16}x^2 - \frac{1}{48}x^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.34)$$

Таким образом, искомое приближенное представление функции  $\frac{d\varphi_0(z)}{dz}|_{z=r}$  построено.

Следовательно, используя соотношение (23.2.7), окончательно получим

$$\varphi_0(r) = \frac{\alpha}{2\pi r} e^{-\alpha r} \sum_{k=0}^n b_k \bar{U}_k(\alpha r). \quad (2.3.35)$$

Метод, изложенный в настоящем параграфе, без труда распространяется на случай многогрупповой задачи.

Следует отметить, что быстрота сходимости метода моментов существенно увеличивается, если его применить только к рассеянной части излучения, предварительно выделив нейтроны, не соударившиеся ни одного раза. В этом случае поступим следующим образом.

Решение кинетического уравнения Больцмана

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \varphi(r, \Omega') \omega(\mu_0) + \frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r}) \quad (2.3.36)$$

будем искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = B(\mathbf{r}, \Omega) + \Phi(\mathbf{r}, \Omega), \quad (2.3.37)$$

где  $B(\mathbf{r}, \Omega)$  — решение следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla B + \Sigma B &= \frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r}); \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} B(\mathbf{r}, \Omega) e^{-\Sigma|z|} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.38)$$

Очевидно, что  $B(\mathbf{r}, \Omega)$  является потоком нейтронов, не испытавших ни одного соударения.

В результате решения задачи (2.3.38) следует [см. (1.3.21)], что в плоском случае

$$B_0(z) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma|z|), \quad (2.3.39)$$

а в сферически-симметричном [см. (1.3.27)]

$$B_0(r) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r}. \quad (2.3.40)$$

Найдем далее моменты функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Phi_0(r)$ . Сначала рассмотрим задачу с изотропным плоским источником.

Проинтегрируем соотношение (2.3.37) по  $\mu$  и разрешим равенство относительно  $\Phi_0(z)$ . Тогда получим

$$\Phi_0(z) = \varphi_0(z) - \frac{1}{2} E_1(\Sigma|z|). \quad (2.3.41)$$

Умножим равенство (2.3.41) почленно на  $\frac{1}{(2n)!} z^{2n}$  и проинтегрируем по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате будем иметь

$$\Phi_0^{(2n)} = \varphi_0^{(2n)} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} E_1(\Sigma|z|) dz, \quad (2.3.42)$$

или

$$\Phi_0^{2n} = \varphi_0^{2n} - \frac{\beta_{2n}}{(2n)! \Sigma^{2n}}, \quad (2.3.43)$$

где

$$\beta_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} E_1(x) dx. \quad (2.3.44)$$

Таким образом, если моменты функции  $\varphi_0(z)$  известны, то моменты функции  $\Phi_0(z)$  найдутся по формуле (2.3.43).

В случае изотропного точечного источника соотношение (2.3.42) перейдет в следующее:

$$4\pi r^2 \Phi_0(r) = 4\pi r^2 \varphi_0(r) - e^{-\Sigma r}. \quad (2.3.45)$$

Умножим почленно равенство (2.3.45) на  $\frac{r^{2n}}{(2n)!}$  и проинтегрируем по всем  $r$  от 0 до  $\infty$ . Тогда получим соотношение между моментами

$$\Phi_0^{2n} = \varphi_0^{2n} - \frac{\bar{\beta}_{2n}}{(2n)! \Sigma^{2n}}, \quad (2.3.46)$$



где

$$\bar{\beta}_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x} dx. \quad (2.3.47)$$

После того, как моменты функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Phi_0(r)$  найдены, определим величины

$$b_k = \frac{\Sigma}{2} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \Sigma^{2k} \Phi_0^{2k}. \quad (2.3.48)$$

Тогда решение задачи для плоского изотропного источника представится в виде

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma|z|) + e^{-\alpha|z|} \sum_{k=0}^{n-1} b_k U_k(\alpha|z|) \quad (2.3.49)$$

и для точечного изотропного источника

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r} + 2\alpha r e^{-\alpha r} \sum_{k=0}^{n-1} b_k \bar{U}_k(\alpha r). \quad (2.3.50)$$

## 2.4. Метод аппроксимации

В настоящем параграфе изложены результаты Ш. С. Николайшвили [291], касающиеся приближенного представления решения односкоростного кинетического уравнения выражением определенного вида, первые три момента которого совпадают с точными моментами для решения кинетического уравнения. Указанное представление строится с учетом характера асимптотического поведения искомой функции<sup>1)</sup>.

Пусть на интервале  $(0, \infty)$  определена неотрицательная функция  $\Phi(r)$ , причем известны первые три четных момента этой функции

$$\mu_0 = \int_0^{\infty} \Phi(r) dr, \quad \mu_2 = \frac{1}{2!} \int_0^{\infty} r^2 \Phi(r) dr, \quad \mu_4 = \frac{1}{4!} \int_0^{\infty} r^4 \Phi(r) dr. \quad (2.4.1)$$

Положим приближенно

$$\Phi(r) = A r^{\nu} e^{-\alpha r}, \quad (2.4.2)$$

где  $\nu, \alpha$  и  $A$  подберем так, чтобы первые три четных момента функции (2.4.2) совпадали с точными.

<sup>1)</sup>См. также работу А. Р. Птицына [307].

Умножим равенство (2.4.2) на  $\frac{1}{n!}$  и проинтегрируем по  $r$  в пределах от нуля до бесконечности. Тогда приходим к трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= A\Gamma(\alpha, \nu); \\ \mu_2 &= A \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!\alpha^2} \Gamma(\alpha, \nu); \\ \mu_4 &= A \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{4!\alpha^4} \Gamma(\alpha, \nu), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

где

$$\Gamma(\alpha, \nu) = \int_0^{\infty} r^{\nu} e^{-\alpha r} dr, \quad (2.4.4)$$

Первые два уравнения системы (2.4.3) дают

$$\mu_2 = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!\alpha^2} \mu_0, \quad (2.4.5)$$

а последние два уравнения этой же системы —

$$\frac{\mu_4}{2!\mu_2} = \frac{(\nu+3)(\nu+4)}{4!\alpha^2}. \quad (2.4.6)$$

Исключив  $\alpha^2$  из уравнений (2.4.5) и (2.4.6), получим для определения  $\nu$  следующее квадратное уравнение:

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(\nu+3)(\nu+4)} = p, \quad (2.4.7)$$

где

$$p = \frac{\mu_2^2}{6\mu_0\mu_4}.$$

Определив  $\nu$  из уравнения (2.4.7), найдем затем  $\alpha$  из уравнения (2.4.5):

$$\alpha = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!} \frac{\mu_0}{\mu_2}. \quad (2.4.8)$$

Наконец, первое уравнение из системы (2.4.3) дает искомое значение  $A$ . Заметим при этом, что

$$\Gamma(\alpha, \nu) = \int_0^{\infty} r^{\nu} e^{-\alpha r} dr = \frac{1}{\alpha^{\nu+1}} \int_0^{\infty} x^{\nu} e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\alpha^{\nu+1}}, \quad (2.4.9)$$

где  $\Gamma(\nu)$  — гамма-функция Эйлера. Поэтому для  $A$  будем иметь

$$A = \frac{\mu_0 \alpha^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (2.4.10)$$

Таким образом, приближенное представление (2.4.2) может быть записано окончательно в виде

$$\Phi(r) = \frac{\mu_0 \alpha^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} r^\nu e^{-\alpha r}, \quad (2.4.11)$$

где  $\nu$  и  $\alpha$  определяются соответственно формулам (2.4.7) и (2.4.8).

Можно показать, что для всякой неотрицательной функции  $\Phi(r)$ , интегрируемой по  $(0, \infty)$  вместе с  $r^2\Phi(r)$  и  $r^4\Phi(r)$ , корни уравнения (2.4.7) вещественны, причем один из этих корней удовлетворяет условию

$$\nu > -1.$$

Для того чтобы это показать, сначала произведем анализ свойств параметра  $p$ . Положительность  $p$  следует непосредственно из неотрицательности функции  $\Phi(r)$ . Можно также показать, что

$$0 < p < 1.$$

В самом деле, в силу неравенства Коши – Буняковского

$$\left( \int_0^\infty r^2 \Phi(r) dr \right)^2 \leq \int_0^\infty r^4 \Phi(r) dr \int_0^\infty \Phi(r) dr,$$

или, в соответствии с принятыми обозначениями,

$$(2\mu_2)^2 \leq 4!\mu_4\mu_0,$$

откуда

$$p = \frac{\mu_2^2}{6\mu_0\mu_4} < 1.$$

Докажем теперь вещественность корней уравнения (2.4.7). Решив это уравнение относительно  $\nu$ , получим

$$\nu = \frac{7p - 3 \pm \sqrt{1 + 14p + p^2}}{2(1 - p)}, \quad (2.4.12)$$

откуда, в силу неравенства  $p > 0$ , следует вещественность корней уравнения (2.4.7).

Рассмотрим далее функцию

$$f(\nu) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(\nu+3)(\nu+4)}$$

и изучим ее поведение при вещественных значениях  $\nu$  (рис. 8).

Функция  $f(\nu)$  определена всюду на вещественной оси, за исключением точек  $\nu = -3$  и  $\nu = -4$ , являющихся точками разрыва второго рода. Производная функция  $f'(\nu)$ , равная

$$f'(\nu) = 2 \cdot \frac{2\nu^2 + 10\nu + 11}{(\nu + 3)^2(\nu + 4)^2},$$

обращается в нуль только при двух значениях  $\nu$ :

$$\nu_1 = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2}, \quad \nu_2 = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2}.$$

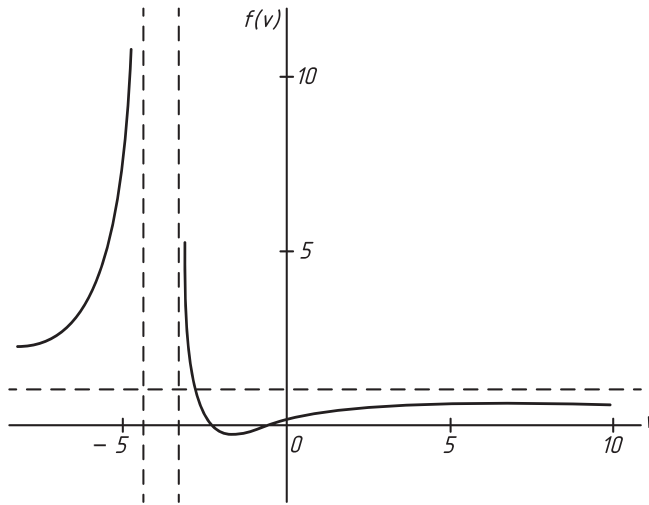


Рис. 8. График функции  $f(\nu)$

На интервале  $(-\infty, -4)$  производная  $f'(\nu)$  положительна; внутри интервала  $(-4, -3)$   $f'(\nu)$  положительна слева от точки  $\nu = \nu_1$  и отрицательна справа от этой точки; наконец, на интервале  $(-3, \infty)$  производная  $f'(\nu)$  отрицательна слева от точки  $\nu = \nu_2$  и положительна справа от этой точки. Таким образом, для всех  $\nu > \frac{-5 + \sqrt{3}}{2}$  функция  $f(\nu)$  монотонно возрастает с ростом  $\nu$ . В точках  $\nu = -2$ ,  $\nu = -1$  функция  $f(\nu)$  обращается в нуль, в точке  $\nu = -\frac{5}{2}$  она принимает значение, равное 1, а при  $\nu \rightarrow \infty \lim f(\nu) = 1$ .

График функции  $f(\nu)$  представлен на рисунке 8. Из рассмотрения этого графика следует, что уравнение (2.4.7) действительно допускает решение относительно  $\nu$ , удовлетворяющее условию  $\nu > -1$ . Одновременно можно показать, что уравне-

ние (2.4.5) допускает положительный корень  $\alpha$ , равный арифметическому значению квадратного корня в формуле (2.4.8). При этом в качестве  $\nu$  следует взять решение уравнения (2.4.7), удовлетворяющее условию  $\nu > -1$ .

Наконец можно показать, что приближенное значение функции  $\Phi(r)$ , полученное с помощью формулы (2.4.2), положительно всюду на интервале  $(0, \infty)$ , если в качестве  $\nu$  выбрать решение, удовлетворяющее условию  $\nu > -1$ . Это утверждение следует непосредственно из положительности функции

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^{\infty} x^{\nu} e^{-\alpha x} dx$$

при  $\nu > -1$ .

Развитый Ш.С. Николайшвили аппроксимационный метод успешно применяется для решения задач нейтронной физики. В качестве простейшего примера рассмотрим односкоростное кинетическое уравнение со сферической индикатрисой рассеяния и точечным изотропным источником нейтронов:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r}). \quad (2.4.13)$$

Для приближенного представления решения уравнения (2.4.13) глобальный поток  $\varphi_0(r)$  представим в виде суммы потоков нейтронов нерассеянных и испытавших, по крайней мере, одно столкновение:

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r} + \Phi_0(r). \quad (2.4.14)$$

Вычислим далее моменты функции  $\varphi(r, \mu)$ :

$$\varphi_{\nu}^n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \varphi_{\nu}(r) r^n dr, \quad (2.4.15)$$

где

$$\varphi_{\nu}(r) = \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) P_{\nu}(\mu) d\mu. \quad (2.4.16)$$

Для вычисления моментов  $\varphi_{\nu}^n$  воспользуемся методом, рассмотренным в предыдущем параграфе. Тогда мы приходим к системе уравнений, аналогичной (2.4.15), которая имеет вид

$$\left[ \Sigma_\nu \varphi_\nu^n = \delta_{0n} \delta_{0\nu} + \frac{1}{2\nu+1} \frac{\nu(n+\nu+1)}{n} \varphi_{\nu-1}^{n-1} + \frac{(\nu+1)(n-\nu)}{n} \varphi_{\nu+1}^{n-1} \right], \quad (2.4.17)$$

где

$$\Sigma_\nu = \begin{cases} \Sigma - \Sigma_s & \text{при } \nu = 0; \\ \Sigma & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases}$$

Из последней системы, полагая  $\frac{\Sigma_s}{\Sigma} = \omega$ , находим

$$\varphi_0^0 = \frac{\Sigma_c}{\Sigma(1-\omega)}, \quad \varphi_0^2 = \frac{\Sigma_c}{\Sigma^3(1-\omega)^2}, \quad \varphi_0^4 = \frac{9-4\omega}{9\Sigma^5(1-\omega)^3}. \quad (2.4.18)$$

Однако для целей аппроксимации нам необходимо знать не моменты  $\varphi_\nu^n$ , а четные моменты функции  $\Phi_\nu(r)$ .

Для того чтобы найти четные моменты функции  $\Phi_\nu(r)$ , которые снова обозначим через  $\mu_0, \mu_2, \mu_4$ , воспользуемся выражением (2.4.14) и соотношениями (2.4.18). Умножив равенство (2.4.14) на  $\frac{r^n}{n!}$  и проинтегрировав по всему пространству, получим формулы

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^0 &= \frac{1}{\Sigma} + \mu_0; \\ \varphi_0^2 &= \frac{1}{\Sigma^3} + \mu_2; \\ \varphi_0^4 &= \frac{1}{\Sigma^5} + \mu_4; \end{aligned} \right\} \quad (2.4.19)$$

откуда, в силу равенств (2.4.18), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\omega}{\Sigma(1-\omega)}; \\ \mu_2 &= \frac{\omega(2-\omega)}{\Sigma^3(1-\omega)^2}; \\ \mu_4 &= \frac{\omega(23-27\omega+9\omega^2)}{9\Sigma^5(1-\omega)^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.20)$$

Теперь найдем величину  $p$ :

$$p = \frac{3}{2} \frac{(2-\omega)^2}{23-27\omega+9\omega^2} \quad (2.4.21)$$

и значение  $\nu$  определим по формуле (2.4.12):

$$\nu = \frac{7p-3+\sqrt{1+14p+p^2}}{2(1-p)}. \quad (2.4.22)$$

Далее, получим выражение для  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!} \frac{1-\omega}{2-\omega}} \Sigma. \quad (2.4.23)$$

Таким образом, значения  $\alpha$  и  $\nu$  найдены и выражение для  $\Phi_0(r)$  запишется в виде

$$\Phi_0(r) = \frac{\omega}{1-\omega} \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left( \frac{\alpha}{\Sigma} \right)^\nu r^\nu e^{-\alpha r}. \quad (2.4.24)$$

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{\alpha}{\Sigma} = \sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!} \frac{1-\omega}{2-\omega}},$$

формулу (2.4.24) перепишем в виде

$$\Phi_0(r) = \frac{\omega}{1-\omega} \frac{\alpha^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} (\Sigma r)^\nu e^{-\alpha \Sigma r}. \quad (2.4.25)$$

Подставляя полученный результат в формулу (2.4.14), окончательно будем иметь

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r} + \frac{\omega}{1-\omega} \frac{\alpha^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} (\Sigma r)^\nu e^{-\alpha \Sigma r}. \quad (2.4.26)$$

Аналогичным методом может быть получена более простая формула, если предположить, что рассеянная часть излучения определяется двумя моментами:  $\mu_0$  и  $\mu_2$ . Такой метод был развит Гросжаном (см. [291]). Состоит этот метод в следующем. Решение кинетического уравнения аппроксимируется формулой вида

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r} + A r e^{-k \Sigma r}.$$

Два неизвестных параметра  $A$  и  $k$  найдутся с помощью моментов. В результате нетрудно прийти к формуле

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r} + \frac{3\omega}{2-\omega} e^{-k \Sigma r}, \quad (2.4.27)$$

где

$$k = \sqrt{3 \frac{1-\omega}{2-\omega}}.$$

Полезно отметить следующее обстоятельство. Если не выделять нерассеянной части излучения, а решение по-прежнему искать по двум моментам в форме

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = A r e^{-\alpha \Sigma r},$$

то можно прийти к приближенному решению следующего вида:

$$4\pi r^2 \varphi_0^{diff}(r) = \frac{r e^{-\frac{r}{L}}}{\Sigma_c L^2}, \quad (2.4.28)$$

где

$$L = \frac{1}{\Sigma \Sigma_c} = \sqrt{\frac{3}{\Sigma \Sigma_c}}. \quad (2.4.29)$$

В дальнейшем (см. § 5.3) будет показано, что это представление решения совпадает с диффузионным приближением.

В заключение отметим, что асимптотическое решение находится методами, изложенными в § 2.1, и имеет вид

$$4\pi r^2 \varphi_{0as} = \frac{2k_0^2 \Sigma r}{\omega \left[ \frac{\omega}{1 - k_0^2} - 1 \right]} e^{-k_0 \Sigma r}, \quad (2.4.29')$$

где  $k_0$  — положительный корень уравнения

$$\frac{\omega}{2k_0} \ln \frac{1 - k_0}{1 + k_0} = 1. \quad (2.4.30)$$

Анализ расчетов, проведенных с помощью формулы (2.4.26), показывает, что она хорошо представляет точное решение при  $\omega = 0,3$  вплоть до 10 свободных пробегов от источника и до 100 пробегов при  $\omega = 0,9$ . При этом ошибка не превышает 10%.

Точность формулы (2.4.26) для всех рассматриваемых расстояний от источника выше, чем формулы (2.4.27), в особенности для случая сильного поглощения. Кроме того, следует заметить, что точность формул (2.4.26) и (2.4.27) повышается с увеличением  $\omega$ . Этот факт можно объяснить тем, что чем больше  $\omega \leq 1$ , тем в большей области изменения  $\Sigma r$  значения функции

$$\Phi_0(r) = 4\pi r^2 \varphi_0(r) - e^{-\Sigma r} \quad (2.4.31)$$

определяются асимптотической формулой (2.4.28), вид которой совпадает с используемым нами представлением  $\Phi_0(r)$ . Если бы функция (2.4.31) совпадала с функцией  $4\pi r^2 \varphi_{0as}(r)$  всюду, то формулы (2.4.26) и (2.4.27) привели бы к точным результатам. Однако не следует думать, что точность этих формул монотонно убывает с уменьшением  $\omega$ . При  $\omega = 0$  обе формулы дают

$$4\pi r^2 \varphi_0(r) = e^{-\Sigma r}$$

и представляют, таким образом, точное решение задачи. Следовательно, существует некоторое значение  $\omega$ , при котором



область применимости формул (2.4.26) и (2.4.27) наибольшая. Приблизительно это значение  $\omega$  может быть найдено, если найти третий или четвертый момент функции  $4\pi r^2 \varphi_0(r)$ , определяемый по формуле (2.4.26), и сравнить их с точными значениями. Значение  $\omega$ , при котором достигается наилучшее совпадение точного и приближенного моментов, и будет представлять искомое значение  $\omega$ . Так, в случае формулы (2.4.26) отношение точного и приближенного моментов четвертого порядков будет равно

$$\frac{\mu_4}{\tilde{\mu}_4} = \frac{\frac{(9-4\omega)}{9(1-\omega)^3}}{1 + \frac{5}{9} \frac{(2-\omega)^2}{(1-\omega)}}.$$

В качестве величины, характеризующей совпадение точного и приближенного моментов, мы введем величину

$$\delta = \frac{\tilde{\mu}_4}{\mu_4} - 1.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$\delta = -\frac{\omega(1-\omega)(3-4\omega)}{9-4\omega}.$$

Отсюда следует, что в указанном смысле формула (2.4.26) наиболее точна при  $\omega = 0$ ,  $\omega = \frac{3}{4}$  и в окрестности  $\omega = 1$ . При этих значениях  $\omega$  значения  $\mu_4$ , определяемые по формуле (2.4.26), совпадают с точными.

# 3

## Методы решения кинетических уравнений

### 3.1. Метод Владимирова

В настоящей главе рассмотрены методы решения односкоростных кинетических уравнений. Наибольшее распространение в физических расчетах реакторов получили численные методы Владимирова [70] и  $S_n$ -метод Карлсона [159].

Оба указанные выше метода в качестве составной части предполагают использование метода последовательных приближений, который в конечном итоге сводится к итерациям по столкновениям нейтронов с ядрами. Это то, что объединяет оба метода.

Различие методов состоит в способах решения указанных уравнений на заданном шаге итерационного процесса. Для этого В. С. Владимирова воспользовался характеристиками дифференциальной части оператора кинетического уравнения, записал уравнение в новых переменных, одной из которых принял характеристику, и привел уравнение к виду, удобному для проведения численных расчетов. Карлсон при решении воспользовался методом дискретных ординат с применением простейших интерполяционных формул. В этом состоит различие указанных выше методов.

Следует отметить, что оба метода весьма эффективно программируются на вычислительных машинах и позволяют находить решение кинетического уравнения с любой степенью точности. В. С. Владимирова для метода характеристик доказал сходимость решения приближенной задачи к точному решению кинетического уравнения [70].

Вследствие того, что оба метода предполагают применение итерационного процесса, возникает необходимость в улучше-

нии сходимости этого процесса. В настоящей главе мы остановимся лишь на методах улучшения сходимости, предложенных Л. А. Люстерником [225] и В. Н. Морозовым [283]. Другие методы, к сожалению, требуют осуществления большого объема вычислений. Однако в ряде случаев, возможно, они будут наиболее целесообразными.

Начнем рассмотрение метода Владимирова.

В 1952 г. В. С. Владимиров предложил метод решения кинетических уравнений для сферически симметричных областей, основанный на использовании характеристик интегро-дифференциального уравнения Больцмана [70]. Этот метод допускает простое программирование на электронных вычислительных машинах.

Рассмотрим метод Владимирова применительно к решению транспортного уравнения с изотропными источниками нейтронов

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu') d\mu' + \frac{1}{2} f(r) \quad (3.1.1)$$

при условии, что

$$\varphi(R, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu \leq 0. \quad (3.1.2)$$

В уравнении (3.1.1) произведем замену переменных по формулам

$$x = r\mu, \quad y = r\sqrt{1 - \mu^2} \quad (3.1.3)$$

и преобразуем его к виду

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma(r) \varphi = \frac{\Sigma_s(r)}{2} \varphi_0(r) + \frac{1}{2} f(r), \quad (3.1.4)$$

где решение уравнения (3.1.4) связано с решением уравнения (3.1.1) следующим образом:

$$\varphi = \varphi\left(r, \cos \arctg \frac{y}{x}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В процессе преобразования уравнения (3.1.1) к новым переменным прямоугольник ( $0 \leq r \leq R$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ ) непрерывно переходит в полукруг ( $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $y > 0$ ), при этом линии  $r\sqrt{1 - \mu^2} = \text{const}$ , являющиеся характеристиками дифференциальной части оператора интегро-дифференциального уравнения (3.1.1), перейдут в прямые линии  $y = \text{const}$ .

Граничные условия для новой функции  $\varphi(x, y)$  принимают вид

$$\varphi(\sqrt{R^2 - y^2}, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq R. \quad (3.1.5)$$

Решив далее уравнение (3.1.4) как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка при условии (3.1.5), получим

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^x Q(\sqrt{x'^2 + y^2}) e^{-\int_{x'}^x \Sigma(\sqrt{x''^2 + y^2}) dx''} dx', \quad (3.1.6)$$

где

$$Q(r) = \Sigma_s(r)\varphi_0(r) + f(r). \quad (3.1.7)$$

Всю область определения решения рассматриваемой задачи разобьем координатными линиями  $r = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  на интервалы и ради простоты примем следующую нумерацию узловых точек. Каждую узловую точку сетки будем характеризовать двумя индексами, второй из которых обозначает номер координатной линии  $y = \text{const}$ , начиная с первой, совпадающей с диаметром окружности (рис. 9).

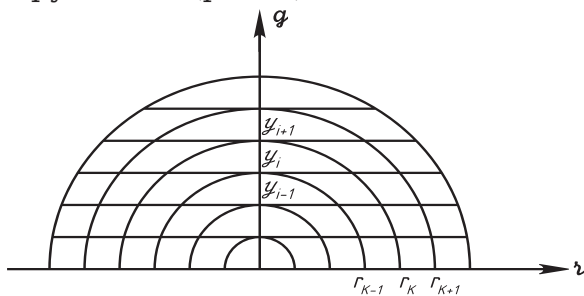


Рис. 9. Расположение узловых точек сетки в случае сферическисимметричных областей

Первый индекс обозначает порядковый номер точки на каждой из линий  $y = \text{const}$  слева направо, начиная с точек, расположенных на внешней границе при  $r = R(x \leq 0)$ , которым припишем индекс 1. В результате точки  $k = l$ , расположенные на левой части каждой окружности, будут иметь одинаковый первый индекс, а симметрично расположенные относительно оси  $y$  будут иметь индекс

$$k = N - 2(i - 1) - (l - 1),$$

где  $N$  — число узловых точек на линии  $y = 0$ ;  $i$  — номер линии  $y = y_i$ , а  $l$  — номер окружности  $r = r_l$ , отсчитываемый слева направо.

Если теперь любую узловую точку на координатной плоскости  $y, r$  обозначить  $(y_i, x_{ki})$ , то в результате интегрирования уравнения (3.1.4) по  $x$  вдоль интервала  $(x_{k-1,i}, x_{k,i})$  будем иметь

$$\varphi_{ki} = \varphi_{k-1,i} e^{-\int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} \Sigma(r) dx} + \frac{1}{2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} Q(r) e^{-\int_x^{x_{k,i}} \Sigma(r) dx'} dx.$$

Предположим теперь, что на интервале  $(r_{k-1}, r_k)$  функция  $\Sigma(r)$  постоянна и равна  $\Sigma_{k-1/2}$ . Тогда интегралы в экспонентах вычисляются в явном виде и мы получим

$$\varphi_{ki} = \varphi_{k-1,i} e^{-\Sigma_{k-1/2} \Delta x_{k,i}} + \frac{1}{2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} Q(r) e^{-\Sigma_{k-1/2} (x_{k,i} - x)} dx,$$

где

$$\Delta x_{ki} = x_{ki} - x_{k-1,i}.$$

Используем теперь предположение о линейности подынтегральной функции  $Q(r)$  в пределах интервала  $(r_{k-1}, r_k)$ . Тогда получим следующее приближенное равенство:

$$\varphi_{ki} = p_{ki} \varphi_{k-1,i} + \frac{A_{ki}}{2} \frac{Q(r_{k-1} + 0)}{\Sigma(r_{k-1} + 0)} + \frac{1}{2} (1 - p_{ki} - A_{ki}) \frac{Q(r_k - 0)}{\Sigma(r_k - 0)}, \quad (3.1.8)$$

где

$$p_{ki} = e^{-\Sigma_{k-1/2} \Delta x_{ki}}, \quad A_{ki} = A(\Sigma_{k-1/2} \Delta x_{ki}), \quad A(u) = \frac{1 - e^{-u}}{u} - e^{-u}.$$

Для полной определенности к системе равенств (3.1.8) присоединим граничные условия в узловых точках на левой части полуокружности  $r = R$

$$\varphi_{1,i} = 0. \quad (3.1.9)$$

Рекуррентное соотношение (3.1.8) вместе с условием (3.1.9) полностью определяет решение  $\varphi_{ki}$  во всех узловых точках по известным значениям  $Q(r)$ .

До сих пор предполагалось, что функция  $Q(r)$  известна. Однако функция  $Q(r)$  выражается через решение задачи по формуле (3.1.7). Это значит, что решение задачи может быть получено методом последовательных приближений. Этот метод определим следующим образом. По заданному начальному распределению функции  $Q(r)$  с помощью (3.1.8), (3.1.9) найдем приближенное значение функции  $\varphi_{ki}$  во всех узлах сетки.

Для получения приближенного значения функции

$$\varphi_0(r) = \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) d\mu$$

воспользуемся квадратурной формулой

$$\varphi_0(r_k) = \sum_i a_{ki} \varphi_{ki}, \quad (3.1.10)$$

где суммирование проводится по всем точкам полуокружности с номером  $k$ ,  $a_{ki}$  — коэффициенты квадратурной формулы для точки данной окружности.

После того как функция  $\varphi_0(r)$  в данном приближении получена, находится приближенное значение  $Q_{ki}$ :

$$Q_{ki} = \Sigma_{sk-1/2} \varphi_0(r_k) + f(r_k). \quad (3.1.11)$$

Если функции, входящие в равенство (3.1.11), разрывны в точках  $r_k$ , то необходимо рассчитать значения функции  $Q$  справа и слева от разрыва, то есть  $Q(r_k \pm 0)$ .

Этот итерационный процесс следует продолжать до тех пор, пока отношение последующего приближения к предыдущему с требуемой точностью не будет равно единице. Полученные значения функции  $\varphi(r, \mu)$  и будут приближенным решением задачи. Е. С. Кузнецовым [179] и В. С. Владимировым [71, 70] показано, что метод последовательных приближений сходится к точному решению задачи.

Метод Владимирова может быть существенно упрощен при использовании метода конечных разностей.

Снова, как и раньше, введем в рассмотрение систему узловых точек с соответствующей нумерацией. Эту систему узловых точек будем называть основной. Кроме того, введем в рассмотрение вспомогательную систему точек, расположенных на пересечении окружностей  $r_{k+1/2}$  с прямыми  $y_i$ .

Проинтегрируем уравнение (3.1.4) вдоль прямой  $y_i = \text{const}$  на интервале  $(x_{k-1,i}, x_{k,i})$ . Тогда будем иметь

$$\varphi_{ki} - \varphi_{k-1,i} + \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} \Sigma(r) \varphi\left(r, \frac{x}{r}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} Q_r dx. \quad (3.1.12)$$

Если функция  $\Sigma$  постоянна на интервале  $(r_{k-1}, r_k)$ , то равенство (3.1.12) упростится:

$$\varphi_{ki} - \varphi_{k-1,i} + \Sigma_{k-1/2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} \varphi\left(r, \frac{x}{r}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} Q_r dx. \quad (3.1.13)$$

Интегралы в (3.1.13) заменим приближенными выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} \varphi\left(r, \frac{x}{r}\right) dx &= \frac{\Delta x_{k-1/2,i}}{2} (\varphi_{ki} + \varphi_{k-1,i}); \\ \frac{1}{2} \int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} Q(r) dx &= \frac{\Delta x_{k-1/2,i}}{2} Q_{k-1/2,i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}\right) \varphi_{ki} - \\ &- \left(1 - \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}\right) \varphi_{k-1,i} = \frac{\Delta x_{k-1/2,i}}{2} Q_{k-1/2,i}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Разрешая уравнение (3.1.15) относительно функции  $\varphi_{k,i}$ , получим

$$\varphi_{ki} = \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}}{1 + \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}} \varphi_{k-1,i} + \frac{1}{2} \frac{\Delta x_{k-1/2,i}}{1 + \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}} Q_{k-1/2,i}, \quad (3.1.16)$$

$$\varphi_{k,i} = \alpha_{ki} \varphi_{k-1/2,i} + \beta_{ki} Q_{k-1/2,i}, \quad (3.1.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ki} &= \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}}{1 + \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}}; \\ \beta_{ki} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta x_{k-1/2,i}}{1 + \frac{1}{2} \Delta x_{k-1/2,i} \Sigma_{k-1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.18)$$

После того, как величины  $\varphi_{ki}$  найдены, новое приближенное значение  $Q_{k-1/2,i}$  находится по формуле

$$Q_{k-1/2,i} = \Sigma_{k-1/2} \varphi_{0k-1/2} + f_{k-1/2}, \quad (3.1.19)$$

где

$$\varphi_{0,k-1/2} = \frac{1}{2} (\varphi_{0k-1} + \varphi_{0k}), \quad (3.1.20)$$

$$f_{k-1/2} = \frac{1}{2} (f_{k-1} + f_k), \quad (3.1.21)$$

$$\varphi_{0k} = \Sigma \gamma_{ki} \varphi_{ki}, \quad (3.1.22)$$

причем суммирование производится по всем узловым точкам полуокружности  $r = r_k$ .

Переходим теперь к решению задач с цилиндрической симметрией по методу характеристик Владимирова. При этом остановимся на рассмотрении задачи для бесконечного цилиндра и задачи для цилиндра, ограниченного с торцов. Соответствующее обобщение метода Владимирова для задач с осевой симметрией выполнено Б. Л. Гаврилиным.

Сначала рассмотрим решение односкоростного кинетического уравнения для бесконечного цилиндра. Как известно, кинетическое уравнение переноса нейтронов для бесконечной цилиндрической системы при изотропном рассеянии нейтронов в лабораторной системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \Sigma \varphi = \\ = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \psi', \vartheta') + \frac{1}{4\pi} f(r), \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

где  $f(r)$  — изотропные внешние источники нейтронов.

Введем в рассмотрение новые переменные  $\gamma$  и  $\mu$  по формулам

$$\gamma = \cos \vartheta; \quad \mu = \cos \psi.$$

Тогда уравнение (3.1.23) запишется в следующем виде:

$$\sqrt{1 - \gamma^2} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \Sigma \varphi = \frac{1}{4\pi} (\Sigma_s \varphi_0 + f), \quad (3.1.24)$$

где

$$\varphi_0(r) = 4 \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1 - \mu'^2}} \int_0^1 d\gamma' \varphi(r, \gamma', \mu'). \quad (3.1.25)$$

Для полной определенности к уравнению (3.1.24) присоединим граничные условия. При этом будем рассматривать граничные условия на внешней границе реактора, а также условия на границе ячейки гетерогенного реактора.



В случае реактора граничные условия имеют вид

$$\varphi(R, \mu, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (3.1.26)$$

В случае ячейки

$$\varphi(R, \mu, \gamma) = \varphi(R, -\mu, -\gamma). \quad (3.1.27)$$

Интервал  $0 \leq \gamma \leq 1$  разобьем узловыми точками  $\gamma_k$  на частичные интервалы. В качестве узловых точек выберем точки, соответствующие квадратурной формуле Гаусса. В каждой плоскости  $\gamma = \text{const}$  решение не будет зависеть от  $\gamma$ . Тогда уравнение (3.1.24) можно записать для точек  $\gamma_k$  и разделить на  $\sqrt{1 - \gamma_k^2}$ . В результате приходим к задаче, формально совпадающей с задачей для сферически-симметричных областей:

$$\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mu} + \Sigma_k \varphi_k = Q_k, \quad (3.1.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \varphi(r, \mu, \gamma_k) = \varphi_k(r, \mu), \\ \Sigma_k &= \frac{\Sigma}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}}, \\ Q_k &= \frac{1}{4\pi \sqrt{1 - \gamma_k^2}} [\Sigma_s \varphi_0(r) + f(r)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.29)$$

В качестве граничных условий выберем следующие:  
на внешней поверхности реактора

$$\varphi_k(R, \mu) = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 0 \quad (3.1.30)$$

и на границе ячейки

$$\varphi_k(R, \mu) = \varphi_k(R, -\mu). \quad (3.1.31)$$

Для решения уравнения (3.1.28) перейдем к новым переменным  $x, y$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2(1 - \gamma_k^2) &= r^2; \\ x &= r\mu; \\ y &= r \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \gamma_k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.32)$$

При этом область определения решения, представляющая прямоугольник  $0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1$ , непрерывно переходит а  $\varphi_{0,k}$  вычисляются с помощью формулы

в полуэллипс:

$$0 \leq y \leq R, \quad -R \leq x \leq R, \\ x^2 + y^2(1 - \gamma_k^2) = R^2.$$

Линии  $r\sqrt{\frac{1-\mu^2}{1-\gamma_k^2}} = \text{const}$ , являющиеся характеристиками дифференциальной части интегро-дифференциального уравнения, перейдут в прямые  $y = \text{const}$ , при этом оператор  $\mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}$  преобразуется в оператор  $\frac{\partial}{\partial x}$ , а уравнение (3.1.28) примет вид

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \Sigma_k \varphi_k = Q_k. \quad (3.1.33)$$

Решение этого уравнения записывается в виде приближенного рекуррентного равенства

$$\varphi_{kmn} = p_{kmn} \varphi_{kmn-1} + \frac{A_{kmn}}{\Sigma_{kmn-1}} Q_{kmn-1} + (1 - p_{kmn} - A_{kmn}) \frac{Q_{kmn}}{\Sigma_{kmn}}, \quad (3.1.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_{kmn} &= e^{-\Sigma_{kmn-1/2} \Delta x_{mn}}, \\ A_{kmn} &= A(\Sigma_{kmn-1/2} \Delta x_{mn}), \\ A(u) &= \frac{1 - e^{-u}}{u} - e^{-u}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.35)$$

Граничные условия для уравнения (3.1.34) имеют следующий вид:

на внешней поверхности реактора

$$\varphi_{km1} = 0, \quad (3.1.36)$$

на границе ячейки

$$\varphi_{km1} = \varphi_{kmN}. \quad (3.1.37)$$

Таким образом, задача о нахождении потока нейтронов полностью определена в предположении, что функция  $Q(r)$  известна. Дальнейший этап вычислений состоит в отыскании функции  $Q(r)$ , которая определяется решением задачи. В соответствии с итерационным процессом примем, что уравнение (3.1.33) записывается в  $p$ -й итерации следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_k^{(p)}}{\partial x} + \Sigma_k \varphi_k^{(p)} = \frac{1}{4\pi \sqrt{1 - \gamma_k^2}} (\Sigma_s \varphi_0^{(p-1)} + f). \quad (3.1.38)$$

Задавая произвольным значением  $Q^{(p)} = \Sigma_s \varphi_0^{(p-1)} + f$ , получим решение  $\varphi_k^{(p)}$ , с помощью которого можно найти  $Q^{(p+1)}(r)$ . Для этого необходимо отыскать интегральный поток  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = 4 \int_0^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{\varphi(r, \gamma, \mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu. \quad (3.1.39)$$

Введем обозначение

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(r, \gamma, \mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu = F(r, \gamma). \quad (3.1.40)$$

Поскольку решение задачи находилось в точках  $\gamma$ , являющихся узловыми точками квадратурной формулы Гаусса, то

$$\varphi_0(r) = 4 \sum_k A_k F(r, \gamma_k), \quad (3.1.41)$$

где  $A_k$  — коэффициенты формулы Гаусса.

Найдем выражение для функции  $F(r, \gamma)$ . Заменяем  $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(r, \gamma, \mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu$  суммой интегралов в пределах от  $\mu_{\alpha-1}$  до  $\mu_\alpha$  и предположим, что решение  $\varphi$  линейно зависит от  $\mu$  на интервале  $(\mu_{\alpha-1}, \mu_\alpha)$ , то есть

$$\varphi(r, \gamma_k, \mu) = \frac{\mu - \mu_{\alpha-1}}{\mu_\alpha - \mu_{\alpha-1}} \varphi_\alpha + \frac{\mu_\alpha - \mu}{\mu_\alpha - \mu_{\alpha-1}} \varphi_{\alpha-1}, \quad (3.1.42)$$

где

$$\varphi_\alpha = \varphi(r, \gamma_k, \mu_\alpha).$$

Произведя интегрирование выражения  $\frac{\varphi(r, \gamma_k, \mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}}$  на интервале  $(\mu_{\alpha-1}, \mu_\alpha)$ , получим

$$F(r, \gamma_k) = \sum_\alpha (A_\alpha \varphi_\alpha + B_{\alpha-1} \varphi_{\alpha-1}), \quad (3.1.43)$$

где

$$A_\alpha = \frac{1}{\Delta \mu_{\alpha-1/2}} \left\{ \sqrt{1 - \mu_{\alpha-1}^2} - \sqrt{1 - \mu_\alpha^2} - \mu_{\alpha-1} (\arcsin \mu_\alpha - \arcsin \mu_{\alpha-1}) \right\};$$

$$B_{\alpha-1} = \frac{-1}{\Delta \mu_{\alpha-1/2}} \left\{ \sqrt{1 - \mu_{\alpha-1}^2} - \sqrt{1 - \mu_\alpha^2} - \mu_\alpha (\arcsin \mu_\alpha - \arcsin \mu_{\alpha-1}) \right\};$$

$$\Delta \mu_{\alpha-1/2} = \mu_\alpha - \mu_{\alpha-1}.$$

Учитывая, что

$$\mu_\alpha = \frac{x_\alpha}{r} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2(1 - \gamma^2)}},$$

преобразуем коэффициенты квадратурной формулы (3.1.43) к следующему виду:

$$A_\alpha = -\frac{1}{\Delta\mu_{\alpha-1/2}} \left\{ \Delta y_{\alpha-1/2} \sqrt{1 - \gamma_k^2} + x_{\alpha-1} \left( \arcsin \frac{x_\alpha}{r} - \arcsin \frac{x_{\alpha-1}}{r} \right) \right\};$$

$$B_{\alpha-1} = \frac{1}{\Delta\mu_{\alpha-1/2}} \left\{ \Delta y_{\alpha-1/2} \sqrt{1 - \gamma_k^2} + x_\alpha \left( \arcsin \frac{x_\alpha}{r} - \arcsin \frac{x_{\alpha-1}}{r} \right) \right\},$$

где

$$\Delta x_{\alpha-1/2} = x_\alpha - x_{\alpha-1}; \quad \Delta y_{\alpha-1/2} = y_\alpha - y_{\alpha-1}.$$

После получения функции  $\varphi_0(r)$  можно подсчитать приближенное значение  $Q^{(p)}(r)$ :

$$Q^{(p)}(r) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1 - \gamma_k^2}} [\Sigma_s(r)\varphi_0^{(p)}(r) + f(r)]. \quad (3.1.44)$$

Указанный итерационный процесс следует продолжать до тех пор, пока значение  $Q^{(p)}$  не совпадает с требуемой точностью со значением  $Q$  в  $(p - 1)$  приближении.

Переходим теперь к решению односкоростного уравнения для области, являющейся конечным цилиндром. В этом случае решение  $\varphi$  будет функцией четырех переменных  $\varphi = \varphi(r, z, \psi, \vartheta)$ . Рассмотрим уравнение переноса для конечного цилиндра в случае сферической индикатрисы рассеяния и изотропными внешними источниками нейтронов:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \\ = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(r, z, \psi', \vartheta') + \frac{1}{4\pi} f(r, z). \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Выразив  $\cos \vartheta$  через  $\gamma$  и  $\cos \psi$  через  $\mu$ , получим

$$\sqrt{1 - \gamma^2} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{1}{4\pi} (\Sigma_s \varphi_0 + f), \quad (3.1.46)$$

где

$$\varphi_0 = 4 \int_0^1 d\gamma' \int_{-1}^1 \frac{\varphi(r, z', \gamma', \mu')}{\sqrt{1 - \mu'^2}} d\mu'. \quad (3.1.47)$$

Поставим для уравнения (3.1.46) граничные условия.

На внешней границе реактора

$$\varphi(r, z, \mu, \gamma) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0, \quad (3.1.48)$$

где поверхность  $S$  есть цилиндр радиусом  $r = R$ , ограниченный плоскостями  $z = 0$  и  $z = H$ .

На внешней поверхности ячейки гетерогенного реактора

$$\varphi(r, z, \mu, \gamma) = \varphi(r, z, -\mu, -\gamma) \quad \text{на } S',$$

где поверхность  $S'$  — цилиндр радиусом  $r = R$ , и

$$\varphi(r, z, \mu, \gamma) = 0 \quad \text{на } S'', \quad (3.1.49)$$

где поверхность  $S''$  — плоскости  $z = 0$  и  $z = H$ .

Приведем уравнение (3.1.46) к виду уравнения для сферически-симметричной области и затем решим его методом Владимирова с использованием характеристик. Для этого сделаем ряд предположений, а именно: будем считать, что интервал изменения  $\gamma$  можно разбить узловыми точками, которыми могут служить точки Гаусса. Далее, интервалы изменения переменных  $r, z, \mu$  можно разбить на отрезки  $\Delta r, \Delta z, \Delta \mu$ , а функции  $\Sigma_s$  и  $\Sigma$  считать постоянными на интервале  $\Delta r, \Delta z, \Delta \mu$ .

Сохраним в левой части уравнения (3.1.46) оператор  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , а остальные члены перенесем в правую часть и проинтегрируем уравнение (3.1.46) по  $z$  в пределах от  $z_{j-1}$  до  $z_j$ . Тогда получим

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_{z_{j-1}}^{z_j} I dz, \quad (3.1.50)$$

где

$$I = \frac{Q - \Sigma \varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right);$$

$$Q = \frac{\Sigma_s \varphi_0 + f}{4\pi}.$$

Для приближенного представления правой части воспользуемся простейшей аппроксимацией:

$$\int_{z_{j-1}}^{z_j} I(r, z) dz = \frac{\Delta z_{j-1/2}}{2} [I(r, z_j) + I(r, z_{j-1})],$$

где

$$I(r, z_j) = \frac{Q(r, z_j)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - \frac{\Sigma(r, z_j)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \varphi(r, z_j, \mu, \gamma) - \\ - \mu \frac{\partial \varphi(r, z_j, \mu, \gamma)}{\partial r} - \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi(r, z_j, \mu, \gamma)}{\partial \mu}, \\ \Delta z_{j-1/2} = z_j - z_{j-1}.$$

Уравнение (3.1.50) можно представить в виде

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} (\varphi_j - \varphi_{j-1}) = \left\{ \frac{Q_j + Q_{j-1}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - \frac{\Sigma_j \varphi_j + \Sigma_{j-1} \varphi_{j-1}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - \right. \\ \left. - \left( \mu \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu} \right) - \left( \mu \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \mu} \right) \right\} \frac{\Delta z_{j-1/2}}{2}, \quad (3.1.51)$$

или в несколько преобразованном виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu} + \Sigma'_j \varphi_j = Q'_j, \quad (3.1.52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'_j &= \frac{\Sigma_j + \frac{2\gamma}{\Delta z_{j-1/2}}}{\sqrt{1 - \gamma^2}}; \\ Q'_j &= \frac{Q_j}{\sqrt{1 - \gamma^2}} + \frac{Q_{j-1}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - \left( \mu \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \mu} \right) - \\ &\quad - \frac{\Sigma_{j-1} - \frac{2\gamma}{\Delta z_{j-1/2}}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \varphi_{j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.53)$$

Уравнение (3.1.52) совпадает по форме с уравнением для сферической симметричной области. Таким образом, исходное транспортное уравнение заменено системой  $j$  уравнений для сферически-симметричных областей. Используя сделанные выше предположения, разобьем интервал изменения  $\gamma$  в соответствии с узловыми точками  $\gamma_k$  квадратурной формулы Гаусса. Следовательно, каждое уравнение с индексом  $j$  заменяется системой из  $k$  уравнений, в каждом из которых поток нейтронов  $\varphi$  есть функция только  $r$  и  $\mu$ . Итак, уравнение Больцмана для конечного цилиндра представлено в виде системы из  $jk$  уравнений сферически-симметричного вида:

$$\mu \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \mu} + \Sigma'_{jk} \varphi_{jk} = Q'_{jk}, \quad (3.1.54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jk} &= \varphi(r, z_j, \mu, \gamma_k); \\ \Sigma'_{jk} &= \frac{\Sigma_j + \frac{2\gamma_k}{\Delta z_{j-1/2}}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}}; \\ Q'_{jk} &= \frac{Q(r, z_j) + Q(r, z_{j-1})}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}} - \left( \mu \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \mu} \right) - \\ &\quad - \frac{\Sigma_{j-1} - \frac{2\gamma_k}{\Delta z_{j-1/2}}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.55)$$

Следуя методу Владимирова, заменяем переменные  $r$  и  $\mu$  на  $x$  и  $y$  по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r\mu, \\ y &= r \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \gamma_k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.56)$$

Тогда система уравнений (3.1.54) преобразуется в систему уравнений вида

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial x} + \Sigma'_{jk} \varphi_{jk} = Q'_{jk}. \quad (3.1.57)$$

Согласно методу Владимирова, решение системы уравнений (3.1.57) связано с решением системы уравнений (3.1.54) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi\left(r, \cos \arctg \frac{y}{x}\right), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2(1 - \gamma_k^2)}. \end{aligned}$$

В процессе преобразования системы уравнений (3.1.54) к новым переменным область определения функции  $\varphi$ , представлявшая прямоугольник  $0 \leq r \leq R$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ , перейдет в полуэллипс  $x^2 + y^2(1 - \gamma_k^2) = R^2$ ,  $y > 0$ . Линии

$$r \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \gamma_k^2}} = \text{const}$$

перейдут в прямые линии  $y = \text{const}$  (рис. 10). При этом необходимо иметь в виду, что переход от уравнения (3.1.54) к уравне-

нию (3.1.57) может быть осуществлен также следующими заменами переменных:

$$\text{а) } x = r\mu, \quad y = r \sqrt{1 - \mu^2};$$

$$\text{б) } x = \frac{r\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad y = r \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \gamma^2}}.$$

Выбор того или иного способа связан с удобством расчета.

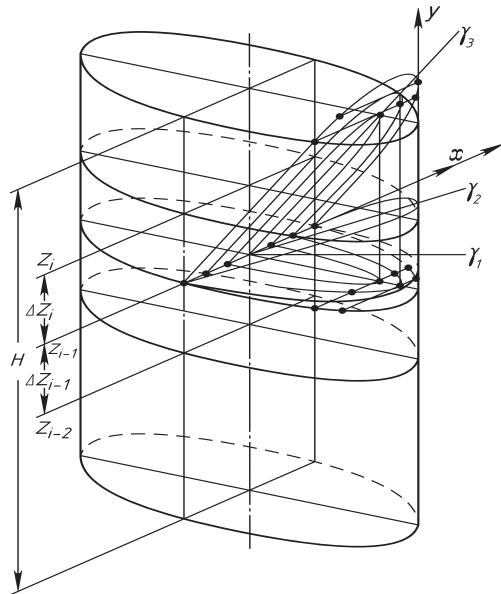


Рис. 10. Схема вычисления потока методом Владимира для конечного цилиндра

Поставим граничные условия для полученной системы уравнений. Из условия равенства нулю потока на плоскости  $z = 0$  получим

$$\varphi_{0,k} = 0.$$

На боковой поверхности граничные условия примут вид

$$\varphi(-\sqrt{R^2 - y^2(1 - \gamma_k^2)}, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{R}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}}.$$

Следуя далее стандартному приему, получим решение системы (3.1.57) в виде системы  $jkmn$  приближенных равенств:

$$\begin{aligned} \varphi_{jkmn} = p_{jkmn} \varphi_{jkmn-1} + \frac{A_{jkmn}}{\Sigma_{jkmn-1}} Q_{jkmn-1} + \\ + (1 - p_{jkmn} - A_{jkmn}) \frac{Q_{jkmn}}{\Sigma_{jkmn}}, \end{aligned} \quad (3.1.58)$$



где

$$\left. \begin{aligned} p_{jkmn} &= e^{-\Sigma_{jkmn-1/2}\Delta x_{mn}}; \\ A_{jkmn} &= A(\Sigma_{jkmn-1/2}\Delta x_{mn}); \\ A(u) &= \frac{1 - e^{-u}}{u} - e^{-u}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.59)$$

Присоединим к этой системе граничные условия в узловых точках на левой части полуэллипса: при решении задачи о распределении потока нейтронов в реакторе

$$\varphi_{jkm1} = 0; \quad (3.1.60)$$

при решении задачи о распределении потока нейтронов на ячейке гетерогенного реактора

$$\varphi_{jkm1} = \varphi_{jkmn}. \quad (3.1.61)$$

Система рекуррентных соотношений (3.1.58) и граничных условий (3.1.60) или (3.1.61) полностью определяет значение потока во всех узловых точках.

Для того чтобы замкнуть итерационный процесс, необходимо найти выражение для функции  $Q(r, z)$ , которая до сих пор предполагалась известной. Так как

$$Q(r, z) = \frac{\Sigma_s(r, z)\varphi_0(r, z) + f(r, z)}{4\pi},$$

то задача сводится к отысканию потока  $\varphi_0(r, z)$ :

$$\varphi_0(r, z) = \int \varphi(r, z, \Omega) d\Omega. \quad (3.1.62)$$

Интегральный поток  $\varphi_0$  отыскивается с использованием квадратурных формул, выведенных ранее, при рассмотрении задачи в бесконечной цилиндрической области.

В заключение необходимо отметить, что выражения, полученные для решения задачи, наиболее общие. Они автоматически переходят в формулы для бесконечного цилиндра и для сферы при соответствующих предположениях. Например, положив  $\Delta z = \infty$ , что соответствует бесконечному цилиндру, мы получаем выражение для бесконечного цилиндра. При рассмотрении сферически-симметричных задач зависимости от  $\gamma$  и  $z$  в решении нет, и формулы автоматически переходят в соответствующие формулы для сферически-симметричных задач.

### 3.2. Метод Карлсона

Метод Карлсона, или  $S_n$ -метод, основывается на исчислении конечных разностей. Рассмотрим  $S_n$ -метод для простейших случаев, что позволит показать его основные особенности и послужит основанием для обобщений [159].

Рассмотрим сферически-симметричную область  $0 \leq r \leq R$ , в которой заданы изотропные источники нейтронов  $\frac{1}{2}f(r)$ . Тогда поток нейтронов  $\varphi(r, \mu)$  определится из уравнения

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \frac{1}{2} Q(r), \quad (3.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(r) &= \Sigma_s \varphi_0(r) + f(r); \\ \varphi(r) &= \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

при условии, что  $\varphi(r, \mu) = 0$  при  $\mu \leq 0$ .

Для применения метода важно знать уравнение для результирующего потока нейтронов

$$J(r) = \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi(r, \mu). \quad (3.2.3)$$

Оно получается интегрированием обеих частей уравнения (3.2.1) по  $\mu$  и имеет вид

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) J + \Sigma \varphi_0 = Q(r). \quad (3.2.4)$$

Уравнение (3.2.4) выражает баланс нейтронов. Лучше всего это можно увидеть, если умножить обе части равенства (3.2.4) на  $r^2$  и проинтегрировать от  $a$  до  $b$ . Полученный результат

$$b^2 J(b) - a^2 J(a) = \int_a^b r^2 [Q(r) - \Sigma \varphi(r)] dr \quad (3.2.5)$$

показывает, что результирующие потоки нейтронов через поверхность  $r = b$  и поверхность  $r = a$  отличаются общим числом нейтронов, родившихся в сферическом слое  $a \leq r \leq b$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>В этом равенстве множитель  $4\pi$  исключен из рассмотрения, как несущественный.

При  $S_n$ -методе интервал изменения  $\mu$   $(-1, +1)$  разбивается на  $n$  частей ( $n$  — четное) равной длины  $(2/n)$ . Предположим, что в каждом интервале  $(\mu_{j-1}, \mu_j)$  поток  $\varphi(r, \mu)$  выражается линейной функцией

$$\varphi(r, \mu) = \frac{n}{2} [(\mu - \mu_{j-1})\varphi(r, \mu_j) + (\mu_j - \mu)\varphi(r, \mu_{j-1})], \quad (3.2.6)$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где  $\mu_0 = -1$  и  $\mu_j = -1 + \frac{2j}{n}$ . Другими словами,  $\varphi(r, \mu)$  аппроксимируется набором взаимосвязанных линейных функций.

Если теперь подставить выражение (3.2.6) в уравнение (3.2.1) и результат проинтегрировать по  $\mu$  от  $\mu_{j-1}$  до  $\mu_j$ , то придем к системе  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений ( $S_n$ -уравнений):

$$\left(a_j \frac{d}{dr} + \frac{b_j}{r} + \Sigma\right) \varphi(r, \mu_j) + \left(\bar{a}_j \frac{d}{dr} - \frac{b_j}{r} + \Sigma\right) \varphi(r, \mu_{j-1}) = Q(r), \quad (3.2.7)$$

где

$$a_j = \frac{1}{3} (2\mu_j + \mu_{j-1});$$

$$\bar{a}_j = \frac{1}{3} (\mu_j + 2\mu_{j-1});$$

$$b_j = \frac{n}{3} (3 - \mu_j^2 - \mu_j \mu_{j-1} - \mu_{j-1}^2),$$

причем

$$b_1 = -2a_1; \quad b_{j+1} - b_j = -2(\bar{a}_{j+1} + a_j).$$

Комбинируя выражение (3.2.6) с уравнением (3.2.4), найдем, что

$$\varphi_0(r) = \sum_j \delta_j a(r, \mu_j);$$

$$J(r) = \sum_j c_j \varphi(r, \mu_j), \quad (3.2.8)$$

где

$$\delta_0 = \delta_n = \frac{1}{2n}; \quad \delta_j = \frac{1}{n};$$

$$-c_0 = c_n = \frac{a_n}{2n}; \quad c_j = \frac{1}{2n} (\bar{a}_{j+1} + \alpha_j).$$

Можно показать, что для сведения к минимуму ошибки при численном интегрировании уравнения (3.2.7) оно должно быть проинтегрировано по отрицательным направлениям  $r$

для  $j = 1, 2, \dots, n/2$  и в противоположном направлении для  $j > (n/2)$ . Исходные граничные условия задаются на внешней границе системы. Поэтому сначала должно быть произведено внутреннее интегрирование, которое означает, что  $(n + 1)$ -е уравнение, являющееся необходимым дополнением к равенству (3.2.7), должно включать только функцию  $\varphi(r, -1)$ .

Подставив  $\mu = -1$  в уравнение (3.2.1), получим

$$\left(-\frac{d}{dr} + \Sigma\right)\varphi(r, -1) = \frac{1}{2}Q(r). \quad (3.2.9)$$

Этим завершается  $S_n$ -преобразование.

Приведенный выше алгоритм может быть осуществлен обычным образом. Интервал  $(-1, +1)$ , разумеется, может быть разбит совершенно произвольным образом с тем лишь условием, чтобы граничные точки включали  $\mu = -1$ ,  $1$  и  $0$  (последнее необходимо для устранения неопределенности в отношении направления интегрирования). Тем не менее при соблюдении известной осторожности можно считать, что интервал изменения  $\mu = 0$  находится внутри некоторого интервала в окрестности точки  $\mu = 0$ . Могут быть рассмотрены и другие формы уравнения (3.2.6), полученные, например, введением ступенчатых кусочно-постоянных функций для  $\mu$ , определенных таким образом, чтобы удовлетворялись условия, которые будут описаны ниже.

Если просуммировать уравнение (3.2.7), то в результате получим дифференциальное уравнение для  $J(r)$ , согласующееся с уравнениями (3.2.4) и (3.2.8). Другими словами,  $S_n$ -уравнения имеют те же самые свойства сохранения, что и транспортное уравнение. В отношении уравнения (3.2.3) заметим также, что если  $\varphi(r, \mu)$  есть линейная функция  $\mu$ , то только члены с  $\mu$  дают вклад в  $J(r)$ , и, следовательно, если пренебречь коэффициентом при  $\mu$ ,  $J(r) = \frac{1}{3}$ . То же имеем и в случае  $S_n$ -метода. В самом деле, если  $\varphi(r, \mu)$  выражаются линейной функцией, получаем

$$J(r) = \sum_j c_j \mu_j = \frac{1}{3}. \quad (3.2.10)$$

Поскольку предположение о линейности потока по  $\mu$  может быть принято как основное предположение для диффузионного

приближения, то соотношение (3.2.10) можно трактовать как свойство диффузионной теории. Важность этого свойства вытекает из того обстоятельства, что желательно снизить порядок  $S_n$ -приближений с тем, чтобы получить результаты диффузионной теории в тех случаях, когда она справедлива.

Так как основной целью  $S_n$ -метода является обработка транспортного уравнения для его численного решения, следующим шагом является преобразование уравнения (3.2.7) в систему разностных уравнений. Для этого разделим область  $0 \leq r \leq R$  на ряд совершенно произвольных интервалов, задав значения  $r_i$  от  $r_0 = 0$  до  $r_m = R$  с тем условием, что при этом значения  $r_i$  входят радиусы границ, разделяющих области из различных материалов. Предположим теперь, что значения сечений заданы в виде ступенчатой функции, то есть постоянны в каждом интервале изменения  $r$ , и что  $Q(r)$  представлены аналогичным образом. Следовательно, в каждом интервале  $(r_{i-1}, r_i)$  можно заменить  $\Sigma(r)$  на  $\Sigma_i$ ,  $Q(r)$  на  $Q_i$  и  $\varphi_0(r)$  на  $\varphi_i$ . Точно так же представим и множитель  $\frac{1}{r}$ , то есть заменим его ступенчатой функцией  $\frac{1}{\bar{r}_i}$ , где  $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$ . Предположим далее, что

$$\varphi_{ij} = \varphi(r_i, \mu_j).$$

Используя далее метод конечных разностей, то есть проинтегрируем уравнение (3.2.7) по  $r$  в каждом интервале  $(r_{i-1}, r_i)$ . Тогда используя сделанные выше предположения, приходим к следующему разностному уравнению:

$$(a_j + h_i + b_j s_i) \varphi_{ij} + (-a_j + h_i + b_j s'_i) \varphi_{i-1,j} + (\bar{a}_j + h_i - b_j s_i) \varphi_{i,j-1} + (-\bar{a}_j + h_i - b_j s'_i) \varphi_{i-1,j-1} = 2\Delta_j Q_i, \quad (3.2.11)$$

где

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i), \quad h_i = \Delta_i \Sigma_i, \quad s_i = \frac{\Delta_i}{\bar{r}_i}, \quad s'_i = \frac{\Delta_i}{\bar{r}'_i}$$

(величину  $r'_i$  определим в дальнейшем).

Если просуммировать уравнение (3.2.11) и сумму разделить на  $2n$ , то, определив  $\varphi_i$  и  $J_i$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{2} [\varphi_0(r_{i-1}) + \varphi_0(r_i)]; \\ J_i &= J(r_i), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

получим

$$(1 + 2s_i)J_i - (1 + 2s'_i)J_{i-1} = \Delta_i(Q_i - \Sigma_i\varphi_i). \quad (3.2.13)$$

Если потребовать, чтобы уравнения (3.2.13) и (3.2.5) были совместны, то необходимо сначала умножить все коэффициенты в уравнении (3.2.13) на

$$r_i^2 = \frac{r_i^3 - r_{i-1}^3}{6\Delta_i},$$

а затем приравнять новые коэффициенты в левой части соответственно  $r_i^2$  и  $r_{i-1}^2$ .

Отсюда найдем выражения для  $s_i$  и  $s'_i$ :

$$\left. \begin{aligned} s_i &= \frac{r_i^2 - \bar{r}_i^2}{2r_i^2}; \\ s'_i &= \frac{\bar{r}_i^2 - r_{i-1}^2}{2\bar{r}_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.14)$$

Следовательно величины  $r_i$  и  $r'_i$  не вполне эквивалентны.

Предположим, что уравнение (3.2.11), так же как (3.2.1) и (3.2.7), обладает свойством сохранения нейтронов. Тогда можно представить уравнение (3.2.9) в (3.2.7), положив  $\mu_j = \mu_{j-1} = -1$  для  $j = 0$ , и таким образом обобщить уравнение (3.2.11) для  $j$ , лежащих в интервале от 0 до  $n$ .

Если предположить, что члены, описывающие источники  $Q_i$ , заданы, то решение уравнения (3.2.11) может быть произведено следующим образом.

Вычисляется выражение (3.2.11) для  $j = 0$ , начиная с  $i = n-1$  при  $\varphi_{n,0}$ , заданном граничными условиями. Если, например, система граничит с вакуумом, то  $\varphi_{n,0} = 0$ . Отсюда находим  $\varphi_{n-1,0}$  и затем последовательно  $\varphi_{n-2,0}$ ,  $\varphi_{n-3,0}$  и т. д., вплоть до  $i = 0$ . Аналогичным образом можно вычислить значения  $\varphi_{i,j}$  для  $j = 1, 2, \dots, n/2$ , используя для этого заданные значения  $Q_i$  и  $\varphi_{i,j-1}$ , полученные для предшествующих значений  $j$ . Далее с помощью выражения (3.2.11) вычисляются значения  $\varphi_{i,j}$  для  $j > n/2$  так же, как и для  $j \leq n/2$ , с той лишь разницей, что расчет начинается с  $i = 1$  и  $\varphi_{0,j}$  с заданными условиями при  $r = 0$ , откуда после  $\varphi_{1j}$  находятся в порядке возрастания  $\varphi_{2j}$ ,  $\varphi_{3j}$  и т. д.

Если граничные условия имеют более сложный вид, как, например, в случае наличия идеального отражателя на внешней

границе, то можно сначала получить значение для простых граничных условий, а затем их исправлять с помощью метода последовательных приближений.

Из сказанного следует, что  $S_n$ -уравнения решаются методом итерации функции источника, начиная с подбора пробной функции для  $Q_i$  или для одного или нескольких ее составляющих.

Процесс итерации считается законченным, когда достигнута заранее заданная сходимость.

$S_n$ -метод Карлсона весьма просто распространяется на случай плоской и цилиндрической геометрий [159].

### 3.3. Улучшение сходимости метода последовательных приближений

При решении задач с помощью метода последовательных приближений часто приходится иметь дело с медленно сходящимся итерационным процессом. Такое положение, например, наблюдается при решении кинетических уравнений с помощью методов Владимирова и Карлсона. Для ускорения сходимости итерационного метода применяют методы, основанные на спектральных свойствах операторов. Рассмотрим этот метод применительно к неоднородному уравнению

$$\varphi = A\varphi + F, \quad (3.3.1)$$

где  $A$  — самосопряженный оператор.

Метод последовательных приближений определим следующим образом:

$$\varphi^{(n)} = A\varphi^{(n-1)} + F. \quad (3.3.2)$$

Этот процесс необходимо продолжать до тех пор, пока не будет получено решение с заданной степенью точности.

Для улучшения сходимости рассмотрим метод Л. А. Люстерника. Этот метод состоит в следующем. Наряду с неоднородным уравнением (3.3.1) рассмотрим однородное уравнение

$$(A - \lambda_i E)\psi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.3.3)$$

где  $\psi_i$  — система линейно-независимых решений, соответствующих системе собственных чисел  $\lambda_i$ .

Представим решение уравнения (3.3.1) в виде линейной комбинации

$$\varphi = \sum_i a_i \psi_i. \quad (3.3.4)$$

Пусть нулевое приближение вектора  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi^{(0)} = \sum_i \alpha_i \psi_i. \quad (3.3.5)$$

Если далее положить

$$F = \sum_i \beta_i \psi_i, \quad (3.3.6)$$

то с помощью итерационного процесса (3.3.2) получим

$$\varphi^{(n)} = \sum_i \beta_i \psi_i (1 + \lambda_i + \dots + \lambda_i^{n-1}) + \sum_i \alpha_i \lambda_i^n \psi_i. \quad (3.3.7)$$

Далее, пусть  $\lambda_1 = \max\{\lambda_i\}$ . Естественно, что сходимость рядов в выражении (3.3.7) будет иметь место только при  $\lambda_1 < 1$ .

Рассмотрим разность

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = \sum_i \beta_i \lambda_i^{(n)} \psi_i + \sum_i \alpha_i \lambda_i^{(n)} (\lambda_i - 1) \psi_i, \quad (3.3.8)$$

которую представим в следующем виде:

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = \lambda_1^{(n)} \left[ \gamma_1 \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \psi_i \right], \quad (3.3.9)$$

где

$$\gamma_i = \beta_i + (\lambda_i - 1) \alpha_i.$$

Если  $n$  достаточно велико, то

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = \lambda_1^{(n)} \gamma_1 \psi_1 \left[ 1 + O\left( \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} \right) \right]. \quad (3.3.10)$$

Аналогичным образом

$$\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} = \lambda_1^{(n-1)} \gamma_1 \psi_1 \left[ 1 + O\left( \frac{\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right) \right]. \quad (3.3.11)$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}} = \lambda_1 + O\left( \frac{\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right).$$

Таким образом, приближенное значение первого собственного числа однородной системы уравнений найдем в виде

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}}. \quad (3.3.12)$$



Если  $\varphi$  — точное решение уравнения (3.3.1), то, очевидно, имеет место равенство

$$\varphi - \varphi^{(n)} = (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) + (\varphi^{(n+2)} - \varphi^{(n+1)}) + \dots \quad (3.3.13)$$

Рассмотрим разность

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = A(\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}) = \dots = A^n(\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}).$$

Учитывая, что  $\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)} = \sum_i \gamma_i \psi_i$ , будем иметь

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = \sum_i \gamma_i \lambda_i^n \psi_i, \quad (3.3.14)$$

или, при больших значениях  $n$ ,

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} = \gamma_1 \lambda_1^{(n)} \psi_1 \left[ 1 + O\left(\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right) \right]. \quad (3.3.15)$$

Подставив соотношение (3.3.15) в (3.3.13), получим

$$\varphi - \varphi^{(n)} = \sum_i \frac{\gamma_i \lambda_i^{(n)}}{1 - \lambda_i} \psi_i, \quad (3.3.16)$$

или, при больших значениях  $n$ ,

$$\varphi - \varphi^{(n)} = \frac{\gamma_1 \lambda_1^{(n)} \psi_1}{1 - \lambda_1} \left[ 1 + O\left(\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right) \right]. \quad (3.3.17)$$

Принимая во внимание соотношение (3.3.15), приближенно можно записать

$$\varphi - \varphi^{(n)} = \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{1 - \lambda_1},$$

или

$$\varphi = \varphi^{(n)} + \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{1 - \lambda_1}. \quad (3.3.18)$$

Формула (3.3.18) и дает требуемое уточнение приближенного решения в случае сходящегося итерационного процесса.

### 3.4. Другой метод улучшения сходимости итерационного процесса

В. Н. Морозов разработал другой, весьма эффективный метод улучшения сходимости метода последовательных приближений при решении кинетических уравнений [283]. Сущность метода состоит в следующем.

Рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана для произвольной геометрии

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega) + \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}) \quad (3.4.1)$$

при условии, что

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (3.4.2)$$

Итерационный процесс определим обычным способом:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi^{(n)} + \Sigma \varphi^{(n)} &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega \varphi^{(n-1)}(\mathbf{r}, \Omega) + \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}); \\ \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

Решение задачи (3.4.1), (3.4.2) будем искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3.4.4)$$

где  $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$  — поправочный член к  $n$ -й итерации.

Для приближенного нахождения поправки  $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$  В. Н. Морозов предложил следующий метод.

Соотношение (3.4.4) подставим в уравнение (3.4.1) и в граничные условия (3.4.2). Тогда с учетом (3.4.3) получим

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varepsilon^{(n)} + \Sigma \varepsilon^{(n)} - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \varepsilon_0^{(n)} &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} (\varphi_0^{(n)} - \varphi_0^{(n-1)}); \\ \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega); \\ \varepsilon_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

Уравнение (3.4.5) будем называть уравнением итерационных поправок [283]. Однако решение задачи (3.4.5) еще не упрощается по сравнению с решением задачи (3.4.1), (3.4.2). Так, в левой части кинетического уравнения для  $\varepsilon^{(n)}$  стоит величина  $\varepsilon_0^{(n)}$ , получаемая усреднением решения  $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$  по всем углам.

Рассмотрим далее величину

$$\frac{1}{4\pi} \varepsilon_0^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3.4.7)$$

Если решение задачи (3.4.5) представить в виде ряда по сферическим функциям

$$\varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon_0^{(n)}(\mathbf{r}) + 3\mathbf{\Omega}\varepsilon_1^{(n)}(\mathbf{r}) + \dots], \quad (3.4.8)$$

то в качестве первого приближения можно принять

$$\frac{1}{4\pi} \varepsilon_0^{(n)}(\mathbf{r}) = \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \quad (3.4.9)$$

Если решение задачи изотропно, то последнее соотношение является точным. Используя теперь приближенное равенство (3.4.9), задачу (3.4.5) перепишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{\Omega}\nabla\tilde{\varepsilon}^{(n)} + \Sigma_c\tilde{\varepsilon}^{(n)} &= \frac{\Sigma_s}{4\pi}(\varphi_0^{(n)} - \varphi_0^{(n-1)}); \\ \tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) &= 0 \quad \text{на } S \text{ при } \mathbf{\Omega}\mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.10)$$

Очевидно, функция  $\tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  будет приближенным решением задачи (3.4.5).

Таким образом, численный алгоритм решения задачи (3.4.1), (3.4.2) формулируется следующим образом.

Выбирается функция  $\varphi_0^{(n-1)}(\mathbf{r})$  и решается задача (3.4.3). В результате решения находятся функции  $\varphi_0^{(n)}(\mathbf{r})$ . Далее составляется выражение

$$\tilde{Q}(\mathbf{r}) = \frac{\Sigma_s}{4\pi}(\varphi_0^{(n)} - \varphi_0^{(n-1)})$$

и производится решение задачи (3.4.10). В результате приходим к величине  $\tilde{\varepsilon}^{(n)}$ . Тогда приближенное решение задачи (3.4.1), (3.4.2) найдется в виде

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \quad (3.4.11)$$

Приняв далее полученное приближенное решение задачи (3.4.1), (3.4.2) за  $\varphi^{(n-1)}$  в (3.4.3) и подсчитав  $\varphi^{(n-1)}(\mathbf{r})$ , мы можем весь цикл вычислений повторить и т. д.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство.

Метод улучшения сходимости, предложенный В. Н. Морозовым, не нарушает баланса нейтронов в реакторе, то есть является балансным, и в этом смысле выгодно отличается от метода итерации источников по столкновениям, который на каждом шаге итерационного процесса не является балансным.

В самом деле, исходное кинетическое уравнение (3.4.1) одновременно является уравнением баланса нейтронов в любом элементе фазового пространства  $(\mathbf{r}, \Omega)$ . Проинтегрировав это уравнение по телесным углам единичной сферы и по всему объему  $G$ , получим

$$J + \int_G d\mathbf{r} \Sigma_c \varphi_0 = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}), \quad (3.4.12)$$

где

$$J = \int d\Omega \int d\mathbf{r} \Omega \nabla \varphi = \int_S dS |\Omega \mathbf{n}| \varphi(\mathbf{r}, \Omega) \quad (3.4.13)$$

( $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ ).

Из соотношения (3.4.15) следует, что  $J$  есть полная утечка нейтронов из области  $G$  через поверхность  $S$ .

Покажем, что функция  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$  также будет удовлетворять уравнению баланса нейтронов по всему объему  $G$ :

$$\tilde{J} + \int_G d\mathbf{r} \Sigma_c \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \Omega) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}), \quad (3.4.14)$$

где

$$\tilde{J} = \int_S dS |\Omega \mathbf{n}| \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3.4.15)$$

В самом деле, было показано, что решение

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$$

удовлетворяет соотношению баланса во всем объеме реактора. Необходимо теперь показать, что замена  $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$  на  $\tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega)$  не нарушит соотношения баланса.

Для того чтобы установить равенство (3.4.14), проинтегрируем уравнение для  $n$ -й итерации (3.4.3) по всем телесным углам единичной сферы к объему реактора. Тогда получим

$$\int dS |\Omega \mathbf{n}| \varphi^{(n)} + \int d\mathbf{r} \Sigma_c \varphi_0^{(n)} = \int d\mathbf{r} \Sigma_s \varphi_0^{(n-1)} + \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}). \quad (3.4.16)$$

Аналогичные преобразования теперь совершим с уравнением для итерационных поправок (3.4.10). В результате будем иметь

$$\int dS |\Omega \mathbf{n}| \tilde{\varepsilon}^{(n)} + \int d\mathbf{r} \Sigma_c \tilde{\varepsilon}_0^{(n)} = \int d\mathbf{r} \Sigma_s \varphi_0^{(n)} - \int d\mathbf{r} \Sigma_s \varphi_0^{(n-1)}. \quad (3.4.17)$$

Уравнения (3.4.16) и (3.4.17) сложим. Тогда получим уравнение

$$\int dS |\Omega \mathbf{n}| \tilde{\varphi} + \int d\mathbf{r} \Sigma_c \tilde{\varphi}_0 = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}), \quad (3.4.18)$$

совпадающее с (3.4.14). Следовательно, утверждение доказано.

Таким образом, рассмотренный метод улучшения сходимости является балансным.

Практические расчеты показали, что этот метод во много раз экономнее метода последовательных столкновений. В большинстве случаев он более чем в десять раз быстрее приводит к точному решению задачи.

### 3.5. Вариационный принцип

В. С. Владимиров сформулировал вариационный принцип для решения интегро-дифференциального уравнения переноса излучения [71, 72, 77]. В настоящем параграфе мы ограничимся рассмотрением наиболее частного случая задач со сферически-симметричной индикатрисой рассеяния.

Следуя В. С. Владимирову, рассмотрим кинетическое уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') + f(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3.5.1)$$

где  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  — функции точки  $\mathbf{r}$ . Требуется найти решение уравнения (3.5.1) в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Область  $G$  предполагается конечной и выпуклой, поверхность  $S$  — кусочно-гладкой.

Уравнение (3.5.1) дополним заданием граничного условия

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (3.5.2)$$

Разделим почленно уравнение (3.5.1) на  $\Sigma$  и введем обозначения

$$\Sigma = \alpha, \quad \frac{\Sigma_s}{\Sigma} = h, \quad \frac{1}{\Sigma} f = F. \quad (3.5.3)$$

Тогда приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{\alpha(\mathbf{r})} \Omega \nabla \varphi + \varphi = \frac{\lambda}{4\pi} h(\mathbf{r}) \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') + F(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3.5.4)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (3.5.5)$$

Здесь, кроме того, введен в рассмотрение формальный параметр  $\lambda$ , который будет нам полезен при отыскании ненулевых решений однородной задачи.

Относительно функций  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $h(\mathbf{r})$  предполагаем, что они кусочно-непрерывные и положительные в замкнутой области  $G$ .

Обозначим далее через  $L$  линейный дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (3.5.4):

$$L\varphi \equiv \frac{1}{\alpha(\mathbf{r})} \boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi + \varphi = \frac{1}{\alpha(\mathbf{r}_0 + \xi \boldsymbol{\Omega})} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\mathbf{r}_0 + \xi \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + \varphi, \quad (3.5.6)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.5.7)$$

а  $S$  — линейный оператор, стоящий в правой части уравнения (3.5.4):

$$S\varphi = \frac{h(\mathbf{r})}{4\pi} \int d\boldsymbol{\Omega}' \varphi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}'). \quad (3.5.8)$$

Скалярное произведение и норму введем по формулам

$$\left. \begin{aligned} (F_1, F_2) &= \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r} \alpha(\mathbf{r}) F_1(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) F_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \\ \|F\| &= \sqrt{(F, F)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.9)$$

Принимая во внимание введенные операторы  $L$  и  $S$  и предполагая, что  $\varphi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  удовлетворяет условию (3.5.5), уравнение (3.5.4) запишем в следующей форме:

$$L\varphi = \lambda S\varphi + F. \quad (3.5.10)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$L\varphi = \lambda S\varphi. \quad (3.5.11)$$

Теперь задача ставится следующим образом: найти функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую уравнению (3.5.10) почти всюду в  $G \times \boldsymbol{\Omega}$  и граничному условию (3.5.5). Для однородного уравнения (3.5.11) задача состоит в нахождении значений  $\lambda$  (собственных значений), при которых это уравнение имеет ненулевое решение (собственные функции). Подробности по поводу постановки задачи можно найти в работах В.С. Владимирова [70, 71–75, 77, 80].

Обозначим через  $U$  оператор, соотносящий функции  $F(\mathbf{r}, \Omega)$  и функцию  $F(\mathbf{r}, -\Omega)$ . Тогда оператор  $L^*$ , сопряженный с  $L$ , можно записать в виде

$$L^* = ULU.$$

Оператор  $L^{-1}S$  вполне непрерывный и симметризуется слева (см. [71]) неотрицательным оператором  $S$ :

$$(SL^{-1}S)^* = SL^{-1}S.$$

Обозначим  $\lambda_k$  собственные значения и  $\varphi_k$  соответствующие собственные функции однородного уравнения (3.5.11), так что

$$L\varphi_k = \lambda_k S\varphi_k.$$

В работе [71] показано, что существует бесконечное счетное число собственных значений; множество собственных значений  $\{\lambda_k\}$  не имеет точек сгущения на конечном расстоянии; все они расположены на интеграле

$$\left[ \frac{1}{h(1 - e^{-\alpha})}, +\infty \right].$$

Наименьшее собственное значение  $\lambda_1$  простое, а соответствующая ему собственная функция  $\varphi_1(\mathbf{r}, \Omega)$  положительна. Каждому  $\lambda$  соответствует конечное число линейно-независимых собственных функций. Собственные функции ограничены и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$(\varphi_i, S\varphi_k) = \delta_{ik}.$$

Система функций  $S\varphi_k$  полна в области значений оператора  $S$ , то есть при любом  $F$  (таком, что  $\|F\| < \infty$ ) имеет место разложение

$$SF = \sum_{k=1}^{\infty} (F, S\varphi_k) S\varphi_k.$$

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ , то оператор  $(L - \lambda S)^{-1}$  существует и ограничен, то есть при любом  $F$  уравнение (3.5.10) имеет единственное решение  $\varphi$ :

$$\varphi = (L - \lambda S)^{-1}F \equiv \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(UF, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k + L^{-1}F.$$

В дальнейшем будем предполагать, что правая часть уравнения (3.5.10) удовлетворяет условию

$$UF = F,$$

то есть

$$F(\mathbf{r}, -\Omega) = F(\mathbf{r}, \Omega).$$

Тогда нетрудно видеть [50, 51], что решения уравнения (3.5.10) и сопряженного с ним уравнения

$$ULU\varphi^* = \lambda S\varphi^* + F$$

связаны соотношением  $\varphi^* = U\varphi$ .

Рассмотрим теперь новую самосопряженную задачу:

$$-\left[\frac{1}{\alpha(\mathbf{r})}\Omega\nabla\right]^2 u + u = \frac{\lambda}{4\pi} h(\mathbf{r}) \int d\Omega' u(\mathbf{r}, \Omega') + F(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3.5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} u - \frac{1}{\alpha(\mathbf{r})}\Omega\nabla u &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega\mathbf{n} < 0; \\ u + \frac{1}{\alpha(\mathbf{r})}\Omega\nabla u &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega\mathbf{n} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.12')$$

Обозначим  $L_0$  линейный дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (3.5.12)

$$L_0 u \equiv -\left[\frac{1}{\alpha(\mathbf{r})}\Omega\nabla\right]^2 u + u = -\left[\frac{1}{\alpha(\mathbf{r}_0 + \xi\Omega)} \frac{\partial}{\partial \xi}\right]^2 u(\mathbf{r}_0 + \xi\Omega, \Omega) + u. \quad (3.5.13)$$

Уравнение (3.5.12) запишется в виде

$$L_0 u = \lambda S u + F. \quad (3.5.14)$$

Будем предполагать, что оператор  $L_0$  действует на функции  $u(\mathbf{r}, \Omega)$ , которые удовлетворяют граничным условиям (3.5.12'). Очевидно, что оператор  $L_0$  самосопряженный и положительно определенный, причем (см. [71])

$$(L_0 u, u) = \int d\Omega \int d\mathbf{r}_S |\Omega\mathbf{n}| u^2(\mathbf{r}, \Omega) + \left\| \frac{\Omega\nabla u}{\alpha} \right\|^2 + \|u\|^2. \quad (3.5.15)$$

Можно показать (см. [71]), что между решением  $u$  уравнения (3.5.13) и решением  $\varphi$  уравнения (3.5.10) имеет место следующая связь:

$$u = \frac{1}{2}(\varphi + U\varphi), \quad \frac{1}{\alpha}\Omega\nabla u = \frac{1}{2}(U\varphi - \varphi). \quad (3.5.16)$$

Отсюда следует, в частности, что собственные значения однородного уравнения

$$L_0 u = \lambda S u \quad (3.5.17)$$

равны  $\lambda_k$ , а соответствующие собственные функции  $u_k$  связаны с собственными функциями  $\varphi_k$  соотношениями (3.5.16).



В силу (3.5.16) для решения уравнения (3.5.10) достаточно решить самосопряженное уравнение (3.5.13). Для решения этого последнего уравнения можно использовать вариационные принципы, которые мы сейчас и приведем (см. [71, 72]).

Собственное значение  $\lambda_k$  равно наименьшему значению функционала

$$H(u) = \frac{(L_0 u, u)}{(u, Su)} \quad (3.5.18)$$

при условии, что

$$(u, Su) > 0, (u_i, Su) = 0, i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Это наименьшее значение достигается на собственной функции

$$u_k = \frac{1}{2} (\varphi_k + U\varphi_k).$$

Решение  $u$  уравнения (3.5.13) при  $\lambda < \lambda_1$  сообщает функционалу

$$P(u) = (L_0 u, u) - \lambda(u, Su) - 2(u, F) \quad (3.5.19)$$

наименьшее значение; обратно, при  $\lambda \neq \lambda_k$  функция  $u$ , реализующая минимум функционала  $P(u)$ , — единственная и является решением уравнения (3.5.14) [71].

В работах В. С. Владимирова [71, 72] доказано, что функция сравнения в (3.5.18) и (3.5.19) не обязана удовлетворять граничным условиям (3.5.12'), которые, таким образом, оказываются естественными (см. [71], см. § 17).

Рассмотрим теперь различные частные случаи.

**Плоскопараллельная задача.** Пусть область  $G$  есть плоский слой толщиной  $H$ , а  $F$  — функция только координаты  $z$ .

Искомая функция  $\varphi$  зависит от  $z$  и  $\mu$ , а  $F(z, -\mu) = F(z, \mu)$ . Тогда задача примет вид

$$\frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi = \frac{\lambda}{2} h(z) \int_{-1}^1 d\mu \varphi(z, \mu) + F(z, \mu) \quad (3.5.20)$$

при условии, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi\left(\frac{H}{2}, \mu\right) &= 0; & -1 \leq \mu < 0; \\ \varphi\left(-\frac{H}{2}, \mu\right) &= 0; & 0 < \mu \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.21)$$

Соответствующее уравнение для функции  $u(z, \mu)$  принимает вид<sup>2)</sup>

$$-\left[\frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial}{\partial z}\right]^2 u + u = \frac{\lambda}{2} h(z) \int_{-1}^1 d\mu u(z, \mu) + F(z, \mu), \quad (3.5.22)$$

$$\left(-\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}, \quad 0 \leq \mu \leq 1\right).$$

Граничными условиями для функции  $u(z, \mu)$  будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{H}{2}; \\ u - \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \quad \text{при} \quad z = -\frac{H}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.23)$$

В соответствии с изложенным найдем скалярные произведения:

$$\left. \begin{aligned} (L_0 u, u) &= \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \left[ \alpha(z) u^2(z, \mu) + \frac{\mu^2}{\alpha(z)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \int_0^1 d\mu \mu \left[ u^2\left(\frac{H}{2}, \mu\right) + u^2\left(-\frac{H}{2}, \mu\right) \right]; \\ (Su, u) &= \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \alpha(z) h(z) u(z, \mu) u(z, \mu'); \\ (u, F) &= \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \alpha(z) u(z, \mu) F(z, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.24)$$

Связь функций  $u$  и  $\varphi$  осуществляется с помощью равенств

$$u(z, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi(z, \mu) + \varphi(z, -\mu)],$$

$$\frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} [\varphi(z, -\mu) - \varphi(z, \mu)].$$

<sup>2)</sup>Уравнение (3.5.22) впервые было получено Е. С. Кузнецовым [179].

В этом случае функционал  $H(u)$  принимает вид

$$H(u) = \frac{\left( \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \left[ \alpha(z) u^2(z, \mu) + \frac{\mu^2}{\alpha(z)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \int_0^1 \mu d\mu \left[ u^2\left(\frac{H}{2}, \mu\right) + u^2\left(-\frac{H}{2}, \mu\right) \right] \right)}{\int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \alpha(z) h(z) u(z, \mu) u(z, \mu')}, \quad (3.5.25)$$

а функционал  $P(u)$

$$\begin{aligned} P(u) = & \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \left[ \alpha(z) u^2(z, \mu) + \frac{\mu^2}{\alpha(z)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \int_0^1 \mu d\mu \left[ u^2\left(\frac{H}{2}, \mu\right) + u^2\left(-\frac{H}{2}, \mu\right) \right] - \\ & - \lambda \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \alpha(z) h(z) u(z, \mu) u(z, \mu') - \\ & - 2 \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^1 d\mu \alpha(z) u(z, \mu) F(z, \mu). \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

**Сферически-симметричная задача.** Пусть область  $G$  есть шар радиусом  $R$  и пусть функции  $\alpha$ ,  $h$  и  $F$  зависят только от  $r$ . Тогда приходим к задаче

$$\frac{1}{\alpha(r)} \Omega \nabla \varphi + \varphi = \frac{\lambda}{2} h(r) \int_{-1}^1 d\mu \varphi(r, \mu) + F(r, \mu), \quad (3.5.27)$$

$$\varphi(R, \mu) = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 0, \quad (3.5.28)$$

где

$$\Omega \nabla \varphi = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu},$$

при условии, что

$$F(r, \mu) = F(r, -\mu).$$

Задача (3.5.27), (3.5.28) эквивалентна следующей самосопряженной задаче:

$$-\left[\frac{1}{\alpha(r)}, \Omega \nabla\right]^2 u + u = \lambda h(r) \int_0^1 d\mu u(r, \mu) + F(r, \mu) \quad (3.5.29)$$

$$(0 \leq r \leq R, 0 \leq \mu \leq 1),$$

$$u + \frac{1}{\alpha(r)} \Omega \nabla = 0 \text{ при } r = R, 0 < \mu \leq 1. \quad (3.5.30)$$

Функции  $u$  и  $\varphi$  связаны соотношениями

$$u(r, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi(r, \mu) + \varphi(r, -\mu)],$$

$$\frac{1}{\alpha(r)} \Omega \nabla \varphi = \frac{1}{2} [\varphi(r, -\mu) - \varphi(r, \mu)].$$

Скалярные произведения  $(L_0 u, u)$ ,  $(Su, u)$  и  $(u, F)$  равны:

$$\left. \begin{aligned} (L_0 u, u) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \left[ \alpha(r) u^2(r, \mu) + \frac{1}{\alpha(r)} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right)^2 \right] + R^2 \int_0^1 \mu d\mu u^2(R, \mu); \\ (Su, u) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \mu(r) h(r) u(r, \mu) u(r, \mu'); \\ (u, F) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \alpha(r) u(r, \mu) F(r, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.31)$$

**Задача с цилиндрической симметрией.** Пусть область  $G$  есть цилиндр высотой  $2a$  и радиусом основания  $R$  и пусть функции  $\alpha$ ,  $h$  и  $F$  зависят от  $r$  и  $z$ . Искомая функция  $\varphi$  будет зависеть от  $r, z, \mu$  и  $\psi$ :

$$0 \leq r \leq R, \quad -a \leq z \leq a, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Тогда приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla \varphi + \varphi = \frac{\lambda}{4\pi} h(r, z) \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi' \varphi(r, z, \mu', \psi) + F(r, z, \mu, \psi), \quad (3.5.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(R, z, \mu, \psi) &= 0, & \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}; \\ \varphi(r, a, \mu, \psi) &= 0, & -1 \leq \mu < 0; \\ \varphi(r, -a, \mu, \psi) &= 0, & 0 \leq \mu \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.33)$$

где

$$\Omega \nabla \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.5.34)$$

Задача (3.5.32), (3.5.33) эквивалентна следующей самосопряженной задаче:

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{1}{\alpha(r, z)}, \Omega \nabla \right]^2 u + u &= \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} h(r, z) \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi u(r, z, \mu', \psi) d\mu' d\psi + F(r, z, \mu, \varphi), \\ 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla u &= 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}; \\ u - \frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla u &= 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}; \\ u + \frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla u &= 0 \quad \text{при} \quad z = a; \\ u - \frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla u &= 0 \quad \text{при} \quad z = -a. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.36)$$

Функции  $u$  и  $\varphi$  связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} [\varphi(r, z, \mu, \psi) + \varphi(r, z, -\mu, \psi + \pi)]; \\ \frac{1}{\alpha(r, z)} \Omega \nabla u &= \frac{1}{2} [\varphi(r, z, -\mu, \psi + \pi) - \varphi(r, z, \mu, \psi)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.37)$$

Выпишем для этого случая функционалы  $(L_0 u, u)$ ,  $(Su, u)$  и  $(u, F)$ :

$$\left. \begin{aligned}
 (L_0 u, u) &= \int_0^R r dr \int_{-a}^a dz \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \alpha(r, z) u^2(r, z, \mu, \psi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha(r, z)} \left[ \cos \psi \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right\} + R \int_{-a}^a r dr \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi |\cos \psi| \sqrt{1 - \mu^2} u^2(R, z, \mu, \psi) + \\
 &\quad + \int_0^R r dr \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \mu [u^2(r, a, \mu, \psi) + u^2(r, -a, \mu, \psi)]; \\
 (Su, u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R r dr \int_{-a}^a dz \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi' \alpha(r, z) h(r, z) \times \\
 &\quad \times u(r, z, \mu, \psi) u(r, z, \mu', \psi'); \\
 (u, F) &= \int_0^R r dr \int_{-a}^a dz \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \alpha(r, z) u(r, z, \mu, \psi) F(r, z, \mu, \psi).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.38)$$

Задачу для бесконечного цилиндра можно получить из предыдущей, если исключить из рассмотрения координату  $z$  и осуществить соответственно операции интегрирования и дифференцирования по этой координате.

В заключение необходимо отметить, что вариационный метод, разработанный В. С. Владимировым, может быть применен также к задачам с несферической индикатрисой рассеяния в предположении ее четности [71, 72], то есть

$$g(\mu_0) = g(-\mu_0), \quad (3.5.39)$$

где  $\mu_0 = \Omega \Omega'$ .

## 3.6. Метод Бубнова - Галеркина

Опираясь на общую теорию (см. [71, 280]), В. С. Владимиров доказал сходимость метода Бубнова - Галеркина для уравнения (3.5.13), эквивалентного задаче (3.5.10), (3.5.2). Заметим, что

при  $\lambda < \lambda_1$  метод Бубнова – Галеркина превращается в метод Ритца, так как при этих  $\lambda$  оператор  $L_0 - \lambda S$  положительно определенный и самосопряженный.

Рассмотрим уравнение (3.5.13), которое запишем в следующем виде:

$$L_0 u - \lambda S u - F = 0. \quad (3.6.1)$$

В соответствии с методом Бубнова – Галеркина выберем последовательность линейно-независимых функций  $\{v_i\}$ , полную в  $\mathfrak{h}_0$ , и будем искать решение уравнения (3.6.1) приближенно в виде

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} v_i. \quad (3.6.2)$$

Числа  $c_i^{(n)}$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$(L_0 u^{(n)} - \lambda S u^{(n)} - F, v_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.6.3)$$

где скалярное произведение определено первой формулой из (3.5.9).

В соответствии с формулой (3.5.15) выражение  $(L_0 u, v)$  вычисляется следующим образом:

$$(L_0 u, v) = \int d\Omega \int_S dr_S |\Omega \mathbf{n}| uv + \int d\Omega \int dr \alpha(\mathbf{r}) \left[ \frac{\Omega \nabla u}{\alpha(\mathbf{r})} \cdot \frac{\Omega \nabla v}{\alpha(\mathbf{r})} + uv \right].$$

Для задачи на собственные числа система (3.6.3) превращается в однородную:

$$(L_0 u^{(n)} - \lambda S u^{(n)}, v_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6.4)$$

Корни определителя системы (3.6.4)  $\lambda_k^{(n)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) определяют приближения к собственным значениям  $\lambda_k$ . Соответствующие этим корням собственные функции определяются формулой (3.6.2).

Важно отметить, что координатные функции  $v_i$  могут не удовлетворять граничным условиям (3.5.12). Последнее обстоятельство существенно упрощает применение метода для приближенного решения уравнения (3.6.1), так как в качестве  $v_i$  можно выбрать такие функции, которые позволяют без больших усилий построить систему (3.6.3). Однако если функции

не удовлетворяют граничным условиям, то, вообще говоря, сходимость метода будет медленнее, что, впрочем, может быть скомпенсировано увеличением  $n$ .

Изложенный в настоящем параграфе метод решения кинетических уравнений проиллюстрируем примером [77].

В качестве примера рассмотрим задачу на собственные значения  $\lambda$  для шара радиусом  $R = 1$ . Пусть требуется найти наименьшее положительное число  $\alpha$  (назовем его  $\alpha_{\text{кр}}$ ), при котором однородная задача

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \alpha \varphi &= \frac{\alpha h}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\mathbf{r}, \mu') d\mu', \\ \varphi(1, \mu) &= 0, \quad \mu < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5)$$

имеет ненулевое решение.

Задача (3.6.5) эквивалентна следующей: найти наименьшее положительное значение  $\alpha$ , при котором задача

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + u &= \\ = h \int_0^1 u(\mathbf{r}, \mu') d\mu', u + \frac{1}{\alpha} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) &= 0 \quad (\text{при } r = 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.6)$$

имеет ненулевое решение.

Решим приближенно задачу (3.6.6) методом Ритца. В качестве координатных функций возьмем функции  $r^i \mu^i$ . Функция  $\varphi(\mathbf{r}, \mu)$  допускает непрерывно-дифференцируемое продолжение:  $\omega(\mathbf{r}, \mu) = \varphi(-\mathbf{r}, -\mu)$ ; кроме того  $\varphi(0, \mu)$  не зависит от  $\mu$ . Следовательно, в качестве координатных функций можно взять

$$v_1 = 1, \quad v_2 = r^2, \quad v_3 = r^2 \mu, \quad v_4 = r^4, \quad v_5 = r^4 \mu^2, \dots$$

Соответствующая система (3.6.4) при  $n = 5$  имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha \varrho}{3} \right) + c_2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha \varrho}{5} \right) + c_3 \left( \frac{1}{4} - \frac{\alpha \varrho}{15} \right) + \\ + c_4 \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha \varrho}{7} \right) + c_5 \left( \frac{1}{4} - \frac{\alpha \varrho}{21} \right) = 0, \end{aligned}$$



$$c_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{5}\right) + c_2\left(\frac{4}{15\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{7}\right) + c_3\left(\frac{4}{15\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{21}\right) + \\ + c_4\left(\frac{8}{21\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{9}\right) + c_5\left(\frac{32}{15\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{27}\right) = 0,$$

$$c_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{15}\right) + c_2\left(\frac{4}{15\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{21}\right) + c_3\left(\frac{4}{15\alpha} + \frac{1}{6} + \frac{4\alpha}{315} - \frac{\alpha\rho}{63}\right) + \\ + c_4\left(\frac{8}{21\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{27}\right) + c_5\left(\frac{32}{105\alpha} + \frac{1}{6} + \frac{4\alpha}{405} - \frac{\alpha\rho}{81}\right) = 0,$$

$$c_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{7}\right) + c_2\left(\frac{8}{21\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{9}\right) + c_3\left(\frac{8}{21\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{27}\right) + \\ + c_4\left(\frac{16}{27\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha\rho}{11}\right) + c_5\left(\frac{64}{135\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{33}\right) = 0,$$

$$c_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{21}\right) + c_2\left(\frac{32}{105\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{27}\right) + c_3\left(\frac{32}{105\alpha} + \frac{1}{6} + \frac{4\alpha}{405} - \frac{\alpha\rho}{81}\right) + \\ + c_4\left(\frac{64}{135\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha\rho}{33}\right) + c_5\left(\frac{368}{945\alpha} + \frac{1}{6} + \frac{4\alpha}{495} - \frac{\alpha\rho}{99}\right) = 0,$$

где  $\rho = h - 1$ .

Наименьший положительный корень определителя этой системы даст искомое значение  $\alpha_{\text{кр}}$ . Соответствующее этому значению  $\alpha_{\text{кр}}$  решение однородной системы  $(c_1^{(5)}), (c_2^{(5)}), \dots, (c_5^{(5)})$  приближенно определит собственную функцию  $u_0(\mathbf{r}, \mu)$  по формуле

$$u_0(\mathbf{r}, \mu) = \sum_{k=1}^5 c_k^{(5)} v_k(\mathbf{r}, \mu).$$

Тогда собственная функция  $\varphi(\mathbf{r}, \mu)$  определится формулой

$$\varphi(\mathbf{r}, \mu) = u(\mathbf{r}, \mu) - \frac{1}{\alpha} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right).$$

# 4

## Методы решения интегральных уравнений Пайерлса

### 4.1. Метод Крылова - Боголюбова

В настоящей главе рассмотрены приближенные методы решения интегральных уравнений Пайерлса. Учитываются процессы рассеяния и поглощения нейтронов. Угловое распределение рассеянных нейтронов и нейтронов деления предполагается изотропным. Задача решается в предположении непрерывного распределения источников.

Решение задачи производится методом Крылова - Боголюбова, сущность которого состоит в использовании специальных квадратурных формул для сведения интегрального уравнения к системе алгебраических.

Для решения задач на прохождение излучения через вещество впервые этот метод был применен Е. С. Кузнецовым и Б. В. Овчинским [186], а также Е. С. Кузнецовым и А. И. Васкиным.

Изложенные в настоящей главе результаты преимущественно получены автором совместно с Ш. С. Николайшвили при сотрудничестве с В. В. Вахромеевой и А. И. Васкиным.

Рассмотрим интегральное уравнение следующего вида:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' + f(x), \quad (4.1.1)$$

где  $K(x, x')$  — ядро интегрального уравнения, положительное и непрерывное всюду в замкнутом квадрате  $K_0$ , за исключением точек, лежащих на диагонали  $x = x'$ , в которых ядро может иметь интегрируемую особенность;  $\lambda$  — заданный параметр;  $f(x)$  — непрерывная функция переменной  $x$ .

Интервал интегрирования  $(a, b)$  разобьем на равные части. Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — точки деления, причем  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . Перепишем уравнение (4.1.1) в виде

$$\varphi(x_{k+1/2}) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_{k+1/2}, x') \varphi(x') dx' + f(x_{k+1/2}), \quad (4.1.2)$$

где  $x_{k+1/2}$  — значения  $x$ , соответствующие середине интервалов  $(x_k, x_{k+1})$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), то есть

$$x_{k+1/2} = \frac{1}{2} (x_k + x_{k+1}).$$

В силу положительности ядра  $K(x_{k+1/2}, x')$  и непрерывности решения уравнения (4.1.1) каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы в уравнении (4.1.2), можно представить в виде

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_{k+1/2}, x') \varphi(x') dx' = A_{kj} \varphi(\bar{x}_j), \quad (4.1.3)$$

где  $\bar{x}_j$  есть некоторое значение  $x$ , лежащее внутри интервала  $(x_j, x_{j+1})$ , а  $A_{kj}$  определяется интегралом

$$A_{kj} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_{k+1/2}, x') dx'. \quad (4.1.4)$$

Подставив (4.1.3) в уравнение (4.1.2), получим

$$\varphi(x_{k+1/2}) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} A_{kj} \varphi(\bar{x}_j) + f(x_{k+1/2}). \quad (4.1.5)$$

Под знаком суммы в равенстве (4.1.5) значения искомой функции  $\varphi(x)$  в точках  $x = \bar{x}_j$  приближенно заменим значениями функции при  $x = x_{j+1/2}$ . Тогда придем к следующей системе уравнений:

$$\varphi_{k+1/2} = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} A_{kj} \varphi_{j+1/2} + f_{k+1/2}, \quad (4.1.6)$$

где  $\varphi_{k+1/2}$  и  $f_{k+1/2}$  — значения соответствующих функций в точках  $x = x_{k+1/2}$ .

Если ввести в рассмотрение векторы  $\varphi$  и  $f$ , компонентами которых соответственно являются величины  $\varphi_{k+1/2}$  и  $f_{k+1/2}$ , то систему алгебраических уравнений (4.1.6) можно записать в виде

$$\varphi = \lambda A \varphi + f. \quad (4.1.7)$$

Задача состоит теперь в решении уравнения (4.1.7). Формальное решение задачи дается в виде

$$\varphi = (E - \lambda A)^{-1} f, \quad (4.1.8)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Если норма оператора  $\lambda A$  меньше единицы, то есть  $\lambda \|A\| < 1$ , то для решения уравнения (4.1.7) можно использовать метод последовательных приближений в следующем виде:

$$\varphi^{(n)} = \lambda A \varphi^{(n-1)} + f. \quad (4.1.9)$$

Метод Крылова – Боголюбова — весьма точный и простой в практическом применении к широкому классу задач, связанных с переносом излучения.

Если  $f$  положить равным нулю, то придем к задаче на собственные числа

$$\varphi^{(n)} = \lambda A \varphi^{(n-1)}. \quad (4.1.10)$$

## 4.2. Распределение нейтронов внутри плоского слоя

Рассмотрим плоский слой вещества толщиной  $H$ , внутри которого заданы источники излучения  $S_0(z)$ .

Пусть  $f_0^+$  и  $f_0^-$  — падающие потоки нейтронов соответственно при  $z = 0$  и  $z = H$ . Если рассеяние нейтронов изотропно, то интегральное уравнение Пайерлса имеет вид (см. § 1.4)

$$\varphi(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^H \varphi(z') E_1(\Sigma|z - z'|) dz' + F(z), \quad (4.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2} \int_0^H S(z') E_1(\Sigma|z - z'|) dz' + f(z); \\ f(z) &= \frac{\Sigma}{2} [f^+ z E_2(\Sigma z) + f^-(H - z) E_2(\Sigma[H - z])]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

В соответствии с идеей метода Крылова – Боголюбова, уравнение (4.2.2) заменим системой алгебраических уравнений следующего вида:

$$\varphi_{k+1/2} = \frac{\Sigma_s}{2} \sum_{j=0}^{n-1} A_{kj} \varphi_{j+1/2} + F_{k+1/2}, \quad (4.2.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{k+1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} A_{kj} S_{j+1/2} + f_{k+1/2}; \\ A_{kj} &= \int_{z_j}^{z_{j+1}} E_1(\Sigma |z_{k-1/2} - z'|) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

Найдем матрицу  $A$ . Полагая  $k \geq j + 1$ , получим

$$A_{kj} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} E_1(\Sigma |z_{k+1/2} - z'|) dz',$$

или, выполнив интегрирование,

$$A_{kj} = \frac{1}{\Sigma} [E_2([k - j - 1/2]\Sigma h) - E_2([k - j + 1/2]\Sigma h)], \quad (4.2.5)$$

где  $h = \frac{H}{n}$ .

Для  $k = j$  имеем

$$A_{kk} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} E_1(\Sigma |z_{k+1/2} - z'|) dz',$$

откуда

$$A_{kk} = \frac{2}{\Sigma} \left[ 1 - E_2\left(\frac{1}{2} \Sigma h\right) \right]. \quad (4.2.6)$$

Для  $k < j$  значения  $A_{kj}$  могут быть найдены из условия симметрии

$$A_{kj} = A_{jk}. \quad (4.2.7)$$

Заметим, что фактическое нахождение матрицы  $A$  сводится к вычислению ее элементов, стоящих в первом столбце. В этом легко убедиться из непосредственного рассмотрения формул (4.2.5)–(4.2.7). В результате задача сводится к решению следующего уравнения:

$$\varphi = \frac{\Sigma_s}{2} A \varphi + F,$$

где

$$F = \frac{1}{2} AS + f.$$

Здесь  $A$  — матрица с компонентами  $A_{kj}$ ,  $\varphi$ ,  $S$  и  $f$  — вектора с компонентами  $\varphi_{k+1/2}$ ,  $S_{k+1/2}$ ,  $f_{k+1/2}$ . Нетрудно показать, что

$$\frac{\Sigma_s}{2} \|A\| < \frac{\Sigma_s}{\Sigma} < 1.$$

Следовательно, для решения уравнения (4.2.5) можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Если  $F = \nu_f \Sigma_f E \varphi$ , где  $E$  — единичная матрица, то мы приходим к задаче на собственные числа

$$\varphi = \frac{\Sigma_s}{2} A \varphi + \lambda \nu_f \Sigma_f E \varphi,$$

решение которой проводится методом последовательных приближений:

$$\varphi^{(n)} = \frac{\Sigma_s}{2} A \varphi^{(n)} + \lambda \nu_f \Sigma_f E \varphi^{(n-1)}.$$

Аналогичным образом может быть решена задача о пространственном распределении нейтронов в однородном шаре и однородном цилиндре. Следует отметить, что в случае неоднородных сред применение метода Крылова – Боголюбова оказывается уже затрудненным ввиду громоздкости вычислений.

### 4.3. Метод вырожденных ядер

Рассмотрим уравнение Пайерлса для плоского слоя конечной толщины. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что ядро соответствующего интегрального уравнения содержит основные особенности ядер большого класса интегральных уравнений Пайерлса, и поэтому результаты носят общий характер. Применение метода вырожденных ядер к решению уравнения Пайерлса было дано автором совместно с Ш. С. Николайшвили, В. В. Вахромеевой и А. И. Васкиным.

Как известно [337], метод вырожденных ядер состоит в следующем. Ядро интегрального уравнения заменяем его разложением в ряд Фурье по некоторой ортогональной системе функций. Если в этом разложении ограничимся конечным отрезком ряда, содержащим несколько первых членов разложения, то получим интегральное уравнение с вырожденным ядром, решение которого сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Сначала рассмотрим задачу на собственные числа интегрального уравнения Пайерлса.

Пусть дано уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a E_1(|x - \xi|) \varphi(\xi) d\xi \quad (a > 0), \quad (4.3.1)$$

записанное в безразмерных переменных, отнесенных к длине свободного пробега нейтрона. Требуется найти приближенные собственные значения и соответствующие собственные функции уравнения (4.3.1).

Заменой переменных

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(z + 1), \\ \varphi\left(\frac{a}{2}[z + 1]\right) &= y(z), \\ \kappa &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

уравнение (4.3.1) представим в виде

$$\kappa y(z) = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) y(\xi) d\xi. \quad (4.3.3)$$

Функцию  $\frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right)$  представим в виде ряда

$$\frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu + 1}{2} K_{\nu} P_{\nu}(\xi), \quad (4.3.4)$$

где  $P_{\nu}(\xi)$  — полиномы Лежандра, а  $K_{\nu}(z)$  определяются интегралом

$$K_{\nu}(z) = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) P_{\nu}(\xi) d\xi. \quad (4.3.5)$$

Из соотношения (4.3.5) в силу симметрии ядра имеем

$$K_{\nu}(z) = (-1)^{\nu} K_{\nu}(-z).$$

Если в разложении (4.3.4) ограничиться конечным отрезком ряда, содержащим  $(n + 1)$  первых членов, то уравнение (4.3.3) можно приближенно представить в виде

$$\kappa y(z) = \int_{-1}^1 \sum_{\nu=0}^n \frac{2\nu + 1}{2} K_{\nu}(z) P_{\nu}(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (4.3.6)$$

Уравнение (4.3.6) будем называть  $n$ -м приближением уравнения (4.3.3).

Решение уравнения (4.3.6) имеет вид

$$\kappa y(z) = \sum_{\nu'=0}^n \frac{2\nu'+1}{2} c_{\nu'} K_{\nu'}(z), \quad (4.3.7)$$

где

$$c_{\nu} = \int_{-1}^1 y(\xi) P_{\nu}(\xi) d\xi.$$

Коэффициенты  $c_{\nu}$  определяются из однородной системы

$$\kappa c_{\nu} = \sum_{\nu'=0}^n \frac{2\nu'+1}{2} g_{\nu\nu'} c_{\nu'} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (4.3.8)$$

где

$$g_{\nu\nu'} = \int_{-1}^1 K_{\nu}(z) P_{\nu'}(z) dz. \quad (4.3.9)$$

Система уравнений (4.3.8) допускает ненулевое решение только при таких значениях  $\kappa = 1/\lambda$ , которые удовлетворяют уравнению

$$D_n(\kappa) = 0, \quad (4.3.10)$$

где  $D_n(\kappa)$  — характеристический определитель системы (4.3.8). Следовательно, обратные величины корней уравнения (4.3.10) и будут приближенными собственными значениями уравнения (4.3.3). Из соотношения (4.3.9) следует, что  $g_{\nu\nu'} = 0$ , если  $\nu$  и  $\nu'$  различной четности и  $g_{\nu\nu'} = g_{\nu'\nu}$ . Поэтому определитель  $D_n(\kappa)$  будет иметь вид (предполагаем для определенности  $n$  четным)

$$D_n(\kappa) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} g_{00} - \kappa & 0 & \frac{5}{2} g_{02} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{0n} \\ 0 & \frac{3}{2} g_{11} - \kappa & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} g_{20} - \kappa & 0 & \frac{5}{2} g_{22} - \kappa & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} g_{n0} & 0 & \frac{5}{2} g_{n2} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{nn} - \kappa \end{vmatrix}.$$

Определитель  $D_n(\kappa)$  можно представить в виде произведения двух определителей

$$D_n(\kappa) = D_{\frac{n}{2}+1}(\kappa) D_{\frac{n}{2}}(\kappa), \quad (4.3.11)$$



где

$$D_{\frac{n}{2}+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} g_{00} - \kappa & \frac{5}{2} g_{02} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{0n} \\ \frac{1}{2} g_{20} & \frac{5}{2} g_{22} - \kappa & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} g_{n0} & \frac{5}{2} g_{n2} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{nn} - \kappa \end{vmatrix},$$

$$D_{\frac{n}{2}} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} g_{11} - \kappa & \frac{7}{2} g_{13} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{1,n-1} \\ \frac{3}{2} g_{31} & \frac{7}{2} g_{33} - \kappa & \dots & \frac{2n-1}{2} g_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{3}{2} g_{n-1,1} & \frac{7}{2} g_{n-1,3} & \dots & \frac{2n+1}{2} g_{n-1,n-1} - \kappa \end{vmatrix}.$$

Таким образом, нахождение корней уравнения (4.3.10) сводится к решению двух уравнений  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ - и  $\frac{n}{2}$ -й степеней:

$$D_{\frac{n}{2}+1}(\kappa) = 0,$$

$$D_{\frac{n}{2}}(\kappa) = 0.$$

В соответствии с этим система (4.3.8) распадается на две системы из  $\frac{n}{2} + 1$  и  $\frac{n}{2}$  уравнений каждая, поскольку  $c_\nu$  представляется линейной комбинацией только таких  $c_{\nu'}$ , у которых четность индекса  $\nu'$  совпадает с четностью  $\nu$ .

Пусть теперь  $\kappa = \kappa_k^{(n)}$ , где  $\kappa_k^{(n)}$  – корень уравнения  $D_{n/2}(\kappa) = 0$ .

Верхний индекс указывает номер приближения, а нижний – номер собственного числа. Тогда соответствующая собственная функция уравнения (4.3.6) будет равна

$$\kappa_k^{(n)} y_k^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{n/2} \frac{2(2\nu+1)}{2} c_{2\nu,k}^{(n)} K_{2\nu}(z), \quad (4.3.12)$$

причем

$$c_{0k}^{(n)} : c_{2k}^{(n)} : \dots = A_{n0} : A_{n2} : \dots,$$

где  $A_{nk}$  является алгебраическим дополнением элемента определителя  $D_n(\kappa)$  с индексами  $n, k$ .

Придавая индексу  $k$  последовательно значения  $0, 2, 4, \dots$ , получим полную систему собственных функций уравнения (4.3.6),

соответствующую системе собственных значений, удовлетворяющих уравнению  $D_{n/2}(\kappa) = 0$ . Совокупность этих функций дает решение задачи в  $n$ -м приближении.

Обратимся теперь к интегралу (4.3.5), определяющему функции  $K_\nu(z)$ . Будем иметь

$$K_\nu(z) = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) P_\nu(\xi) d\xi = \frac{a}{2} \int_z^1 E_1\left(\frac{a}{2}|\xi - z|\right) P_\nu(\xi) d\xi + \\ + (-1)^\nu \frac{a}{2} \int_{-z}^1 E_1\left(\frac{a}{2}[z + \xi]\right) P_\nu(\xi) d\xi. \quad (4.3.13)$$

Здесь использовано соотношение

$$P_\nu(\xi) = (-1)^\nu P_\nu(-\xi).$$

Последовательным интегрированием по частям получим

$$\frac{a}{2} \int E_1\left(\frac{a}{2}[\xi - z]\right) P_\nu(\xi) d\xi = \\ = - \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{a}{2}\right)^k \frac{d^k P_\nu(\xi)}{d\xi^k} E_{2+k}\left(\frac{a}{2}[\xi - z]\right). \quad (4.3.14)$$

Из соотношений (4.3.13) и (4.3.14) получим следующую формулу для функций  $K_\nu(z)$ :

$$K_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\nu} \left(\frac{2}{a}\right)^j \frac{1 + (-1)^j}{1 + j} \frac{d^j P_\nu(z)}{dz^j} - \\ - \sum_{j=0}^{\nu} \left(\frac{2}{a}\right)^j P_\nu^j \left[ E_{2+j}\left(\frac{a}{2}[1 - z]\right) + (-1)^\nu E_{2+\nu}\left(\frac{a}{2}[1 + z]\right) \right], \quad (4.3.15)$$

где

$$P_\nu^j = \left. \frac{d^j P_\nu(z)}{dz^j} \right|_{z=1}.$$

Несколько первых функций имеют вид

$$K_0(z) = 2 - E_2(z_1) - E_2(z_2);$$

$$K_2(z) = 2 \left[ P_2(z) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{a}\right)^2 P_2''(z) \right] - [E_2(z_1) - E_2(z_2)] - \\ - 3 \left(\frac{2}{a}\right) [E_3(z_1) + E_3(z_2)] - 3 \left(\frac{2}{a}\right)^2 [E_4(z_1) + E_4(z_2)];$$

$$K_1(z) = 2P_1(z) - [E_2(z_1) - E_2(z_2)] - \left(\frac{2}{a}\right)[E_3(z_1) - E_3(z_2)];$$

$$K_3(z) = 2 \left[ P_3(z) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{a}\right)^2 P_3''(z) \right] - [E_2(z_1) - E_2(z_2)] - \\ - 6 \left(\frac{2}{a}\right)[E_3(z_1) - E_3(z_2)] - 15 \left(\frac{2}{a}\right)^2 [E_4(z_1) - E_4(z_2)].$$

Здесь использованы обозначения:

$$z_1 = \frac{a}{2}(1 - z), \quad z_2 = \frac{a}{2}(1 + z).$$

Рассмотрим интеграл (4.3.9), определяющий элементы  $D_n(\kappa)$ . Из предыдущего очевидно, что достаточно ограничиться случаем  $\nu \geq \nu'$ , причем  $\nu$  и  $\nu'$  одновременно либо четны, либо нечетны. Подставив (4.3.11) в выражение (4.3.9) и выполнив интегрирование, получим

$$g_{\nu\nu'} = \frac{4\delta_{\nu\nu'}}{2\nu + 1} - 2 \left(\frac{2}{a}\right) \sum_{k=0}^{\nu'} \left(\frac{2}{a}\right)^k P_{\nu'}^k(1) \sum_{j=0}^{\nu} \left(\frac{2}{a}\right)^j P_{\nu}^j(1) \times \\ \times \left[ \frac{(-1)^j}{2 + k + j} - (-1)^{\nu} E_{2+j+k}(a) \right], \quad (4.3.16)$$

где

$$\delta_{\nu\nu'} = \begin{cases} 1, & \nu = \nu' \\ 0, & \nu \neq \nu'. \end{cases}$$

Выражению (4.3.16) можно придать несколько иную форму, если воспользоваться рекуррентными соотношениями между функциями  $E_n(x)$ :

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} [e^{-x} - x E_{n-1}(x)], \quad n \neq 1.$$

В результате получим для четных индексов

$$g_{00} = 4 \left\{ 1 - \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} - E_3(a) \right] \right\}; \\ g_{02} = -\frac{4}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 - \frac{3}{a} \right) \right]; \\ g_{22} = 4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{a^2} + \frac{24}{a^4} - \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{9}{a} + \frac{24}{a^2} + \frac{24}{a^3} \right) \right] \right\}$$

и для нечетных

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 4 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right] \right\}; \\
 g_{13} &= -\frac{4}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{10}{3a} + \frac{9}{a^2} - \frac{40}{a^4} + \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{11}{a} + \frac{40}{a^2} + \frac{40}{a^3} \right) \right]; \\
 g_{33} &= 4 \left\{ \frac{1}{7} - \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{6}{a^2} + \frac{120}{a^4} - \frac{1800}{a^6} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{21}{a} + \frac{180}{a^2} + \frac{780}{a^3} + \frac{1800}{a^4} + \frac{1800}{a^5} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Если в последних формулах представим  $e^{-a}$  в виде ряда и затем объединим члены при одинаковых степенях  $a$ , то получим разложения элементов  $g_{\nu\nu'}$  в ряды по степеням  $a$ . Эти ряды можно использовать для вычисления  $g_{\nu\nu'}$  при малых значениях  $a$ .

Переходим теперь к решению неоднородного уравнения Пайерлса

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a E_1(|x - \xi|) \varphi(\xi) d\xi + f(x). \quad (4.3.17)$$

В переменной  $z$  уравнение (4.3.17) перепишется в следующем виде:

$$y(z) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) y(\xi) d\xi + F(z). \quad (4.3.18)$$

Решение уравнения (4.3.18) будем искать с помощью ряда по собственным функциям однородной задачи

$$y(z) = \sum_k \alpha_k y_k(z), \quad (4.3.19)$$

где  $\alpha_k$  — произвольные числа.

Функцию  $F(z)$  также представим в виде ряда по собственным функциям однородного уравнения, то есть

$$F(z) = \sum_k F_k y_k(z), \quad (4.3.20)$$

где

$$F_k = \frac{\int_{-1}^1 F(z) y_k(z) dz}{\int_{-1}^1 y_k^2(z) dz}. \quad (4.3.21)$$

Подставим ряды (4.3.19) и (4.3.20) в уравнение (4.3.18) и воспользуемся свойством собственных функций  $y_k(z)$ :

$$\kappa_k y_k(z) = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} E_1\left(\frac{a}{2}|z - \xi|\right) y_k(\xi) d\xi.$$

В результате получим

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} F_k, \quad (4.3.22)$$

и, следовательно, решение уравнения (4.3.18) будет иметь вид

$$y(z) = \sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} F_k y_k(z). \quad (4.3.23)$$

Подставив в ряд (4.3.23) несколько первых функций  $y_k(z)$ , полученных в результате приближенного решения однородного уравнения, получим приближенное решение неоднородного уравнения (4.3.18).

Однако наряду с этим общим методом решение неоднородного уравнения Пайерлса также можно получить с помощью метода вырожденных ядер. Разложив ядро уравнения в ряд по полиномам Лежандра и ограничиваясь конечным отрезком ряда, будем иметь

$$y(z) = \lambda \sum_{\nu=0}^n \frac{2\nu+1}{2} c_\nu K_\nu(z) + F(z), \quad (4.3.24)$$

где

$$c_\nu = \int_{-1}^1 y(\xi) P_\nu(\xi) d\xi. \quad (4.3.25)$$

Подставив в соотношение (4.3.25) выражение (4.3.24), получим

$$c_\nu = \lambda \sum_{\nu'=0}^n \frac{2\nu'+1}{2} c_{\nu'} g_{\nu\nu'} + f_\nu, \quad (4.3.26)$$

где

$$f_\nu = \int_{-1}^1 F(\xi) P_\nu(\xi) d\xi. \quad (4.3.27)$$

Если  $\lambda \neq \lambda_i$ , то система (4.3.26) может быть разрешена относительно коэффициентов  $c_\nu$ .

#### 4.4. Расчет критического размера однородного шара в случае линейной индикатрисы рассеяния с помощью метода вырожденных ядер

Рассмотрим задачу об определении критического размера однородного шара в случае анизотропного рассеяния. Индикатриса рассеяния предполагается линейной относительно косинуса угла рассеяния. Решение этой задачи методом вырожденных ядер было получено Ш. С. Николайшвили.

Критическое уравнение Больцмана в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' g(\Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\mathbf{r}, \Omega') + \frac{\nu_f \Sigma_f}{4\pi} \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') \quad (4.4.1)$$

с граничным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (4.4.2)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

Здесь  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  — ток нейтронов в точке  $\mathbf{r}$ .

Функции  $\varphi_0(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  связаны соотношением

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f - \Sigma) \varphi_0(\mathbf{r}), \quad (4.4.4)$$

которое получается из уравнения (4.4.1), если проинтегрировать его по всем направлениям  $\Omega$  и воспользоваться условием нормировки для функции  $g(\Omega' \rightarrow \Omega)$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega g(\Omega' \rightarrow \Omega) = 1$$

и очевидным соотношением

$$\Omega \nabla \varphi = \nabla(\Omega \varphi).$$

Если ввести в рассмотрение переменную  $\xi$  по формуле

$$\mathbf{r} - \xi \Omega = \mathbf{r}'$$

(см. рис. 3), то уравнение (4.4.1) можно представить в виде, аналогичном уравнению (1.4.4), то есть

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) + \Sigma \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega), \quad (4.4.5)$$

где

$$Q(\mathbf{r}) = \Sigma_s \int d\Omega' g(\Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\mathbf{r}, \Omega') + \nu_f \Sigma_f \int d\Omega' (\mathbf{r}, \Omega').$$

Интегрируя уравнение (4.4.5) как обыкновенное дифференциальное уравнение при заданном  $Q(\mathbf{r})$  и граничном условии (4.4.2), получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{-\Sigma \xi} \left[ \Sigma_s \int d\Omega' g(\Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega') + \right. \\ \left. + \nu_f \Sigma_f \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega') \right] d\xi, \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

где  $\xi_0$  — значение  $\xi$ , при котором радиус-вектор  $\mathbf{r} - \xi \Omega$  пересекает границу области  $G$ .

Индикатрису рассеяния представим теперь в виде

$$\frac{1}{4\pi} g(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{4\pi} (1 + 3\bar{\mu}_0 \Omega \Omega'),$$

где

$$\bar{\mu}_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu_0 g(\mu_0) d\mu_0.$$

В силу определений будем иметь

$$\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' g(\Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega') = \frac{\Sigma_s}{4\pi} [\varphi_0(\mathbf{r} - \xi \Omega) + 3\bar{\mu}_0 \Omega \mathbf{J}(\mathbf{r} - \xi \Omega)]. \quad (4.4.7)$$

Подставив последнее соотношение в уравнение (4.4.6), получим

$$\varphi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{-\Sigma\xi} [(\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f) \varphi_0(\mathbf{r}') + 3\bar{\mu}_0 \Sigma_s \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\xi. \quad (4.4.8)$$

Здесь мы воспользовались обозначением

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \xi \boldsymbol{\Omega}.$$

Умножим обе части (4.4.8) на  $d\boldsymbol{\Omega}$  и проинтегрируем по всем телесным углам единичной сферы. Тогда, принимая во внимание, что элемент объема в сферической системе координат с центром в точке  $\mathbf{r}$  может быть представлен в виде

$$d\mathbf{r}' = \xi^2 d\xi d\boldsymbol{\Omega},$$

и можем написать

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{-\Sigma\xi}}{\xi^2} [(\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f) \varphi_0(\mathbf{r}') + 3\bar{\mu}_0 \Sigma_s \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'. \quad (4.4.9)$$

В последней формуле использовано соотношение

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\xi}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\xi^3} e^{-\Sigma\xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (4.4.10)$$

Замечая, что [100]

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\xi^3} e^{-\Sigma\xi} = \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi},$$

мы можем переписать этот интеграл в виде

$$I = \int_G \nabla \left[ \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} J(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' - \int_G \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Применив к первому интегралу теорему Гаусса – Остроградского, а во втором интеграле заменив  $\nabla \mathbf{J}$  на  $\varphi_0(\mathbf{r})$  по формуле (4.4.4), получим

$$I = \int_S \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS + (\Sigma - \Sigma_s - \nu_f \Sigma_f) \int_G \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \varphi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.4.11)$$

где  $dS = \mathbf{n} dS$ ,  $dS$  — элемент поверхности  $S$ .

Подставив выражение (4.4.11) в уравнение (4.4.9) и введя обозначения

$$\alpha = \Sigma_s + \nu_f \Sigma_f, \quad \beta = 3\bar{\mu}_0 \Sigma_s (\Sigma - \Sigma_s - \nu_f \Sigma_f), \quad (4.4.12)$$



получим вместо (4.4.9) следующее уравнение:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \left[ \alpha \frac{e^{-\Sigma\xi}}{\xi^2} + \beta \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \right] \varphi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{3\bar{\mu}_0\Sigma_s}{4\pi} \int_S \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS. \quad (4.4.13)$$

Мы получили соотношение, представляющее собой формально интегральное уравнение относительно  $\varphi_0(\mathbf{r}')$  со свободным членом, определенным значениями вектор-функции  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  на границе области  $G$ . Однако уравнения (4.4.13) еще недостаточно для отыскания функции  $\varphi_0(\mathbf{r})$ , так как значения  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  на границе области сами связаны со значениями функции  $\varphi_0(\mathbf{r})$ , а также функции  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  внутри области  $G$ . Поэтому наряду с уравнением (4.4.13) необходимо располагать дополнительным соотношением, определяющим значения функции  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  на границе  $S$  через значения функции  $\varphi_0(\mathbf{r})$  внутри области  $G$ .

В случае простых областей, таких как однородный плоский слой конечной толщины, однородная сфера или однородный бесконечный цилиндр, получение упомянутого соотношения не представляет труда. Для этого достаточно воспользоваться соотношением (4.4.4) и соображениями симметрии.

До сих пор наши рассуждения носили общий характер и относились к однородным телам любой формы с невогнутой поверхностью  $S$ . Теперь перейдем к рассмотрению наиболее интересного частного случая — однородного шара.

Итак, предположим, что поверхность  $S$  — сфера с радиусом  $R$ . Вследствие сферической симметрии задачи функция  $\varphi_0(\mathbf{r})$ , так же как и функция  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , зависит только от  $r = |\mathbf{r}|$ , если в качестве начала координат выбрать центр сферы. Кроме того, вектор  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  всегда параллелен вектору  $\mathbf{r}$ . В частности, на поверхности сферы направление вектора  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  совпадает с направлением внешней нормали. Потому в рассматриваемом случае интегральное уравнение (4.4.13) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \varphi_0(r') r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \left[ \alpha \frac{e^{-\Sigma\xi}}{\xi^2} + \beta \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \right] \times \\ \times \sin \vartheta' d\vartheta' \frac{3\bar{\mu}_0\Sigma_s}{4\pi} J(R) \int_S \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} dS, \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

где  $J(R)$  — модуль вектора  $\mathbf{J}$  на поверхности сферы. Заметим, что  $\xi$  равно расстоянию между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , то есть

$$\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

и при надлежащем выборе координат это расстояние может быть представлено (см. рис. 4) в виде

$$\xi = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}. \quad (4.4.15)$$

Рассмотрим теперь интегралы

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \frac{e^{-\Sigma\xi}}{\xi^2} \sin \vartheta' d\vartheta';$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

Введя  $\xi$  в качестве переменной интегрирования, получим

$$I_1 = \frac{2\pi}{rr'} \int_{|r-r'|}^{r+r'} \frac{e^{-\Sigma\xi}}{\xi} d\xi = \frac{2\pi}{rr'} [E_1(\Sigma|r-r'|) - E_1(\Sigma|r+r'|)];$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{rr'} \int_{|r-r'|}^{r+r'} E_2(\Sigma\xi) d\xi = \frac{2\pi}{\Sigma rr'} [E_3(\Sigma|r-r'|) - E_3(\Sigma|r+r'|)].$$

Наконец, последний интеграл в уравнении (4.4.14) есть интеграл  $I_2$  при  $r' = R$ . В самом деле,

$$\int_S \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} dS = R^2 \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \frac{E_2(\Sigma\xi)}{\xi} \Big|_{r'=R} \sin \vartheta' d\vartheta' =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{\Sigma r R} [E_3(\Sigma|a-z|) + E_3(\Sigma|a+z|)].$$

Остается найти выражение для  $J(R)$ . Интегрируя соотношение (4.4.4) по всему объему шара и принимая во внимание связь функции  $\mathbf{J}$  с  $\varphi_0$ , получаем

$$\int_G \nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) dS = 4\pi R^2 J(R) = 4\pi(\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f - \Sigma) \int_0^R \varphi_0(r') r'^2 dr',$$

откуда

$$R^2 J(R) = (\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f - \Sigma) \int_0^R \varphi_0(r') r'^2 dr'.$$

Принимая во внимание вышеизложенное, вместо уравнения (4.4.14) получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \int_0^R \left[ \alpha \frac{E_1(\Sigma|r - r'|) - E_1(\Sigma|r + r'|)}{rr} + \right. \\ & + \beta \frac{E_3[\Sigma|r - r'|] - E_3(\Sigma[r + r'])}{rr} \left. \right] \varphi_0(r') r'^2 dr' - \\ & - \frac{1}{2} \beta \frac{E_3(\Sigma(R - r)) - E_3(\Sigma[R + r])}{\Sigma r R} \int_0^R \varphi_0(r') r'^2 dr'. \quad (4.4.16) \end{aligned}$$

Это и есть основное уравнение для сформулированной выше задачи.

Прежде чем приступить к отысканию наименьшего значения  $R$ , при котором однородное уравнение (4.4.16) имеет ненулевое решение, совершим некоторые предварительные преобразования. Введем сначала обозначения

$$\varphi(r) = r\varphi_0(r). \quad (4.4.17)$$

Тогда для функции  $\varphi(r)$ , согласно уравнению (4.4.16), будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) = & \frac{1}{2} \int_0^R \left\{ \alpha [E_1(\Sigma|r - r'|) - E_1(\Sigma[r + r'])] + \beta [E_3(\Sigma|r - r'|) - \right. \\ & - E_3(\Sigma[r + r'])] \left. \right\} \varphi(r') dr' - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\Sigma} [E_3(\Sigma[R - r]) - \\ & - E_3(\Sigma[R + r])] \int_0^R \frac{r'}{R} \varphi(r') dr'. \quad (4.4.18) \end{aligned}$$

Обозначим далее  $\Phi(x)$  функцию, определенную на интервале  $(0,1)$  и связанную с функцией  $\varphi(\mathbf{r})$  соотношением

$$\Phi(x) = \varphi(Rx). \quad (4.4.19)$$

Функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 [A\bar{G}(x' \rightarrow x) + B\bar{H}(x' \rightarrow x)] \Phi(x') dx', \quad (4.4.20)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}(x' \rightarrow x) = & a[E_1(a|x' - x|) - E_1(a[x' + x])]; \\ \bar{H}(x' \rightarrow x) = & a[E_3(a|x' - x|) - E_3(a[x' + x])] - \\ & - ax'[E_1(a[1 - x]) - E_3(a[1 + x])], \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

при следующих обозначениях:

$$A = \frac{\alpha}{\Sigma} = \frac{\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f}{\Sigma}, \quad B = \frac{\beta}{\Sigma} = \frac{3\bar{\mu}_0 \Sigma_s}{\Sigma}(1 - A), \quad a = \Sigma R. \quad (4.4.22)$$

Наконец, введем в рассмотрение функцию  $y(x)$ , определенную на интервале  $(-1, 1)$  соотношением

$$y(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x > 0, \\ -\Phi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (4.4.23)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [AG(x' \rightarrow x) + BH(x' \rightarrow x)] y(x') dx', \quad (4.4.24)$$

где

$$\begin{aligned} G(x' \rightarrow x) &= aE_1(a|x - x'|), \\ H(x' \rightarrow x) &= aE_3(a|x - x'|) - \frac{1}{2} ax' [E_3(a[1 - x]) - E_3(a[1 + x])]. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Для решения уравнения (4.4.24) представим функции  $G$  и  $H$  приближенно конечными рядами

$$\left. \begin{aligned} G(x' \rightarrow x) &= \sum_{\nu=0}^{2n+1} \frac{2\nu+1}{2} \alpha_{\nu}(x) P_{\nu}(x'); \\ H(x' \rightarrow x) &= \sum_{\nu=0}^{2n+1} \frac{2\nu+1}{2} \beta_{\nu}(x) P_{\nu}(x'), \end{aligned} \right\} \quad (4.4.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\nu}(x) &= \int_{-1}^1 G(x' \rightarrow x) P_{\nu}(x') dx'; \\ \beta_{\nu}(x) &= \int_{-1}^1 H(x' \rightarrow x) P_{\nu}(x') dx'. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.26')$$

Подставив выражение (4.4.26) в уравнение (4.4.24) и введя обозначение

$$c_{\nu} = \int_{-1}^1 y(x) P_{\nu}(x) dx, \quad (4.4.27)$$

получим

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{2n+1} \frac{2\nu+1}{2} [A\alpha_{\nu}(x) + B\beta_{\nu}(x)] c_{\nu}. \quad (4.4.28)$$

В силу нечетности функции  $y(x)$  все  $c_\nu$  при  $\nu$  четных обращаются в нуль. Поэтому равенство (4.4.28) может быть записано в виде

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n \frac{4\nu+3}{2} [A\alpha_{2\nu+1}(x) + B\beta_{2\nu+1}(x)] c_{2\nu+1}.$$

Подставив последнее выражение в формулы (4.4.27) при нечетных  $\nu$ , получим

$$c_{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{4j+3}{2} [Ag_{kj} + Bh_{kj}] c_{2j+1}, \quad (4.4.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{kj} &= \int_{-1}^1 P_{2k+1}(x) \alpha_{2j+1}(x) dx; \\ h_{kj} &= \int_{-1}^1 P_{2k+1}(x) \beta_{2j+1}(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.29')$$

Обозначим определитель системы (4.4.29)

$$\Delta_n(A, B, a).$$

Система (4.4.29) допускает ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta_n(A, B, a) = 0. \quad (4.4.30)$$

Наименьшее значение  $a$ , удовлетворяющее последнему уравнению, представляет собой приближенное значение критического радиуса, выраженного в единицах полного свободного пробега. Это значение мы будем называть  $n$ -м приближенным значением критического радиуса сферы.

Найдем теперь явные выражения для функций  $\alpha_{2k+1}(x)$  и  $\beta_{2k+1}(x)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{2j+1}(x) &= \int_{-1}^1 a E_1(a|x-x'|) P_{2j+1}(x') dx' = \\ &= \sum_{\mu=0}^{2j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^\mu \left\{ \frac{1+(-1)^\mu}{1+\mu} P_{2j+1}^{(\mu)}(x) - P_{2j+1}^{(\mu)} [E_{2+\mu}(a[1-x]) - \right. \\ &\quad \left. - E_{2+\mu}(a[1+x])] \right\}, \quad (4.4.31) \end{aligned}$$

$$\beta_{2j+1} = \sum_{\mu=0}^{2j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} \left\{ \frac{1+(-1)^{\mu}}{3+\mu} P_{2j+1}^{(\mu)}(x) - P_{2j+1}^{(\mu)}[E_{4+\mu}(a[1-x]) - E_{4+\mu}(a[1+x])] \right\} - \frac{1}{3} b \delta_{1,2j+1} [E_3(a[1-x]) - E_3(a[1+x])], \quad (4.4.32)$$

где

$$P_{2\nu+1}^{\mu} = \left. \frac{d^j P_{2\nu+1}(z)}{dz^j} \right|_{z=1}.$$

Найдем далее выражения для коэффициентов  $g_{kj}$  и  $h_{kj}$ . Положив  $k \geq j$  и подставив выражения (4.4.31) для  $\alpha_{2j+1}(x)$  в первую из формул (4.4.29'), получим

$$g_{kj} = \frac{4}{4k+3} \delta_{kj} - \frac{2}{a} \sum_{\mu=0}^{2j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} P_{2j+1}^{(\mu)} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^{2k+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\nu} P_{2k+1}^{(\nu)} \left[ \frac{(-1)^{\nu}}{2+\mu+\nu} + E_{3+\mu+\nu}(2a) \right]. \quad (4.4.33)$$

Для  $k < j$  можно воспользоваться свойством симметрии

$$g_{kj} = g_{jk}.$$

Последнее свойство является следствием симметрии ядра.

Аналогичным образом могут быть найдены коэффициенты  $h_{kj}$ . Если  $j \neq 0$ , то при  $k \geq j$

$$h_{kj} = \frac{4}{3(4k+3)} \delta_{kj} - \frac{2}{a} \sum_{\mu=0}^{2j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} P_{2j+1}^{(\mu)} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^{2k+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\nu} P_{2k+1}^{(\nu)} \left[ \frac{(-1)^{\nu}}{4+\mu+\nu} + E_{5+\mu+\nu}(2a) \right]. \quad (4.4.34)$$

Так же как и для коэффициентов  $g_{kj}$ , последняя формула справедлива при  $k \geq j$  ( $j \neq 0$ ). Если же  $k < j$ , то при условии  $k \neq 0$

$$h_{kj} = h_{jk}.$$

Для значений  $h_{0k}$  имеем

$$h_{0k} = \frac{4}{3(4k+3)} \delta_{0k} - \frac{2}{a} \sum_{\mu=0}^1 \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} P_1^{(\mu)} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^{2k+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\nu} P_{2k+1}^{(\nu)} \left[ \frac{(-1)^{\nu}}{4+\mu+\nu} + E_{5+\mu+\nu}(2a) \right]. \quad (4.4.35)$$

Наконец, значения  $h_{k0}$  при  $k \neq 0$  связаны со значениями  $h_{0k}$  соотношением

$$h_{k0} = h_{0k} - \frac{2}{3} \sum_{\nu=0}^{2k+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\nu} P_{2k+1}^{(\nu)} \left[ \frac{(-1)^{\nu}}{3+\mu} + E_{4+\nu}(2a) \right]. \quad (4.4.36)$$

Формулы для  $g_{kj}$  и  $h_{kj}$ , приведенные выше, могут быть записаны в другом виде, если воспользоваться рекуррентными соотношениями между функциями  $E_n(x)$ .

Не останавливаясь на рассмотрении общего случая, приведем выражения для нескольких первых коэффициентов  $g_{kj}$  и  $h_{kj}$ . Эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{4}{3} - \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2} + \frac{e^{-2b}}{2a} \left( 1 + \frac{1}{2a} \right) \right]; \\ g_{01} = g_{10} &= -\frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{5}{3a} + \frac{9}{4a^2} - \frac{5}{2a^4} + \frac{e^{-2a}}{2a} \left( 1 + \frac{11}{2a} + \frac{10}{a^2} + \frac{5}{a^3} \right) \right]; \\ g_{11} &= \frac{4}{7} - \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{2a^2} + \frac{15}{2a^4} - \frac{225}{8a^6} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{21}{2a} + \frac{45}{a^2} + \frac{195}{2a^3} + \frac{225}{2a^4} + \frac{225}{4a^5} \right) \right]; \\ g_{02} &= -\frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{14}{3a} + \frac{45}{2a^2} - \frac{63}{a^3} + \frac{175}{2a^4} - \frac{945}{8a^6} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{29}{2a} + \frac{91}{a^2} + \frac{595}{2a^3} + \frac{945}{2a^4} + \frac{945}{4a^5} \right) \right]; \\ g_{12} &= -\frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{a} + \frac{15}{2a^2} - \frac{75}{2a^4} + \frac{2205}{8a^6} - \frac{2835}{2a^8} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{39}{2a} + \frac{171}{a^2} + \frac{1725}{2a^3} + \frac{5355}{2a^4} + \frac{20475}{4a^5} + \frac{5670}{a^6} + \frac{2835}{a^7} \right) \right]; \\ g_{22} &= \frac{4}{11} = \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{2} - \frac{15}{2a^2} + \frac{105}{2a^4} - \frac{1575}{2a^6} + \frac{19845}{2a^8} - \frac{15 \cdot 19845}{4a^{10}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2a}}{2a} \left( 1 + \frac{57}{2a} + \frac{378}{a^2} + \frac{3045}{a^3} + \frac{2 \cdot 8190}{a^4} + \frac{2 \cdot 30555}{a^5} + b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2 \cdot 79380}{a^6} + \frac{2 \cdot 138915}{a^7} + \frac{297675}{a^8} + \frac{297675}{2a^9} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{00} &= \frac{2}{9} - \frac{1}{3a} \left[ 1 - \frac{1}{a^2} + e^{-2a} \left( 1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right]; \\
h_{01} &= \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{3}{2a^2} - \frac{15}{8a^4} + \frac{e^{-2b}}{2a} \left( 1 + \frac{9}{2a} + \frac{15}{2a^2} + \frac{15}{4a^3} \right) \right]; \\
h_{10} &= h_{01} - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3} - \frac{3}{2a} + \frac{3}{a^2} - \frac{5}{2a^3} + \frac{e^{-2a}}{2a} \left( 1 + \frac{4}{a} + \frac{5}{a^2} \right) \right]; \\
h_{11} &= \frac{4}{21} - \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{a^2} + \frac{45}{8a^4} - \frac{45}{2a^6} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1 + \frac{19}{2a} + \frac{75}{2a^2} + \frac{315}{4a^3} + \frac{90}{a^4} + \frac{45}{a^5} \right) \right]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
h_{02} &= -\frac{2}{a} \left[ \frac{1}{4} - \frac{14}{5a} + \frac{15}{a^2} - \frac{45}{a^3} + \frac{525}{8a^4} - \frac{189}{2a^6} + \frac{e^{-2b}}{2a} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1 + \frac{27}{2a} + \frac{159}{2a^2} + \frac{987}{4a^3} + \frac{378}{a^4} + \frac{189}{a^5} \right) \right]; \\
h_{20} &= h_{02} = -\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3} - \frac{15}{4a} + \frac{21}{a^2} - \frac{70}{a^3} + \frac{135}{a^4} - \frac{945}{8a^5} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1 + \frac{13}{a} + \frac{145}{2a^2} + \frac{405}{2a^3} + \frac{945}{4a^4} \right) \right]; \\
h_{21} &= h_{12} = -\frac{2}{a} \left[ \frac{1}{4} - \frac{9}{5a} + \frac{5}{a^2} - \frac{225}{8a^4} + \frac{441}{2a^6} - \frac{5 \cdot 945}{4a^8} + \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1 + \frac{37}{2a} + \frac{309}{2a^2} + \frac{2997}{4a^3} + \frac{28 \cdot 81}{a^4} + \frac{42 \cdot 102}{a^5} + \frac{5 \cdot 945}{a^6} + \frac{5 \cdot 945}{2a^7} \right) \right]; \\
h_{22} &= \frac{4}{33} - \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{2a^2} + \frac{315}{8a^4} - \frac{630}{a^6} + \frac{35 \cdot 945}{4a^8} - \frac{135 \cdot 945}{2 \cdot a^{10}} \frac{e^{-2a}}{2a} \times \right. \\
&\quad \times \left( 1 + \frac{55}{2a} + \frac{15 \cdot 47}{2a^2} + \frac{105 \cdot 105}{4a^3} + \frac{70 \cdot 207}{a^4} + \frac{105 \cdot 507}{a^5} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{145 \cdot 945}{a^6} + \frac{505 \cdot 945}{2a^7} + \frac{270 \cdot 945}{a^8} + \frac{135 \cdot 945}{a^9} \right) \right].
\end{aligned}$$

Представив в последних формулах  $e^{-2a}$  в виде ряда по степеням  $2a$ , можно получить разложения коэффициентов  $g_{kj}$  и  $h_{kj}$  по степеням  $a$ . Эти разложения могут быть использованы для вычисления  $g_{kj}$  и  $h_{kj}$  при малых значениях  $a$ .

Если в предыдущих формулах положить  $\bar{\mu}_0 = 0$ , то приходим к изотропному случаю. В изотропном случае критический радиус шара может быть протабулирован в зависимости от параметра  $A$ .



## 5

**Метод сферических гармоник**

### **5.1. Основные положения метода сферических гармоник. Плоскопараллельные и сферически-симметричные системы**

В настоящей главе изложен наиболее мощный из существующих методов решения кинетических уравнений, а именно – метод сферических гармоник. Рассмотрена задача о переносе излучения в плоскопараллельной, сферически-симметричной и цилиндрической областях. Получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений для угловых моментов и сформулированы граничные условия.

Рассмотрим кинетическое уравнение переноса нейтронов в веществе в плоскопараллельной геометрии:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') g(\mu_0) + f(z, \mu). \quad (5.1.1)$$

Будем предполагать, что функции  $f(z, \mu)$  и  $\varphi(z, \mu')$  не зависят от азимута  $\psi$ .

Функцию  $g(\mu_0)$  представим в виде ряда по полиномам Лежандра [337, 352]:

$$\frac{1}{4\pi} g(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) g_n P_n(\mu_0), \quad (5.1.2)$$

где

$$g_n = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu g(\mu) P_n(\mu).$$

Функцию  $f(z, \mu)$  представим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$f(z, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) f_n(z) P_n(\mu), \quad (5.1.3)$$

где

$$f_n(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu f(z, \mu) P_n(\mu). \quad (5.1.3')$$

Решение уравнения (5.1.1) будем искать в следующем виде:

$$\varphi(z, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \varphi_n(z) P_n(\mu), \quad (5.1.4)$$

где

$$\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu \varphi(z, \mu) P_n(\mu).$$

Уравнение (5.1.1) умножим почленно на  $P_m(\mu)$  и результат проинтегрируем по  $\psi$  и  $\mu$ . Подставив в полученное выражение ряды (5.1.2), (5.1.3) и (5.1.4) и используя соотношения для полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

и

$$\mu P_n(\mu) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(\mu), \quad (5.1.5)$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$m \frac{d\varphi_{m-1}}{2z} + (m+1) \frac{d\varphi_{m+1}}{2z} + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m = (2m+1) f_m(z), \quad (5.1.6)$$

где

$$\Sigma_m = \Sigma - g_m \Sigma_s.$$

Введем в рассмотрение векторы

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= |\varphi_{2m}|, & J &= |\varphi_{2m+1}|, \\ f &= |(2m+1)f_{2m}|, & F &= |(2m+1)f_{2m+1}|, \end{aligned} \right\} (m = 0, 1, 2, \dots)$$

матрицы

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1+2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 \cdot 2 & 1+2 \cdot 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 \cdot 3 & 1+2 \cdot 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1+2 & 2 \cdot 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1+2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1+2 \cdot 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

и диагональные матрицы

$$a = \|(1+4m)\Sigma_{2m}\|;$$

$$b = \|(3+4m)\Sigma_{2m+1}\|.$$

Тогда система уравнений (5.1.6) в матричной форме примет вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{dJ}{dz} + a\varphi &= f; \\ \beta \frac{d\varphi}{dz} + bJ &= F. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.7)$$

Рассмотрим далее вопрос о граничных условиях в приближении метода сферических гармоник. Точное граничное условие для решения кинетического уравнения (5.1.1) имеет вид

$$\varphi(z, \mu) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } -1 \leq \mu < 0. \quad (5.1.8)$$

Р. Маршак предложил для получения требуемых граничных условий точное условие (5.1.8) заменить системой интегральных соотношений

$$\int_{-1}^0 P_{2i+1}(\mu) \varphi d\mu = 0 \quad \text{на } S, \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1.9)$$

Подставляя решение в виде ряда (5.1.4) в соотношения (5.1.9), приходим к бесконечной системе алгебраических выражений

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.1.10)$$

где

$$a_{im} = (2m+1) \int_{-1}^0 \mu^{2i+1} P_m(\mu) d\mu. \quad (5.1.11)$$

В. С. Владимиров показал, что граничные условия (5.1.9) в известном смысле являются наилучшими [71].

Однородную систему уравнений (5.1.10) запишем в векторно-матричной форме

$$A\varphi + BJ = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.1.12)$$

где

$$A = \|a_{im}\|, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 2, 4, \dots \end{pmatrix};$$

$$B = \|a_{im}\|, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 3, 5, \dots \end{pmatrix}.$$

Если область  $G$  и источники симметричны относительно плоскости  $z = 0$ , то в центре симметрии необходимо поставить условие

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (5.1.13)$$

В результате приходим к следующей задаче:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{dJ}{dz} + a\varphi &= f; \\ \beta \frac{d\varphi}{dz} + bJ &= F; \\ A\varphi + BJ &= 0 \quad \text{при } z = H; \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.14)$$

где  $H$  — внешняя граница области  $G$ .

Отметим, что нас интересует только непрерывное во всем объеме  $G$  решение задачи. Это значит, что при переходе из одной зоны в другую с разрывом физических констант на границе раздела имеет место непрерывность всех компонентов решения  $\varphi_m(z)$ . Таким образом, задача сформулирована полностью.

Для практического отыскания приближенного решения в ряду (5.1.4) необходимо ограничиться фиксированным числом членов. Р. Маршак предложил каждый раз ограничиваться четным числом членов.

Переходим к рассмотрению сферически-симметричных задач. Соответствующее кинетическое уравнение Больцмана в этом случае имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(r, \mu') g(\mu_0) + f(r, \mu) \quad (5.1.15)$$

при условии, что

$$\varphi(r, \mu) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu < 0. \quad (5.1.16)$$

Предполагается, что ни одна из величин, входящих в уравнение (5.1.15), не зависит от азимута  $\psi$ .

Решение уравнения (5.1.15) будем искать в виде

$$\varphi(r, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n(r) P_n(\mu). \quad (5.1.17)$$

Подставим ряды (5.1.2), (5.1.3) и (5.1.17) в уравнение (5.1.15), воспользуемся соотношением (5.1.5) и равенством [337]:

$$(1 - m\mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} = (n+1)(\mu P_n - P_{n+1}). \quad (5.1.18)$$

Аналогично предыдущему, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$m \left( \frac{d\varphi_{m-1}}{dr} - \frac{m-1}{r} \varphi_{m-1} \right) + (m+1) \left( \frac{d\varphi_{m+1}}{dr} + \frac{m+2}{r} \varphi_{m+1} \right) + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m = (2m+1) f_m(r), \quad (5.1.19)$$

где  $f_m(r)$  — коэффициенты Фурье функции  $f(r, \mu)$ , определяемые равенством (5.1.3').

Систему уравнений (5.1.19) преобразуем к следующему виду:

$$mr^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m-1}} + (m+1) \frac{1}{r^{m+2}} \frac{d}{dr} r^{m+2} \varphi_{m+1} + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m = (2m+1) f_m. \quad (5.1.20)$$

С помощью векторов  $\varphi, J, f, F$  и матриц  $a$  и  $b$ , определенных выше, систему уравнений (5.1.19) запишем в векторно-матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} KJ + a\varphi &= f; \\ L\varphi + bJ &= F, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.21)$$

где  $K$  и  $L$  — операторы, определенные следующим образом:

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & \frac{3}{r^4} \frac{d}{dr} r^4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4r^3 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} & \frac{5}{r^6} \frac{d}{dr} r^6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6r^5 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^5} & \frac{7}{r^8} \frac{d}{dr} r^8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} \frac{d}{dr} & \frac{2}{r^3} \frac{d}{dr} r^3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} & \frac{4}{r^5} \frac{d}{dr} r^5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5r^4 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^4} & \frac{6}{r^8} \frac{d}{dr} r^8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

К системе уравнений (5.1.21) необходимо присоединить граничные условия:

в центре сферически-симметричной области

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0; \quad (5.1.22)$$

на внешней границе области

$$A\varphi + BJ = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (5.1.23)$$

## 5.2. Бесконечные цилиндрические системы

Рассмотрим бесконечные осесимметричные цилиндрические системы. Пусть ось  $z$  совпадает с осью симметрии цилиндра. Тогда основное кинетическое уравнение переноса нейтронов запишется в виде

$$\sin \vartheta \left( \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \Sigma \varphi =$$

$$\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \vartheta', \psi') g(\mu_0) + f(r, \vartheta, \psi) \quad (5.2.1)$$

при условии, что

$$\varphi(r, \vartheta, \psi) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega n < 0. \quad (5.2.2)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол между направлением движения нейтрона и осью  $z$ ;  $\psi$  — угол между проекцией направления движения нейтрона на плоскость  $x, y$  и вектором  $\mathbf{r}$ . При выводе уравнений сферических гармоник будем следовать работам [84, 516].

Решение задачи (5.2.1), (5.2.2) представим в виде ряда по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \varphi(r, \vartheta, \psi) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \varphi_{n0}(r) P_n(\mu) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) \cos m\psi P_n^m(\mu), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

где  $P_n^m(\mu)$  — присоединенные полиномы Лежандра.

В разложении (5.2.3) учтено, что функция  $\varphi(r, \vartheta, \psi)$  четная относительно угла  $\psi$ . Подставим ряд (5.2.3) в уравнение (5.2.1) и преобразуем слагаемые полученного выражения. Так, сначала преобразуем первое слагаемое

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \varphi'_{n0}(r) \cos \psi \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi'_{nm}(r) [\cos(m-1)\psi + \cos(m+1)\psi] \times \\ & \left. \times \sin \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Принимая во внимание соотношение [84]

$$\begin{aligned} \sin \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta)] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2n+1} [(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(\cos \vartheta) \times \\ &\quad \times (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta)], \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

выражение (5.2.4) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \varphi'_{n-1, m-1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \times \\ & \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n+2} \varphi'_{n+1, m-1}(r) \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varphi'_{n+1,m+1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} \varphi'_{n-1,m+1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi.
\end{aligned}$$

Если мы теперь положим  $\varphi_{nm} = 0$  при  $m > n$  или в том случае, когда по крайней мере один из индексов  $n$  или  $m$  отрицателен, а также учтем, что

$$P_n^m(\cos \vartheta) \equiv 0 \text{ при } n = -1 \text{ и } n = 0 \ (m > 0),$$

то предыдущее соотношение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \varphi'_{n-1,m-1}(r) - \right. \\
& - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \varphi'_{n+1,m-1}(r) + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi'_{n+1,m-1}(r) + \\
& \left. + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\varphi'_{n+1,m+1}(r) - \varphi'_{n-1,m+1}(r)] \right\} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi. \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуем второй член к виду

$$\begin{aligned}
- \frac{\sin \vartheta \cos \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = & \frac{1}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ (m+1) \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \times \right. \\
& \times [\varphi_{n+1,m+1}(r) - \varphi_{n-1,m+1}(r)] + (m-1) \times \\
& \times \left[ \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \varphi_{n+1,m-1}(r) - \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \varphi_{n-1,m-1}(r) \right] \Big\} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi. \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

Третий член равенства имеет простой вид:

$$\begin{aligned}
\Sigma \varphi = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Sigma \left[ \varphi_{n0}(r) P_n(\cos \vartheta) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi \right]. \quad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Переходим теперь к преобразованию интегрального члена.



Предположим, что индикатриса рассеяния  $\frac{1}{4\pi} g(\mu_0)$  представлена в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{4\pi} g(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l P_l(\cos \theta), \quad (5.2.9)$$

где  $\mu_0 = \cos \theta$ .

Введем в рассмотрение сферические функции  $Y_n(\vartheta, \psi)$  по формуле

$$Y_n(\vartheta, \psi) = \frac{\varphi_{n0}}{2} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi.$$

Тогда имеют место следующие условия ортогональности [337]:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega Y_n(\vartheta, \psi) P_k(\cos \vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{1}{2n+1} Y_n(\vartheta, \psi) & \text{при } k = n. \end{cases}$$

С учетом приведенных равенств, интегральный член можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' g(\mu_0) \varphi(r, \vartheta', \psi') = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Sigma_s g_n \left\{ \varphi_{n0}(r) P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Наконец, член, учитывающий источники нейтронов, представим в виде

$$\begin{aligned} f(r, \vartheta, \psi) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[ \varphi_{n0} P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} f_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi \right], \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_{n0} &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_{r,\vartheta,\psi} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta; \\ f_{nm} &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \int_0^{\pi} f_{r,\vartheta,\psi} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.12)$$

Собрав все члены, объединив их под знаком сумм и приравняв нулю, получим бесконечную систему уравнений.

При  $m = 0$

$$\left(\frac{d\varphi_{n+1,1}}{dr} + \frac{d\varphi_{n+1,1}}{r}\right) - \left(\frac{d\varphi_{n-1,1}}{dr} + \frac{d\varphi_{n-1,1}}{r}\right) + (2n+1)(\Sigma - \Sigma_s g_n)\varphi_{n0} = (2n+1)f_{n0}, \quad (5.2.13)$$

при  $m \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \left( \frac{d\varphi_{n-1,m-1}}{dr} - \frac{m-1}{r} \varphi_{n-1,m-1} \right) - \\ & - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \left( \frac{d\varphi_{n+1,m-1}}{dr} - \frac{m}{r} \varphi_{n+1,m-1} \right) + \\ & + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left( \frac{d\varphi_{n+1,m+1}}{dr} + \frac{m+1}{r} \varphi_{n+1,m+1} \right) - \\ & - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left( \frac{d\varphi_{n-1,m+1}}{dr} + \frac{m+1}{r} \varphi_{n-1,m+1} \right) + \\ & + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\Sigma - \Sigma_s g_n) \varphi_{nm} = 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} f_{nm}. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Учтем тот факт, что при нашем выборе системы координат функция  $\varphi(r, \vartheta, \psi)$  симметрична по переменной  $\mu = \cos \vartheta$ . Это значит, что присоединенные полиномы Лежандра должны быть четными и, следовательно, сумма индексов  $n + m$  всегда должна быть четной.

В. С. Владимиров показал, что для произвольной невогнутой области  $G$  в качестве граничных можно принять следующие условия:

$$\int d\Omega \Omega \mathbf{n} \varphi(\mathbf{r}, \Omega) Y_{2k}^m(\Omega) = 0 \quad \text{на } S, \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots, 2k \end{pmatrix}, \quad (5.2.15)$$

где интегрирование проводится по области  $\Omega \mathbf{n} < 0$ .

Граничное условие (5.2.15) получено из вариационного принципа для случая четной индикатрисы рассеяния [50]. В дальнейшем мы будем пользоваться граничным условием (5.2.15) в случае произвольной индикатрисы рассеяния.

Для рассмотренного случая одномерной цилиндрической геометрии следует положить

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi; \quad \Omega \mathbf{n} = \sin \vartheta \cos \psi;$$

$$Y_{2k}^m(\Omega) = P_{2k}^m(\cos \vartheta) \cos m\psi.$$

В результате приходим к граничным условиям

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\pi} \varphi(r, \Omega, \psi) P_{2k}^m(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos m\psi d\vartheta = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.2.16)$$

$$\left( \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots, 2k \end{array} \right).$$

Подставляя разложение (5.2.3) в граничное условие (5.2.16) и производя вычисления, приходим к соотношению

$$\sum_{n,m} a_{n,m}^{k,l} \varphi_{n,m} = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.2.17)$$

где  $a_{n,m}^{k,l}$  — некоторые числа.

Система уравнений (5.2.13), (5.2.14) позволяет сформулировать любое приближение метода сферических гармоник. Для практических же целей в большинстве случаев достаточно ограничиться  $P_3$ -приближением, полагая  $\varphi_{nm} = 0$  при  $n \geq 4$ . В этом случае будем иметь взаимосвязанную систему для четных моментов

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}}{dr} + \frac{1}{r}\varphi_{11} + \Sigma_0\varphi_{00} &= f_{00}; \\ \frac{d\varphi_{31}}{dr} + \frac{1}{r}\varphi_{31} - \left( \frac{d\varphi_{11}}{dr} + \frac{1}{r}\varphi_{11} \right) + 5\Sigma_2\varphi_{20} &= 5f_{20}; \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_{11}}{dr} - \frac{1}{r}\varphi_{11} \right) - \frac{1}{12} \left( \frac{d\varphi_{31}}{dr} - \frac{1}{r}\varphi_{31} \right) + \\ + \frac{1}{24} \left( \frac{d\varphi_{33}}{dr} + \frac{3}{r}\varphi_{33} \right) + \frac{5}{12}\Sigma_2\varphi_{22} &= \frac{5}{12}f_{22} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

и для нечетных моментов

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{00}}{dr} - \frac{d\varphi_{20}}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_{22}}{dr} + \frac{2}{r}\varphi_{22} \right) + 3\Sigma_1\varphi_{11} &= 3f_{11}; \\ \frac{d\varphi_{20}}{dr} - \frac{1}{12} \left( \frac{d\varphi_{22}}{dr} + \frac{2}{r}\varphi_{22} \right) + \frac{7}{6}\Sigma_3\varphi_{31} &= \frac{7}{6}f_{31}; \\ \frac{1}{24} \left( \frac{d\varphi_{22}}{dr} - \frac{2}{r}\varphi_{22} \right) + \frac{7}{360}\Sigma_3\varphi_{33} &= \frac{7}{360}f_{33}. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Здесь использовано обозначение

$$\Sigma_n = \Sigma - \Sigma_s g_n.$$

Систему уравнений (5.2.18), (5.2.19) удобно записать в более компактном виде, а именно: для четных моментов

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{11} + \Sigma_0 \varphi_{00} &= f_{00}; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{31} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{11} + 5 \Sigma_2 \varphi_{20} &= 5 f_{20}; \\ \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{11}}{r} - \frac{r}{12} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{31}}{r} + \frac{1}{24 r^3} \frac{d}{dr} r^3 \varphi_{33} + \frac{5}{12} \Sigma_2 \varphi_{22} &= \frac{5}{12} f_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.18')$$

и для нечетных

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \varphi_{00}}{dr} - \frac{d \varphi_{20}}{dr} + \frac{1}{2 r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_{22} + 3 \Sigma_1 \varphi_{11} &= 3 f_{11}; \\ \frac{d \varphi_{20}}{dr} - \frac{1}{12 r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_{22} + \frac{7}{6} \Sigma_3 \varphi_{31} &= \frac{7}{6} f_{31}; \\ \frac{r^2}{24} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{22}}{r^2} + \frac{7}{360} \Sigma_3 \varphi_{33} &= \frac{7}{360} f_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.19')$$

Введем в рассмотрение векторы

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_{00} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{22} \end{vmatrix}; \quad J = \begin{vmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{31} \\ \varphi_{33} \end{vmatrix}$$

и операторы

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & 0 \\ \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & -\frac{r}{12} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & \frac{1}{24 r^3} \frac{d}{dr} r^3 \end{vmatrix}; \quad L = \begin{vmatrix} \frac{d}{dr} & -\frac{d}{dr} & \frac{1}{2 r^2} \frac{d}{dr} r^2 \\ 0 & \frac{d}{dr} & -\frac{1}{12 r^2} \frac{d}{dr} r^2 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{24} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \end{vmatrix}.$$

Тогда системы уравнений (5.2.18'), (5.2.19') в векторно-матричной форме принимают вид

$$\left. \begin{aligned} KJ + a\varphi &= f, \\ L\varphi + bJ &= F, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.20)$$

где

$$a = \begin{vmatrix} \Sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \Sigma_2 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} 3 \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{6} \Sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{360} \Sigma_3 \end{vmatrix};$$

$$f = \left\| \begin{array}{c} f_{00} \\ 5f_{20} \\ \frac{5}{12}f_{22} \end{array} \right\|; \quad F = \left\| \begin{array}{c} 3f_{11} \\ \frac{7}{6}f_{31} \\ \frac{7}{360}f_{33} \end{array} \right\|.$$

Переходим теперь к обсуждению вопроса о граничных условиях. В. С. Владимиров на основе вариационного принципа показал, что наилучшими граничными условиями для уравнений (5.2.20), соответствующими (5.2.2), являются следующие [71].

На внешней границе реактора при  $r = R$

$$\left. \begin{array}{l} 16\varphi_{00} - 10\varphi_{20} + 5\varphi_{22} - 32\varphi_{11} = 0; \\ -40\varphi_{00} + 250\varphi_{20} - 25\varphi_{22} + 128\varphi_{11} - 128\varphi_{31} = 0; \\ 120\varphi_{00} - 150\varphi_{20} + 175\varphi_{22} - 384\varphi_{11} + 64\varphi_{31} - 32\varphi_{33} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.2.21)$$

Остальные три граничные условия определим при  $r = 0$  следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\varphi_{00}}{dr} = 0; \\ \varphi_{11} = 0; \\ \frac{d\varphi_{22}}{dr} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.2.22)$$

Условия (5.2.22) являются следствием требования об ограниченности решения при  $r = 0$ . Можно показать, что условия (5.2.22) могут быть, в частности, заменены следующими:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\varphi_{00}}{dr} = 0; \\ \frac{d\varphi_{20}}{dr} = 0; \\ \frac{d\varphi_{22}}{dr} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.2.23)$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 16 & -10 & 5 \\ -40 & 250 & -25 \\ 120 & -150 & 175 \end{array} \right\|; \quad B = \left\| \begin{array}{ccc} -32 & 0 & 0 \\ 128 & -128 & 0 \\ -384 & 64 & -32 \end{array} \right\|,$$

то граничные условия (5.2.21) и (5.2.23) можно окончательно записать в виде

$$A\varphi + BJ = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (5.2.24)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (5.2.25)$$

Ввиду большой важности решения нейтронно-физических задач применительно к ячейке ядерного реактора, поставим соответствующие граничные условия на внешней границе круговой цилиндрической ячейки гетерогенного реактора при  $r = R$ .

Очевидно, на внешней границе ячейки должно выполняться условие

$$\varphi(R, \vartheta, \psi) = \varphi(R, \pi - \vartheta, \pi - \psi). \quad (5.2.26)$$

Так как имеет место соотношение

$$P_n^m(\cos[\pi - \vartheta]) \cos m(\pi - \psi) = (-1)^m P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi,$$

закключаем, что в разложении (5.2.3) при  $r = R$  все моменты  $\varphi_{nm}(R)$  с нечетными  $n$  должны обращаться в нуль, то есть необходимо выполнение условия, предложенного В. В. Смеловым:

$$J = 0, \quad (5.2.27)$$

или, с учетом второго равенства из (5.2.20), будем иметь

$$L\varphi = F \quad \text{при} \quad r = R. \quad (5.2.28)$$

### 5.3. $P_1$ -приближение. Уравнение диффузии

При решении многих задач, связанных с прохождением излучения через вещество, зачастую бывает достаточно ограничиться  $P_1$ -приближением. В этом случае вектор-функции и матрицы, введенные в рассмотрение в предыдущих параграфах, будут иметь только по одному компоненту. В результате нетрудно прийти к соответствующим для данных геометрий системам уравнений.

Ввиду того, что нам потребуются уравнения переноса нейтронов в  $P_1$ -приближении для любой геометрии, приведем вывод соответствующей системы уравнений, исходя из общих соображений [479].

Рассмотрим кинетическое уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' \varphi(r, \Omega') g(\nu_0) + f(\mathbf{r}, \Omega). \quad (5.3.1)$$

Решение уравнения (5.3.1) будем искать в виде ряда по сферическим функциям. Ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\varphi_0(\mathbf{r}) + 3\Omega \varphi_1(\mathbf{r})], \quad (5.3.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1^{(1)} \mathbf{i} + \varphi_1^{(-1)} \mathbf{j} + \varphi_1 \mathbf{k}; \\ \Omega &= \sin \vartheta \cos \psi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

Очевидно, имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega); \\ \bar{\varphi}_1(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4)$$

Функцию  $\frac{1}{2}g(\mu_0)$  разложим в ряд по полиномам Лежандра и ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\frac{1}{2}g(\mu_0) = \frac{1}{2}(1 + 3\mu_0 \bar{\mu}_0), \quad (5.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) d\mu_0 &= 1; \\ \bar{\mu}_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) \mu_0 d\mu_0. \end{aligned}$$

Подставим соотношения (5.3.2) и (5.3.5) в уравнение (5.3.1) и проинтегрируем его по  $\Omega$ . Тогда получим

$$\nabla \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0, \quad (5.3.6)$$

где

$$f_0(\mathbf{r}) = \int d\Omega f(\mathbf{r}, \Omega); \quad \Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s.$$

Для получения второго уравнения подставим соотношения (5.3.2) и (5.3.5) в уравнение (5.3.1), результат скалярно умножим на  $\Omega$  и проинтегрируем по всем телесным углам единичной сферы. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \bar{\varphi}_1 = f_1, \quad (5.3.7)$$

где

$$f_1 = \int d\Omega \Omega f(\mathbf{r}, \Omega); \quad \Sigma_1 + \Sigma - \Sigma_s \mu_0.$$

При выводе уравнений (5.3.6) и (5.3.7) были использованы следующие легко проверяемые соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \int d\Omega &= 4\pi, \quad \int d\Omega \Omega = 0, \\ \int d\Omega \Omega \nabla(\Omega \varphi_1) &= \frac{4}{3} \pi \nabla \varphi_1, \quad \int d\Omega \Omega(\Omega \Omega') = \frac{4}{3} \pi \Omega'. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

Итак, мы приходим к системе уравнений переноса излучения в  $P_1$ -приближении для областей произвольной геометрии:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \bar{\varphi}_1 + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0, \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \bar{\varphi}_1 &= f_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.9)$$

Для одномерных плоскостей, сферической и цилиндрической геометрий система уравнений (5.3.9) может быть несколько упрощена с учетом использования симметрии. Так, поместив начало системы координат в центр симметрии, мы от векторной функции  $\bar{\varphi}_1$  можем перейти к скалярной  $\varphi_1$  с учетом равенства

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ .

В этом случае система уравнений (5.3.9) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi_1 \mathbf{n}) + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0, \\ \frac{1}{3} \operatorname{grad}_{\mathbf{n}} \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 &= f_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.10)$$

Нетрудно показать, что система уравнений (5.3.10) для плоскопараллельной сферической и одномерной цилиндрической геометрий совпадает с соответствующими уравнениями, полученными из общих систем уравнений сферических гармоник (5.1.7), (5.1.21) и (5.2.13), (5.2.14) в  $P_1$ -приближении.

Для полной определенности системы уравнений (5.3.9) к ней необходимо присоединить граничные условия на поверхности  $S$ . При этом будем исходить из точного граничного условия для кинетического уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (5.3.11)$$



Для получения приближенных граничных условий, точное условие (5.3.11) заменим следующим:

$$\int d\Omega |\Omega_n| \varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.3.12)$$

где интегрирование ведется по единичной полусфере, образованной концами вектора  $\Omega$  внутрь области  $G$ , ограниченной касательной плоскостью к выпуклой поверхности  $S$ . Соотношение (5.3.12) указывает на тот факт, что односторонний интегральный поток нейтронов через поверхность  $S$  со стороны вакуума в область  $G$  равен нулю.

Будем предполагать, что ось  $z$  совмещена с направлением внешней нормали к поверхности  $S$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Тогда условие (5.3.12) запишется следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(r, \Omega) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.3.13)$$

В соотношение (5.3.13) подставим  $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$ , определенное формулой (5.3.2), и произведем интегрирование. В результате получим

$$2(\bar{\varphi}_1)_n - \varphi_0 = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.3.14)$$

где  $(\bar{\varphi}_1)_n$  — проекция вектора  $\bar{\varphi}_1$  на внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$ .

Для одномерных геометрий соотношение (5.3.14) приобретает простой вид:

$$2\varphi_1 - \varphi_0 = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.3.15)$$

Соотношения (5.3.14) и (5.3.15) будут требуемыми граничными условиями для системы уравнений (5.3.9) на внешней границе  $S$ .

Рассмотрим теперь тот случай, когда источники нейтронов изотропны, то есть

$$f(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} f_0(\mathbf{r}). \quad (5.3.16)$$

Тогда в  $P_1$ -приближении приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \bar{\varphi}_1 + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0, \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.17)$$

Разрешив второе уравнение системы (5.3.17) относительно функции  $\varphi_1$ , получим

$$\bar{\varphi}_1 = -D\nabla\varphi_0, \quad (5.3.18)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, равный

$$D = \frac{1}{3\Sigma_1}.$$

Подставив выражение (5.3.18) в первое из уравнений (5.3.17), приходим к следующему уравнению диффузии:

$$\nabla D\nabla\varphi_0 - \Sigma_c\varphi_0 = -f_0, \quad (5.3.19)$$

где  $\Sigma_c = \Sigma_0$ .

Граничные условия для функции  $\varphi_0$  найдены с помощью соотношения (5.3.15). Подставив в это соотношение  $\bar{\varphi}_1$  в виде (5.3.17), получим

$$2D(\nabla\varphi_0)_n - \varphi_0 = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.3.20)$$

Решение задачи (5.3.19), (5.3.20) ищется в классе функций  $\{\varphi_0\}$ , непрерывных вместе с потоком  $\bar{\varphi}_1 = -D\nabla\varphi_0$  и имеющих кусочно-гладкие производные от потока.

Задачу (5.3.19), (5.3.20) будем называть диффузионным приближением. Очевидно, что диффузионное приближение совпадает с  $P_1$ -приближением в том случае, когда имеет место строгое равенство

$$\bar{\varphi}_1 = 0.$$

Если  $\bar{\varphi}_1 \neq 0$ , то диффузионное приближение будет являться более грубым приближением, чем  $P_1$ .

Переходим теперь к решению уравнений диффузии для простейших случаев.

Предположим, что мы имеем дело с однородной и бесконечной средой. Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$L^2\nabla^2\varphi_0 - \varphi_0 = -\frac{f_0(r)}{\Sigma_c}, \quad (5.3.21)$$

где

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_c}. \quad (5.3.22)$$

Если источником излучения  $f_0(r)$  является изотропный точечный источник, помещенный в точку с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ , то уравнение (5.3.21) переходит в следующее:

$$L^2 \nabla^2 G - G = -\frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi \Sigma_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (5.3.23)$$

В результате решения уравнения (5.3.23) нетрудно получить

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}}}{4\pi L^2 \Sigma_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.3.24)$$

Решение (5.3.24) нормировано следующим образом:

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 \Sigma_c G(r) dr = 1.$$

Очевидно, что решение соответствующей задачи в случае плоского и линейного источника можно получить непосредственным интегрированием решения (5.3.24). Так, для плоского источника будем иметь

$$G(|z - z'|) = \int_{-\infty}^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty dy' \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}}}{4\pi L^2 \Sigma_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.3.25)$$

где

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Произведя интегрирование, получим

$$G(|z - z'|) = \frac{e^{-\frac{|z - z'|}{L}}}{2L \Sigma_c}. \quad (5.3.26)$$

Функция  $G(z)$  нормирована следующим образом:

$$\int_{-\infty}^\infty dz' \frac{e^{-\frac{|z'|}{L}}}{2L} = 1.$$

Наконец, интегрируя выражение (5.3.24) по  $z' -\infty < z < \infty$ , приходим к выражению в случае линейного источника

$$G(\varrho) = \frac{K_0\left(\frac{\varrho}{L}\right)}{2\pi L^2 \Sigma_c}, \quad (5.3.27)$$

где  $\varrho$  — расстояние от источника.

Функция  $G(\varrho)$  нормирована на единицу:

$$\int_0^\infty \frac{K_0\left(\frac{\varrho}{L}\right)}{2\pi L^2} 2\pi \varrho d\varrho = 1.$$

После того как решения задач от изотропных источников для различных геометрий найдены, можно найти решение более общего уравнения диффузии (5.3.21) в случае распределенных источников.

Очевидно, в этом случае решения задач о точечном источнике можно считать функциями Грина соответствующих неоднородных задач. Это значит, что решение уравнения (5.3.21) найдется простым интегрированием, то есть

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) Q(\mathbf{r}'), \quad (5.3.28)$$

где интегрирование производится по всему пространству. Если

$$Q(\mathbf{r}) = q(z),$$

то приходим к решению задачи для плоского изотропного источника:

$$\varphi_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' G(|z - z'|) q(z'). \quad (5.3.29)$$

Если же

$$Q(\mathbf{r}) = q(\varrho), \quad \varrho^2 = x^2 + y^2,$$

то

$$\varphi_0(\varrho) = \int_0^\infty \varrho d\varrho G(\varrho) q(\varrho).$$

## 5.4. $P_2$ -приближение

При решении задач на перенос нейтронов обычно использовали нечетные приближения метода сферических гармоник  $P_1, P_3, P_5, P_7$  и т.д. Г. Я. Румянцев впервые указал на целесообразность использования при решении ядерно-физических задач четных приближений [317, 318] метода сферических гармоник.

В настоящем параграфе будут получены основные уравнения в  $P_2$ -приближении [315, 138].

Начнем рассмотрение с наиболее простого случая — задач для плоскопараллельных областей. Для этого воспользуемся системой дифференциальных уравнений (5.1.6). Тогда система уравнений сферических гармоник в  $P_2$ -приближении принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{d\varphi_0}{dz} + 2\frac{d\varphi_2}{dz} + 3\Sigma_1 \varphi_1 &= 3f_1; \\ 2\frac{d\varphi_1}{dz} + 5\Sigma_2 \varphi_2 &= 5f_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

Из последнего уравнения системы (5.4.1) находим

$$\varphi_2 = -\frac{2}{5\Sigma_2} \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{1}{\Sigma_2} f_2. \quad (5.4.2)$$

Исключая из равенства (5.4.2) производную  $\frac{d\varphi_1}{dz}$  с помощью первого уравнения системы (5.4.1), будем иметь

$$\varphi_2 = \frac{2}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \varphi_0 - \frac{2}{5} \frac{f_0}{5\Sigma_2} + \frac{f_2}{\Sigma_2}. \quad (5.4.3)$$

Полученное выражение подставим во второе уравнение системы (5.4.1). В результате приходим к следующей системе уравнений, эквивалентной (5.4.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{d}{dz} \left[ \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \varphi_0 - \frac{4}{5} \frac{f_0}{\Sigma_2} + 2 \frac{f_2}{\Sigma_2} \right] + 3\Sigma_1 \varphi_1 &= 3f_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

Систему уравнений (5.4.4) удобно представить в виде трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0}{dz} + \Sigma_1 \varphi_1 &= f_1; \\ \Phi_0 &= \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \varphi_0 + \frac{2}{5\Sigma_2} (5f_2 - 2f_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

Требуется найти решение системы уравнений (5.4.5) в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Потребуем, чтобы функции  $\varphi_1$  и  $\Phi_0$  были непрерывными во всех точках области  $G$ <sup>1)</sup>. Функция  $\varphi_0$ , разумеется, не будет непрерывной во всей области. Она будет иметь разрывы первого рода в точках области, где имеют место разрывы функций

$$\Sigma_0, \Sigma_2, f_0 \text{ и } f_2.$$

К системе уравнений (5.4.5) присоединим граничные условия, которые получим из требования, чтобы односторонний поток нейтронов из вакуума в область  $G$  равнялся нулю, то есть

$$J^- = \int_{-1}^0 \mu \varphi(z, \mu) d\mu = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.4.6)$$

В соответствии с идеей  $P_2$ -приближения поток нейтронов  $\varphi(z, \mu)$  представим в следующем виде:

$$\varphi(z, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi_0 + 3\varphi_1 P_1(\mu) + 5\varphi_2 P_2(\mu)]. \quad (5.4.7)$$

Подставим выражение (5.4.7) в соотношение (5.4.6). Тогда получим

$$J^- = \frac{1}{4} \left( -\varphi_0 + 2\varphi_1 - \frac{5}{4} \varphi_2 \right). \quad (5.4.8)$$

С учетом равенства (5.4.3) будем иметь

$$J^- = \frac{1}{4} \left[ - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \varphi_0 + 2\varphi_1 + \frac{1}{2\Sigma_2} \left( f_0 - \frac{5}{2} f_2 \right) \right]. \quad (5.4.9)$$

Приравнявая к нулю выражение  $J^-$ , приходим к граничному условию на поверхности  $S$ :

$$\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \varphi_0 - 2\varphi_1 = \frac{1}{2\Sigma_2} \left( f_0 - \frac{5}{2} f_2 \right). \quad (5.4.10)$$

Легко видеть, что система уравнений (5.4.5) вместе с граничным условием (5.4.10) переходит в систему уравнений (5.3.9) и граничные условия (5.3.15) при  $\Sigma_2 = \infty$ .

<sup>1)</sup>Из требования непрерывности функции  $\Phi_0$  следует, что функция  $\varphi_0$  на границе раздела зон разрывна. Это сближает алгоритм решения кинетического уравнения в  $P_2$ -приближении с известным методом Ю.А. Романова [315], с помощью которого диффузионная теория уточняется соответствующей постановкой граничных условий.

До сих пор наши рассмотрения в рамках  $P_2$ -приближения были точными. При переходе к другим геометриям мы сделаем предположения, которые позволят получить систему уравнений в наиболее простом виде.

В самом деле, введем в рассмотрение систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla \bar{\varphi}_1 + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_1 \bar{\varphi}_1 &= f_1; \\ \Phi_0 &= \left(1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}\right) \varphi_0 + \frac{2}{5 \Sigma_2} (5f_2 - 2f_0) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.11)$$

с граничными условиями на внешней поверхности  $S$ :

$$\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}\right) \varphi_0 - 2(\bar{\varphi}_1)_n = \frac{1}{2 \Sigma_2} \left(f_0 - \frac{5}{2} f_2\right). \quad (5.4.12)$$

Система уравнений (5.4.11) является  $P_2$ -приближением к кинетическому уравнению, строго говоря, только для случая плоскопараллельной геометрии. Для случая сферической и одномерной цилиндрической геометрий, а также для двумерных областей система (5.4.11) не является точной в смысле  $P_2$ -приближения, а есть лишь некоторая эффективная модель.

В дальнейшем будет показано, что во всех случаях эффективная схема существенно уточняет решение задачи в  $P_1$ -приближении. Можно сказать, что, исключая точки, непосредственно примыкающие к границам раздела на расстоянии  $\sim l$ , решение задачи (5.4.11), (5.4.12) приводит к результатам, мало отличающимся от результатов в  $P_3$ -приближении. В особенности это относится к решению задачи на значительных расстояниях от источника, где диффузионная теория и  $P_1$ -приближение оказываются неточными.

Важно отметить, что эффективная система уравнений (5.4.12) является балансной, то есть имеет место следующее равенство для всей области  $G$ :

$$\int_G \Sigma_0 \varphi_0 d\mathbf{r} + \int_S (\bar{\varphi}_1)_n dS = \int_G f_0 d\mathbf{r}. \quad (5.4.13)$$

В заключение обратим внимание на тот факт, что если в качестве неизвестных функций в системе уравнений (5.4.11)

и граничном условии принять  $\Phi_0$  и  $\bar{\varphi}_1$ , то придем к следующей задаче:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \Phi_1 + \alpha \Sigma_0 \Phi_0 &= \alpha F_0; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_1 \Phi_1 &= F_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left(1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}\right) \varphi_0 + \frac{2}{5 \Sigma_2} (5f_2 - 2f_0); \\ \Phi_1 &= \bar{\varphi}_1; \\ F_0 &= f_0 + 2 \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} f_2; \\ F_1 &= f_1; \\ \alpha &= \frac{1}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.15)$$

Аналогичным образом граничное условие примет вид

$$\kappa \Phi_0 - 2\Phi_1 \mathbf{n} = -g, \quad (5.4.16)$$

где

$$g = \frac{\alpha}{\Sigma_2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \kappa \right) f_0 - \left( \frac{5}{4} - \frac{2}{5} \kappa \right) f_2 \right];$$

$$\kappa = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2}}.$$

В большинстве случаев величина  $g$  мала, так что без больших погрешностей можно положить  $g = 0$ . Тогда будем иметь простейшее граничное условие

$$\kappa \Phi_0 - 2\Phi_1 \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.4.16')$$

После того как решение задачи (5.4.14) и (5.4.16) найдено, глобальный поток нейтронов можно определить по формуле

$$\varphi_0 = \alpha \left[ \Phi_0 - \frac{2}{5 \Sigma_2} (5f_2 - 2f_0) \right]. \quad (5.4.17)$$

Таким образом, формально алгоритм решения задачи в рамках эффективной схемы совпадает с алгоритмом решения в  $P_1$ -приближении. Этим обстоятельством мы будем пользоваться при разработке численных схем расчета, сосредоточив внимание только на подробном рассмотрении решения задачи в  $P_1$ -приближении.



Рассмотрим случай изотропного источника нейтронов в бесконечной однородной среде. В этом случае система уравнений (5.4.14) принимает вид

$$\frac{L^2}{\alpha} \nabla^2 \Phi_0 - \Phi_0 = -Q(\mathbf{r}), \quad (5.4.18)$$

где

$$L^2 = \frac{1}{3\Sigma_0\Sigma_1}; \quad Q(\mathbf{r}) = \frac{F_0(\mathbf{r})}{\Sigma_0} = \frac{f_0}{\Sigma_0}.$$

Если источник точечный, то

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi\Sigma_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2},$$

и, следовательно, решение уравнения (5.4.18) имеет вид

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{4\pi L^2 \Sigma_0} \frac{e^{-\sqrt{\alpha} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.4.19)$$

Переходя от функции  $\Phi_0(\mathbf{r})$  к  $\varphi_0(\mathbf{r})$  по формуле (5.4.17), будем иметь

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{4}{5} \frac{\alpha}{\Sigma_0 \Sigma_2} - \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\alpha^2}{L^2 \Sigma_0} \frac{e^{-\sqrt{\alpha} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.4.20)$$

Анализ решения (5.4.20) показывает, что оно имеет три первые четные момента, совпадающие с точными моментами кинетического уравнения.

Обратим внимание на следующее обстоятельство, а именно: если

$$\frac{\Sigma_c}{\Sigma} \ll 1,$$

то второй член в решении (5.4.20) совпадает с асимптотическим решением (2.1.18). В самом деле, в этом случае

$$\frac{\alpha^2}{\Sigma_c} \frac{\Sigma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \Sigma \Sigma_c} \approx \frac{\alpha}{2L^2} \quad \text{и} \quad \alpha \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{L}.$$

Таким образом, высказанное утверждение доказано. Это значит, что решение задачи о точечном источнике в бесконечной среде в  $P_2$ -приближении в случае слабого поглощения совпадает с асимптотической частью решения кинетического уравнения. А условие баланса нейтронов достигается тем, что в начале координат к асимптотическому решению добавляется точечный источник соответствующей интенсивности.

## 5.5. Вариационный принцип и метод сферических гармоник

Известно, что в методе сферических гармоник имеется некоторый произвол в выборе граничных условий. Р. Маршак предложил рассматривать граничные условия вида (5.1.9). На основе эмпирического анализа было установлено, что такие граничные условия — наилучшие. Однако только В. В. Владимирову, на основе сформулированного им вариационного принципа, удалось строго обосновать граничные условия Маршака (см. [71]). В настоящем параграфе изложены результаты В. С. Владимирова [71].

Так же, как и при рассмотрении вариационного принципа, будем исходить из следующей задачи:

$$\frac{1}{\alpha(r)} \Omega \nabla \varphi + \varphi = \frac{\lambda}{4\pi} h(\mathbf{r}) \int \varphi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + F(\mathbf{r}, \Omega), \quad (5.5.1)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (5.5.2)$$

Ради простоты ограничимся рассмотрением только плоско-параллельной задачи. В этом случае эквивалентная самосопряженная задача имеет вид

$$\left( \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u + u = \lambda h(z) \int_0^1 u(z, \mu') d\mu' + F(z, \mu), \quad (5.5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{du}{dz} \Big|_{z=a} &= 0; \\ u - \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{du}{dz} \Big|_{z=-a} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.4)$$

причем связь функций  $u$  и  $\varphi$  осуществляется с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} u(z, \mu) &= \frac{1}{2} [\varphi(z, \mu) + \varphi(z, -\mu)]; \\ \frac{\mu}{\alpha(z)} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} [\varphi(z, \mu) - \varphi(z, -\mu)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.5)$$

Пусть функция  $\varphi(z, \mu)$  ищется в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\varphi(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) \varphi_k(z) P_k(\mu). \quad (5.5.6)$$

Из формулы (5.5.6) и (5.5.5) следует, что решение эквивалентной задачи ищется в виде

$$u(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) \varphi_{2k} P_{2k}(\mu), \quad (5.5.7)$$

при этом

$$-\mu \frac{\partial u(z, \mu)}{\partial z} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (4k+3) \varphi_{2k+1} P_{2k+1}(\mu). \quad (5.5.8)$$

Подставив ряд (5.5.7) в левую часть соотношения (5.5.8), получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} (4k+3) \varphi_{2k+1}(z) P_{2k+1}(\mu) + \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) \varphi'_{2k}(z) \mu P_{2k}(\mu) = 0. \quad (5.5.9)$$

Принимая во внимание соотношение (5.1.5), устанавливаем, что равенство (5.5.9) эквивалентно равенствам

$$\frac{2k+1}{4k+3} \varphi'_{2k}(z) + \frac{2k+2}{4k+3} \varphi'_{2k+2}(z) + \varphi_{2k+1}(z) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (5.5.10)$$

Для того чтобы получить четные уравнения и граничные условия, потребуем, чтобы функция (5.5.7) сообщила минимум функционалу  $P(u)$  [соответственно  $H(u)$ ].

Пусть  $v(z, \mu)$  такая функция:

$$v(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) \varepsilon_{2k} v_{2k}(z) P_{2k}(\mu), \quad (5.5.11)$$

где  $\varepsilon_{2k}$  — произвольные числа и  $v_{2k}(z)$  — произвольные дифференцируемые функции. Тогда наше требование сводится к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{2k}} P \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) [\varphi_{2k}(z) + \varepsilon_{2k} v(z)] P_{2k}(\mu) \right\} \Big|_{\varepsilon_{2k}=0}, \quad (5.5.12)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

откуда в силу определения  $(L_0 u, u)$ ,  $(Su, u)$  и  $(u, F)$ , получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{-a}^a dz \int_{-1}^1 d\mu \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) P_{2k}(\mu) P_{2i}(\mu) [\varphi_{2k}(z) v_{2i}(z) + \mu^2 \varphi'_{2k}(z) v'_{2i}(z)] \right\} + \\
 & + \int_0^1 \mu d\mu \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) P_{2k}(\mu) P_{2i}(\mu) [\varphi_{2k}(a) v_{2k}(a) + \right. \\
 & \left. + \varphi_{2k}(-a) v_{2k}(-a)] \right\} - \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^a dz \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 d\mu' h(z) \times \\
 & \times \left[ \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) P_{2k}(\mu) \varphi_{2k}(z) P_{2i}(\mu) v_{2i}(z) \right] - \\
 & - \int_{-a}^a dz \int_{-1}^1 d\mu F(z, \mu) P_{2i}(\mu) v_{2i}(z) = 0. \quad (5.5.13)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (5.5.9), получим далее

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (4k+3) \int_{-a}^a dz \varphi_{2k+1}(t) v'_{2i}(z) \int_{-1}^1 \mu P_{2k+1}(\mu) P_{2i}(\mu) d\mu - \\
 & - v_{2i}(a) \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) \varphi_{2k}(a) \int_0^1 \mu P_{2k}(\mu) P_{2i}(\mu) d\mu + \\
 & + v_{2i}(-a) \sum_{k=0}^{m-1} (4k+1) \varphi_{2k}(-a) \int_0^1 \mu P_{2k}(\mu) P_{2i}(\mu) d\mu + \\
 & + \int_{-a}^a \{ \varphi_0(z) - \lambda h(z) \varphi_0(z) - f_0(z) \} v_{2i}(z) dz + \\
 & + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-a}^a \{ \varphi_{2k}(z) - f_{2k}(z) \} v_{2i}(z) dz = 0, \quad (5.5.14)
 \end{aligned}$$

где

$$f_{2k} = \int_{-1}^1 F(z, \mu) P_{2k}(\mu) d\mu.$$

Интегрируя по частям и пользуясь соотношением (5.1.5) и произвольностью функций  $v_{2i}(z)$ , получаем четные уравнения

$$\frac{2k}{4k+1}\varphi'_{2k-1}(z) + \frac{2k+1}{4k+1}\varphi'_{2k+1}(z) + \varphi_{2i}(z) = \lambda h(z)\delta_{0i}\varphi_0 + f_{2k}(z) \quad (5.5.15)$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m+1} (2k+1)\varphi_k(a) \int_{-1}^0 \mu P_k(\mu) P_{2i}(\mu) d\mu &= 0; \\ \sum_{k=0}^{2m+1} (2k+1)\varphi_k(-a) \int_{-1}^0 \mu P_k(\mu) P_{2i}(\mu) d\mu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.16)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Ввиду того, что

$$\varphi(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} (2k+1)\varphi_k(z)P_k(\mu),$$

граничные условия (5.5.16) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^0 \varphi(a, \mu) \mu P_{2i}(\mu) d\mu &= 0; \\ \int_{-1}^0 \varphi(-a, \mu) \mu P_{2i}(\mu) d\mu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.17)$$

$$(i = 0, 1, \dots, m-1).$$

С помощью линейного преобразования формулы (5.5.17) окончательно можно привести к эквивалентным формулам вида

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^0 \varphi(a, \mu) \mu^{2i+1} d\mu &= 0; \\ \int_{-1}^0 \varphi(-a, \mu) \mu^{2i+1} d\mu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.18)$$

$$(i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Таким образом, с помощью вариационного принципа мы пришли к уравнениям сферических гармоник и граничным условиям.

Аналогичные рассмотрения можно проделать и для других задач. В частности, эти результаты могут быть применены и к задачам в диффузионном приближении.

Необходимо иметь в виду, что граничные условия Маршака можно считать обоснованными только в тех случаях, когда применим вариационный принцип (см. § 3.5).

# 6

## Конечно-разностные уравнения для одномерных областей

### 6.1. Общий метод построения конечно-разностных уравнений диффузии для одномерной геометрии

Точное решение дифференциальных уравнений эллиптического типа даже в случае простых областей связано с большими вычислительными трудностями. Поэтому появляется необходимость в использовании для решения задач различных приближенных методов.

Наиболее удобный из них метод конечных разностей, сущность которого состоит в замене дифференциального оператора конечно-разностным. В результате задача, сформулированная в терминах дифференциальных операторов, сводится к простейшей задаче линейной алгебры.

Известно, что аппроксимацию дифференциального уравнения конечно-разностным можно осуществить различными методами. Мы будем следовать наиболее эффективному из них, а именно методу «непрерывного» счета, который для уравнений диффузии был предложен А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским [353–356]. Этот метод позволяет в простой и единообразной форме получать различные уравнения, соответствующие широкому классу дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами.

В настоящей главе рассмотрен метод построения разностных уравнений диффузии для одномерных областей.

Рассмотрим уравнение диффузии для одномерных областей.

Оно имеет вид

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} - \Sigma \varphi = -f(r), \quad (6.1.1)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{— для плоской геометрии,} \\ 1 & \text{— для цилиндрической геометрии,} \\ 2 & \text{— для сферической геометрии;} \end{cases}$$

$D$  — коэффициент диффузии;  $\Sigma$  — макроскопическое сечение захвата.

Будем считать, что функции  $D, \Sigma$  и  $f$  — кусочно-непрерывные в объеме реактора с возможными точками разрыва первого рода.

Требуется найти непрерывное решение уравнения (6.1.1), обладающее непрерывной функцией

$$J = -r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} \quad (6.1.2)$$

и удовлетворяющее определенным граничным условиям.

На интервал изменения переменной  $r$  нанесем две системы узловых точек: основную —  $r_k$  и вспомогательную —  $r_{k+1/2}$ . Точки этих двух систем взаимно чередуются, то есть

$$r_k < r_{k+1/2} < r_{k+1}.$$

Более подробные сведения о взаимном расположении точек  $r_k$  и  $r_{k+1/2}$  даны ниже.

Уравнение (6.1.1) помножим на  $r^\alpha$  и проинтегрируем по  $r$  в пределах  $r_{k-1/2} < r < r_{k+1/2}$ . В результате получим соотношение

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma \varphi - f) r^\alpha dr = 0, \quad (6.1.3)$$

где

$$J_{k\pm 1/2} = J(r_{k\pm 1/2}).$$

Для нахождения функции  $J_{k\pm 1/2}$  поступим следующим образом. Уравнение (6.1.1) проинтегрируем в пределах  $(r_{k-1/2}, r)$ . Тогда получим

$$r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = -J_{k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma \varphi - f) r^\alpha dr. \quad (6.1.4)$$



Выражение (6.1.4) поделим на  $r^\alpha D$  и проинтегрируем в пределах  $(r_{k-1}, r_k)$ . В результате будем иметь

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = -J_{k-1/2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} + \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma\varphi - f)r^\alpha dr. \quad (6.1.5)$$

Разрешая уравнение (6.1.5) относительно  $J_{k-1/2}$  приходим к следующему соотношению

$$J_{k-1/2} = \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \left[ \varphi_k - \varphi_{k-1} - \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma\varphi - f)r^\alpha dr \right]. \quad (6.1.6)$$

Таким образом, нам удалось функцию  $J_{k\pm 1/2}$  выразить через известные функции, а также искомое решение задачи. Соотношение (6.1.6) точное. Подставим теперь соотношение (6.1.6) в равенство (6.1.3). Тогда приходим к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma\varphi - f)r^\alpha dr - \\ & - \frac{1}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k+1/2}}^r (\Sigma\varphi - f)r^\alpha dr + \\ & + \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma\varphi - f)r^\alpha dr = 0. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Равенство (6.1.7) будет основным для получения конечно-разностных уравнений диффузии.

Рассмотрим два частных случая. Сначала предположим, что величины  $\Sigma$  и  $f$  равны нулю. В этом случае уравнение (6.1.1) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (6.1.8)$$

Соответствующее ему разностное уравнение получим с помощью соотношения (6.1.7). Оно имеет вид

$$\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} = 0. \quad (6.1.9)$$

Очевидно, разностное уравнение (6.1.9) доставляет точное решение уравнения (6.1.8) в узлах  $r_i$  выбранной сетки. На этот факт впервые обратил внимание А. А. Самарский [356].

Предположим теперь, что функция  $f$  отлична от нуля. Оказывается, в этом случае также можно найти точное решение уравнения

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = -f(r) \quad (6.1.10)$$

во всех узлах сетки с помощью соответствующего конечно-разностного уравнения

$$\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} + F_k = 0, \quad (6.1.11)$$

где

$$F_k = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + \frac{1}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k+1/2}}^r f r^\alpha dr - \\ - \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r f r^\alpha dr. \quad (6.1.12)$$

В сущности этими двумя случаями и ограничиваются возможности получения точных конечно-разностных уравнений. Дальнейшая задача заключается в получении разностных схем заданной точности.

## 6.2. Точность конечно-разностных схем в классе непрерывных функций

Рассмотрим линейное уравнение

$$L\varphi = -f. \quad (6.2.1)$$

Поставим ему в соответствие разностное уравнение

$$L_h\varphi_k^h = -f_k^h, \quad (6.2.2)$$

где  $h$  — характерный шаг сетки, а  $k$  — номер узла.

Будем говорить, что решение конечно-разностного уравнения имеет  $n$ -й интегральный порядок точности относительно решения уравнения (6.2.1), если во всех точках разностной сетки (см. [354])

$$|\varphi_k - \varphi_k^h| < Mh^n, \quad (6.2.3)$$

где  $M$  — положительная константа.

Очевидно, что вопрос о точности аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностным тесно связан с вопросом о точности решения конечно-разностного уравнения и сходимости его к точному решению задачи.

При суждении о точности аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностным в первую очередь необходимо задать классы функций  $D, \Sigma$  и  $f$ . Дифференциальные свойства классов этих функций определяют класс функций, в которых ищется само решение задачи.

Для того чтобы пояснить сказанное, рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = -f(r). \quad (6.2.4)$$

Как было показано выше, точным конечно-разностным аналогом этого уравнения является

$$\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} = -F_k, \quad (6.2.5)$$

где

$$F_k = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + \frac{1}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k+1/2}}^r f r^\alpha dr - \\ - \frac{1}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r f r^\alpha dr. \quad (6.2.6)$$

Рассмотрим теперь конечно-разностное уравнение

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr = 0. \quad (6.2.7)$$

Установим точность аппроксимации дифференциального уравнения (6.2.5) конечно-разностным (6.2.7).

Предположим, что функции  $f$  и  $D$  непрерывны вместе со своими производными первого порядка и кусочно-непрерывными производными второго порядка.

Пусть

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr. \quad (6.2.8)$$

Обозначим разность

$$\Delta_k = F_k - F_k^h.$$

Рассмотрим выражение

$$B_k = \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r f r^\alpha dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}}. \quad (6.2.9)$$

В выражении (6.2.9) разложим функцию  $r^\alpha f$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $r_{k-1/2}$ . Тогда получим

$$r^\alpha f = r_{k-1/2}^\alpha f_{k-1/2} + (r^\alpha f)'_{k-1/2} (r - r_{k-1/2}) + \frac{1}{2} (r^\alpha f)''_{k-1/2} (r - r_{k-1/2})^2 + \dots$$

Аналогично

$$\frac{1}{r^\alpha D} = \frac{1}{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}} + \left( \frac{1}{r^\alpha D} \right)'_{k-1/2} (r - r_{k-1/2}) + \dots$$

Подставляя эти разложения в (6.2.9) и полагая  $\Delta r_k = \Delta r_{k-1/2} = \Delta r$ , нетрудно получить

$$B_k = A_{k-1/2} \frac{\Delta r^2}{24} + \dots, \quad (6.2.10)$$

где

$$A_{k-1/2} = \frac{1}{2} (r^\alpha f)_{k-1/2} - r_{k-1/2}^\alpha f_{k-1/2} (\ln r^\alpha D)'_{k-1/2}.$$

Составим разность

$$B_{k+1} - B_k = (A_{k+1/2} - A_{k-1/2}) \frac{\Delta r^2}{24} + \dots$$

Ввиду отмеченных выше дифференциальных свойств функций  $f$  и  $D$  можно показать, что

$$B_{k+1} - B_k = M \Delta r^3 + \dots, \quad (6.2.11)$$

где

$$M = \frac{1}{2} (r^\alpha f)''_k - [r^\alpha f (\ln r^\alpha D)']'_k.$$

Равенство (6.2.6) перепишем в виде

$$F_k = F_k^h + B_{k+1} - B_k.$$

С точностью до величин третьего порядка малости получим

$$F_k = F_k^h [1 + M_k \Delta r^2 + O(\Delta r^3)]. \quad (6.2.12)$$

Принимая во внимание соотношение (6.2.12), нетрудно получить оценку решения конечно-разностного уравнения по отношению к точному. В самом деле, рассмотрим две конечно-разностные схемы, в одной из которых правой частью является величина

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr, \quad (6.2.13)$$

а в другой

$$F_k^h = (1 + M \Delta r^2). \quad (6.2.14)$$

В соответствии с этим будем говорить, что конечно-разностная схема имеет второй локальный порядок аппроксимации.

Представляет интерес рассмотреть разностное уравнение, несколько отличное от (6.2.7), а именно:

$$\frac{r_{k+1/2}^\alpha D_{k+1/2}}{\Delta r_{k+1/2}} (\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \frac{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}}{\Delta r_{k-1/2}} (\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) + f_k r_k^\alpha \Delta r_k = 0. \quad (6.2.15)$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} L_k \varphi &= \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}}; \\ L_k^h \varphi &= \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\frac{\Delta r}{(r^\alpha D)_{k+1/2}}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\frac{\Delta r}{(r^\alpha D)_{k-1/2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.16)$$

Тогда точное уравнение (6.2.5) можно записать в виде

$$L_k \varphi + F_k = 0. \quad (6.2.17)$$

а приближенное (6.2.15) —

$$L_k^h \varphi^h + F_k^h = 0, \quad (6.2.18)$$

где

$$F_k^h = f_k \Delta r r_k^\alpha.$$

Вычитая из (6.2.17) равенство (6.2.18), получаем

$$L_k \varphi - L_k^h \varphi^h + F_k - F_k^h = 0, \quad (6.2.19)$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D} = \frac{\Delta r}{r_{k+1/2}^\alpha D_{k+1/2}} + O(\Delta r^3),$$

получаем

$$L_k \varphi = L_k^h \varphi + O(\Delta r^3).$$

Составим разность

$$F_k - F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr - f_k r_k^\alpha \Delta r - B_{k+1} + B_k.$$

Если теперь воспользоваться разложением функции  $r^\alpha f(r)$  в ряд Тейлора

$$r^\alpha f(r) = r_k^\alpha f_k + \frac{dr^\alpha f}{dr} \Big|_k (r - r_k) + \frac{1}{2} \frac{d^2 r^\alpha f}{dr^2} \Big|_k (r - r_k)^2 + \dots$$

и учесть соотношение (6.2.11), то нетрудно получить

$$L_k^h(\varphi - \varphi^h) = O(\Delta r^3). \quad (6.2.20)$$

Ввиду того что

$$L_k^h \varphi = O(\Delta r)$$

и

$$L_k^h \varphi^h = O(\Delta r),$$

то на основании соотношения (6.2.20) приходим к выводу, что

$$\varphi_k = \varphi_k^h [1 + O(\Delta r^2)]. \quad (6.2.21)$$

А это значит, что разностная схема (6.2.15) также имеет второй интегральный порядок точности.

Переходим к рассмотрению уравнения диффузии

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = \Sigma \varphi - f. \quad (6.2.22)$$

Предположим, что решение уравнения (6.2.22) — функция  $\varphi$  и функции  $f, D$  и  $\Sigma$  принадлежат классу функций, непрерывных на интервале  $(0, l)$  вместе с производными первого порядка и ограниченными производными второго порядка.

Очевидно, что при указанных предположениях правая часть уравнения (6.2.22) формально играет роль функции  $f(r)$  простейшего уравнения (6.2.4), а это значит, что для оценок точности конечно-разностных схем можно воспользоваться ранее полученными результатами. Так, например, можно показать, что разностное уравнение

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \Sigma r^\alpha dr \varphi_k = - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f(r) r^\alpha dr \quad (6.2.23)$$

имеет второй локальный порядок аппроксимации при

$$\Delta r_k = \Delta r_{k\pm 1/2} = \Delta r.$$

Такой же вывод может быть сделан относительно разностного уравнения

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.2.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}}{\Delta r}; \\ p_k &= \Sigma_k r_k^\alpha \Delta r; \\ F_k^h &= f_k r_k^\alpha \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.25)$$

### 6.3. Конечно-разностные уравнения в классе разрывных функций

Рассмотрим простейшее уравнение (6.2.4). Пусть  $f$  и  $D$  принадлежат классу функций, кусочно-непрерывных на интервале  $(0, l)$  вместе с кусочно-непрерывными производными вплоть до второго порядка. Относительно решения задачи —  $\varphi(r)$  будем предполагать, что оно принадлежит классу непрерывных функций на интервале  $(0, l)$ , обладающих непрерывной функцией потока

$$J = -r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr}$$

и имеющих ограниченную производную от потока.

Будем считать, что точки разрывов функций совпадают с точками разрывов их производных.

Изучим два случая: первый — точки разрыва совпадают с узловыми точками  $r_k$  и второй — точки разрыва являются внутренними точками интервалов  $(r_k, r_{k+1})$ . В обоих случаях будем предполагать, что основным конечно-разностным уравнением является следующее:

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} = - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr. \quad (6.3.1)$$

Сначала рассмотрим первый случай, когда точки разрыва приходятся на узловые точки, а в интервалах  $(r_k, r_{k+1})$  функции  $\varphi, f$  и  $D$  являются непрерывными, имеют непрерывные производные первого порядка и ограниченные — второго порядка.



Аналогично предыдущему найдем

$$B_k = A_{k-1/2} \frac{\Delta r_{k-1/2}^2}{24} + O(\Delta r^3). \quad (6.3.2)$$

Рассмотрим разность величин  $B_{k+1}$  и  $B_k$ :

$$B_{k+1} - B_k = \frac{1}{24} (A_{k+1/2} \Delta r_{k+1/2}^2 - A_{k-1/2} \Delta r_{k-1/2}^2) + O(\Delta r^3). \quad (6.3.3)$$

Ввиду того, что функция  $f$ ,  $D$  и их производные кусочно-непрерывны с разрывами в точках  $r_k$ , разность функций, заключенных в скобки в соотношении (6.3.3), уже не будет иметь третий порядок малости, как в случае непрерывных функций, рассмотренном выше. С точностью до величин третьего порядка малости можно записать:

$$B_{k+1} - B_k = \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \left[ r^\alpha f \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k \right\} + O(\Delta r^3), \quad (6.3.4)$$

где использованы обозначения

$$[\psi]_k = \psi_k^+ - \psi_k^-; \quad \psi_k^\pm = \psi(r_k \pm 0).$$

Это значит, что

$$F_k = F_k^h + \frac{1}{48} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \frac{1}{24} \left[ r^\alpha f \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k + O(\Delta r^3), \quad (6.3.5)$$

где

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r^\alpha f dr. \quad (6.3.6)$$

Из соотношений (6.3.5) и (6.3.6) следует:

$$F_k = F_k^h [1 + O(\Delta r)]. \quad (6.3.7)$$

Следовательно, разностная схема (6.3.1) в случае разрывов, совпадающих с узловыми точками, имеет первый локальный порядок аппроксимации.

Важно заметить, что разностное уравнение (6.3.1) имеет первый локальный порядок аппроксимации лишь в отдельных точках, в которых нарушается непрерывность коэффициентов исходного уравнения диффузии, а также функции  $f(r)$ .

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский показали [356], что, несмотря на то, что уравнение (6.3.1), вообще говоря, имеет первый локальный порядок аппроксимации, решение разностного уравнения имеет второй интегральный порядок точности, то есть

$$\varphi_k = \varphi_k^h [1 + O(\Delta r^2)]. \quad (6.3.8)$$

Аналогичным образом можно показать, что разностная схема

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) = -F_k^h, \quad (6.3.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}}{\Delta r_{k+1/2}}; \\ F_k^h &= (f r^\alpha \Delta r)_k, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.9')$$

также имеет второй интегральный порядок точности.

Здесь использовано следующее обозначение:

$$(A)_k = \frac{1}{2} (A_k^+ + A_k^-).$$

Если функции  $f, D$  непрерывны вместе со своими производными первого порядка и ограниченными производными второго порядка и  $\Delta r_k = \Delta r_{k+1/2} = \Delta r$ , то в выражении (6.3.5)

$$\left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k = 0, \quad \left[ r^\alpha f \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k = 0,$$

и, следовательно, конечно-разностные системы (6.3.1) и (6.3.9) имеют второй порядок аппроксимации и второй интегральный порядок точности. Естественно, что этот результат совпадает с полученным в § 6.2.

Для уравнения диффузии рассмотрим следующую разностную схему:

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \Sigma r^\alpha dr \varphi_k = - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr. \quad (6.3.10)$$

Нетрудно показать, что эта схема имеет первый локальный порядок аппроксимации в рассматриваемом классе функций  $f, D, \Sigma$

и решений  $\varphi$ . К такому же выводу приходим при рассмотрении конечно-разностной схемы вида

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.3.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}}{\Delta r_{k-1/2}}; \\ p_k &= (\Sigma \Delta r)_k r_k^\alpha; \\ F_k^h &= (f \Delta r)_k r_k^\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.11')$$

Переходим к рассмотрению второго случая, когда разрывы функций  $f, D$  и их производных приходятся на внутренние точки интервалов  $(r_k, r_{k+1})$ . Для простоты предположим, что на интервале  $(r_k, r_{k+1})$  имеется только одна точка разрыва. Обобщение на случай нескольких точек разрыва не представляет труда. Пусть точка разрыва совпадает с координатой  $r_{k-1/2}$ . В этом случае

$$B_k = \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{8} \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}}, \quad (6.3.12)$$

и, следовательно,

$$F_k = F_k^h + \frac{1}{8} \left\{ r_{k+1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k+1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k+1/2}} - r_{k-1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}} \right\} + O(\Delta r^2), \quad (6.3.13)$$

где

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr. \quad (6.3.14)$$

Таким образом,

$$F_k = F_k^h [1 + O(1)]. \quad (6.3.15)$$

В результате приходим к выводу, что конечно-разностная схема (6.3.1) имеет нулевой локальный порядок аппроксимации.

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский показали [353, 356], что уравнение (6.3.1) имеет второй интегральный порядок точности.

Аналогичный вывод может быть сделан и относительно следующей разностной схемы:

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) = -F_k^h, \quad (6.3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{\left(\frac{\Delta r}{D}\right)_{k-1/2}}, \\ F_k &= f_k r_k^\alpha \Delta r_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.16')$$

Перейдя к рассмотрению уравнения диффузии, можно показать, что в соответствующем классе функций  $f, D, \Sigma$  и  $\varphi$  конечно-разностное уравнение (6.2.23) будет иметь нулевой локальный порядок аппроксимации. Такой же вывод может быть сделан по отношению к конечно-разностной схеме

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.3.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k+1/2}^\alpha}{\left(\frac{D}{\Delta r}\right)_{k+1/2}}; \\ p_k &= \Sigma_k r_k^\alpha \Delta r_k; \\ F_k^h &= f_k r_k^\alpha \Delta r_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.17')$$

Следует отметить, что этот результат качественно не изменится, если предположить, что точки  $r_{k+1/2}$  выбраны в середине соответствующих интервалов.

Таким образом, на основании проведенного анализа можно утверждать, что конечно-разностное уравнение с разрывами в узловых точках на порядок более точны в смысле локальной аппроксимации по сравнению со схемами, в которых разрыв приходится на внутреннюю точку интервалов  $r_k, r_{k+1}$ , хотя интегральные порядки точности этих схем совпадают.

## 6.4. Усовершенствованные конечно-разностные схемы

Полученные в предыдущем параграфе конечно-разностные уравнения диффузии просты и весьма удобны для практического использования. Особенно это относится к схеме, где точка

разрыва совпадает с узловой точкой сетки. Эта схема при большом числе счетных узлов может привести к результатам высокой точности.

Основные погрешности, допускаемые заменой дифференциального уравнения разностным, возникают в точках, непосредственно примыкающих к разрывам функций. Если свойства зон реактора различаются сильно, то такие погрешности могут оказаться значительными.

Для повышения точности расчетов можно пользоваться усовершенствованными конечно-разностными схемами, которые учитывают особенности поведения функций вблизи разрывов и приводят к схемам повышенной локальной аппроксимации.

Начнем рассмотрение со случая, когда точка разрыва совпадает с узловой точкой сетки. Точное дифференциальное уравнение (6.2.4) заменим приближенным конечно-разностным уравнением вида

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} = -F_k^h, \quad (6.4.1)$$

где

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + \frac{1}{48} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \frac{1}{24} \left[ r^\alpha f \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k. \quad (6.4.2)$$

Это значит, что для данной разностной схемы имеет место соотношение

$$F_k = F_k^h [1 + O(\Delta r^2)]. \quad (6.4.3)$$

Следовательно, конечно-разностная схема (6.4.1) обеспечивает второй локальный порядок аппроксимации во всех узлах сетки, то есть можно показать [356], что в данном случае интегральный порядок точности схемы (6.4.1) будет второй:

$$\varphi_k = \varphi_k^h [1 + O(\Delta r^2)]. \quad (6.4.4)$$

Это значит, что усовершенствованные схемы не улучшают интегрального порядка точности, а повышают лишь локальный порядок аппроксимации. Таким образом, усовершенствование конечно-разностной схемы свелось к тому, что вместо первого

локального порядка аппроксимации, который имела разностная схема (6.3.1), мы имеем теперь схему второго локального порядка аппроксимации.

Аналогичное заключение о втором порядке аппроксимации может быть сделано по отношению к следующей разностной схеме:

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) = -F_k^h, \quad (6.4.5)$$

где

$$F_k^h = (fr^\alpha \Delta r)_k + \frac{7}{48} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \frac{1}{24} \left[ r^\alpha f \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k, \quad (6.4.6)$$

а величины  $\mu_k$  определяются первой формулой из (6.3.11'). Здесь, кроме того, использован тот факт, что

$$\int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} fr^\alpha dr = (fr^\alpha \Delta r)_k + \frac{1}{8} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k + O(\Delta r^3). \quad (6.4.7)$$

Для получения усовершенствованных конечно-разностных уравнений диффузии необходимо во всех предыдущих формулах функцию  $f$  заменить  $f - \Sigma \varphi$ .

Рассмотрим, например, разностное уравнение (6.4.5). В этом случае выражение  $F_k^h$  необходимо заменить

$$F_k^h - A_k \varphi_k^h,$$

где

$$A_k \varphi_k^h = r_k^\alpha \left\{ (\Sigma \Delta r)_k \varphi_k^h + \frac{7}{48} \left[ \Sigma \frac{d\varphi^h}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \frac{1}{24} \left[ \Sigma \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \Delta r^2 \right]_k \varphi_k^h \right\}. \quad (6.4.8)$$

Произведем преобразование величины  $\left[ \frac{d\varphi}{dr} \Delta r^2 \right]_k$ :

$$\begin{aligned} \left[ \Sigma \frac{d\varphi r^\alpha}{dr} \Delta r^2 \right]_k &= - \left[ \frac{\Sigma}{D} \Delta r^2 J \right]_k = \\ &= - \frac{\Sigma_{k+1/2}}{D_{k+1/2}} \Delta r_{k+1/2}^2 J_{k+1/2} + \frac{\Sigma_{k-1/2}}{D_{k-1/2}} \Delta r_{k-1/2}^2 J_{k-1/2} + O(\Delta r^3), \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

где

$$J = -r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr}.$$

Тогда будем иметь

$$A_k \varphi_k^h = \left\{ (\Sigma \Delta r)_k - \frac{1}{24} \left[ \Sigma \Delta r^2 \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \right]_k \right\} r_k^\alpha \varphi_k^h - \\ - \frac{7}{48} \frac{\Sigma_{k+1/2}}{D_{k+1/2}} \Delta r_{k+1/2}^2 J_{k+1/2} + \frac{7}{48} \frac{\Sigma_{k-1/2}}{D_{k-1/2}} \Delta r_{k-1/2}^2 J_{k-1/2} + O(\Delta r^3). \quad (6.4.10)$$

В результате приходим к следующему разностному уравнению диффузии второго локального порядка аппроксимации:

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.4.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_k^h &= r_k^\alpha (f \Delta r)_k + \frac{7}{48} \left[ \frac{dr^\alpha f}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \frac{1}{24} \left[ r^\alpha f \Delta r^2 \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \right]_k; \\ \mu_k &= \frac{r_{k-1/2} D_{k-1/2}}{\Delta r_{k-1/2}} \left( 1 + \frac{7}{48} \frac{\Sigma_{k-1/2}}{D_{k-1/2}} \Delta r_{k-1/2}^2 \right); \\ p_k &= r_k^\alpha (\Sigma \Delta r)_k - \frac{r_k^\alpha}{24} \left[ \Sigma \Delta r^2 \frac{d \ln r^\alpha D}{dr} \right]_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.12)$$

Переходим к случаю, когда точка разрыва совпадает с точкой  $r_{k+1/2}$ . Рассмотрим разностное уравнение

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} = -F_k^h, \quad (6.4.13)$$

где

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + \frac{1}{8} \left\{ r_{k+1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k+1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k+1/2}} - r_{k-1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}} \right\}. \quad (6.4.14)$$

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$F_k = F_k^h [1 + O(\Delta r)], \quad (6.4.15)$$

и, следовательно, приходим к выводу о том, что конечно-разностная схема (6.4.13) имеет первый локальный порядок аппроксимации. Аналогичный вывод также можно сделать по отношению к следующей разностной схеме:

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) = -F_k^h, \quad (6.4.16)$$

где

$$F_k^h = f_k r_k^\alpha \Delta r_k + \frac{1}{8} \left\{ r_{k+1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k+1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k+1/2}} - r_{k-1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}} \right\}, \quad (6.4.17)$$

а величины  $\mu_k$  определяются формулами (6.3.16').

Рассмотрим теперь уравнение диффузии. Заменяя всюду  $f$  на  $f - \Sigma$ , приходим к усовершенствованной разностной схеме первого локального порядка аппроксимации

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.4.18)$$

где

$$F_k^h = f_k r_k^\alpha \Delta r_k + \frac{1}{8} \left\{ r_{k+1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k+1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k+1/2}} - r_{k-1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{f \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}} \right\};$$

$$\mu_k = \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}};$$

$$p_k = \Sigma_k r_k^\alpha \Delta r_k + \frac{1}{8} \left\{ r_{k+1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{\Sigma \Delta r^2}{D} \right]_{k+1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k+1/2}} - r_{k-1/2}^\alpha \frac{\left[ \frac{\Sigma \Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}} \right\}. \quad (6.4.18')$$

## 6.5. Конечно-разностные уравнения для систем дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^\alpha} \frac{dr^\alpha \varphi_1}{dr} + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{1}{3} \frac{d\varphi_0}{dr} + \Sigma_1 \varphi_1 &= f_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$



Система уравнений (6.5.1) является обобщением уравнения диффузии и совпадает с последним при  $f_1 = 0$ . Существенной особенностью этой системы является то, что ее решение ищется в классе функций  $\{\varphi_0\}$  и  $\{\varphi_1\}$ , непрерывных во всем объеме реактора и имеющих ограниченные производные первого порядка. Относительно функций  $f_0, f_1, \Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  будем предполагать, что они принадлежат классу кусочно-непрерывных функций вместе с производными первого порядка.

Для получения конечно-разностных уравнений будем поступать следующим образом. Умножим почленно первое из уравнений на  $r^\alpha$  и проинтегрируем (6.5.1) по  $r$  в пределах от  $r_{k-1/2}$  до  $r_{k+1/2}$ :

$$r_{k+1/2}^\alpha \varphi_{1,k+1/2} - r_{k-1/2}^\alpha \varphi_{1,k-1/2} = - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r^\alpha dr. \quad (6.5.2)$$

Затем то же уравнение помножим почленно на  $r^\alpha$  и проинтегрируем в пределах  $(r_{k-1/2}, r_k)$ :

$$r^\alpha \varphi_1 - r_{k-1/2}^\alpha \varphi_{1,k-1/2} = - \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r' dr', \quad (6.5.3)$$

или

$$r^\alpha \varphi_1 = (r^\alpha \varphi_1)_{k-1/2} - \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'. \quad (6.5.4)$$

Из второго уравнения системы (6.5.1) непосредственно следует, что

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3\Sigma_1} \frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{1}{\Sigma_1} f_1. \quad (6.5.5)$$

Подставим соотношение (6.5.5) в (6.5.4), тогда получим

$$\frac{r^\alpha}{3\Sigma_1} \frac{d\varphi_0}{dr} - \frac{r^\alpha}{\Sigma_1} f_1 = -r_{k-1/2}^\alpha \varphi_{1,k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr', \quad (6.5.6)$$

или

$$\frac{d\varphi_0}{dr} = 3f_1 - 3\Sigma_1 \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{r^\alpha} \varphi_{1,k-1/2} + \frac{3\Sigma_1}{r^\alpha} \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'. \quad (6.5.7)$$

Уравнение (6.5.7) проинтегрируем в интервале  $(r_{k-1}, r_k)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{0,k} - \varphi_{0,k-1} - 3 \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr = r_{k-1/2}^\alpha \varphi_{1,k-1/2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{3\Sigma_1}{r^\alpha} dr + \\ + \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{3\Sigma_1}{r^\alpha} dr \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Разрешим уравнение (6.5.8) относительно величины  $\varphi_{1,k-1/2}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,k-1/2} = - \frac{\varphi_{0,k} - \varphi_{0,k-1} - 3 \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr}{3 r_{k-1/2}^\alpha \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} - \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1 dr}{r^\alpha} \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'}{r_{k-1/2}^\alpha \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr}. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Принимая во внимание соотношение (6.5.9), уравнение (6.5.2) запишем в следующем виде:

$$\frac{\varphi_{0,k+1} - \varphi_{0,k}}{3 \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} - \frac{\varphi_{0,k} - \varphi_{0,k-1}}{3 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \Sigma_0 \varphi_0 r^\alpha dr = -F_k, \quad (6.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} F_k = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f_0 r^\alpha dr - \frac{\int_{r_k}^{r_{k+1}} f_1 dr}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} + \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} - \\ - \frac{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr \int_{r_{k+1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr} + \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr \int_{r_{k-1/2}}^r (\Sigma_0 \varphi_0 - f_0) r'^\alpha dr'}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\Sigma_1}{r^\alpha} dr}. \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

Соотношение (6.5.10) позволяет получить конечно-разностное уравнение заданного порядка точности. Мы ограничимся рас-

смотрением только простейших конечно-разностных схем. Так, рассмотрим конечно-разностное уравнение вида

$$\frac{\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \Sigma r^\alpha dr \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.5.12)$$

где

$$F_k^h = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f_0 r^\alpha dr - 3 \left( \frac{\int_{r_k}^{r_{k+1}} f_1 dr}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \right). \quad (6.5.13)$$

Здесь, кроме того, приняты обозначения

$$\varphi = \varphi_0, \quad D = \frac{1}{3\Sigma_1}, \quad \Sigma = \Sigma_0.$$

Если функции  $f_0, \Sigma, D$  и  $\varphi$  непрерывны вместе с производными второго порядка, то конечно-разностное уравнение (6.5.12) имеет второй порядок аппроксимации и второй интегральный порядок точности.

Пусть теперь  $f_0, \Sigma, D$  принадлежат классу кусочно-непрерывных функций с кусочно-непрерывными производными первого порядка, а  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  принадлежат классу непрерывных функций на интервале  $(0, l)$ . Тогда возможны два случая:

1) если разрыв функций  $f_0, \Sigma, D$  совпадает с узловой точкой  $r_k$ , то конечно-разностное уравнение (6.5.12) имеет первый локальный порядок аппроксимации и второй интегральный порядок точности;

2) если разрыв функций  $f_0, \Sigma, D$  приходится на внутреннюю точку интервала  $(r_k, r_{k+1})$ , то конечно-разностное уравнение (6.5.12) имеет нулевой локальный порядок аппроксимации и второй интегральный порядок точности.

Аналогичным образом можно показать, что разностное уравнение

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - p_k \varphi_k^h = -F_k^h, \quad (6.5.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{\left(\frac{\Delta r}{D}\right)_{k-1/2}}; \\ p_k &= (\Sigma \Delta r)_k r_k^\alpha; \\ F_k^h &= (f_0 r^\alpha \Delta r)_k - 3 \left[ \frac{(f_1 \Delta r)_{k+1/2}}{\left(\frac{\Delta r}{r^\alpha D}\right)_{k+1/2}} - \frac{(f_1 \Delta r)_{k-1/2}}{\left(\frac{\Delta r}{r^\alpha D}\right)_{k-1/2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.5.14')$$

имеет в классе разрывных функций  $f_0, f_1, \Sigma$  и  $D$  первый локальный порядок аппроксимации, если узловая точка  $r_k$  совпадает с точкой разрыва, и нулевой порядок аппроксимации в остальных случаях. Здесь, кроме того, предполагается, что  $r_{k+1/2}$  совпадает с серединой интервала  $(r_k, r_{k+1})$ .

Если узловая точка совпадает с точкой разрыва, то соотношение (6.5.13) можно переписать в виде

$$F_k^h = f_{0,k} r_k^\alpha \Delta r_k - 3(f_{1,k+1/2} r_{k+1/2}^\alpha D_{k+1/2} - f_{1,k-1/2} r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}). \quad (6.5.15)$$

В том же приближении функция  $\varphi_{1,k-1/2}$  запишется следующим образом:

$$\varphi_{1,k-1/2} = \frac{r_{k-1/2}^\alpha D_{k-1/2}}{\Delta r_{k-1/2}} (\varphi_k - \varphi_{k-1} - 3f_{1,k-1/2} \Delta r_{k-1/2}). \quad (6.5.16)$$

Выражение (6.5.16) необходимо для нахождения функций  $\varphi_{1,k\pm 1/2}$  в многогрупповом методе расчета реакторов.

## 6.6. Постановка основных задач

В предыдущих параграфах настоящей главы были сформулированы конечно-разностные уравнения различной точности. Все эти уравнения имеют вид

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \mu_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - p_k \varphi_k = -F_k, \quad (6.6.1)$$

где  $\mu_k, p_k$  и  $F_k$  — заданные величины, соответствующие той или иной конечно-разностной схеме.

Уравнение (6.6.1) запишем в следующем виде:

$$a_k \varphi_{k+1} - b_k \varphi_k + c_k \varphi_{k-1} = -F_k, \quad (6.6.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \mu_{k+1}; \\ c_k &= \mu_k; \\ b_k &= a_k + c_k + p_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.3)$$

Произведем дальнейшие преобразования уравнения (6.6.2). Для этого поделим почленно уравнение (6.6.2) на  $a_k$ . Тогда получим

$$\varphi_{k+1} - B_k \varphi_k + C_k \varphi_{k-1} = -f_k, \quad (6.6.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} + \frac{p_k}{\mu_{k+1}}; \\ C_k &= \frac{c_k}{a_k} = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}; \\ f_k &= \frac{F_k}{a_k} = \frac{F_k}{\mu_{k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.5)$$

Переходим теперь к постановке граничных условий. Для этого сначала рассмотрим условия на внешней границе области  $G$ . Наиболее общим условием в данном случае будет следующее:

$$\xi \frac{d\varphi}{dr} + \eta \varphi = g \quad \text{при} \quad r = R, \quad (6.6.6)$$

где  $\xi, \eta, g$  — заданные числа.

Если  $\xi = 0, g = 0$ , то приходим к простейшему случаю, когда в узловой точке с номером  $n$  задается однородное условие

$$\varphi_n = 0. \quad (6.6.7)$$

Предположим теперь, что  $\xi, \eta$  и  $g$  отличны от нуля. В этом случае внешнюю границу реактора удобно совместить с серединой последнего интервала. Это значит, что мы аналитически продолжаем решение задачи наполовину расчетного интервала в сторону вакуума. При этом последнюю расчетную точку будем называть фиктивной. Далее с помощью центральных разностей распишем условие (6.6.6). Предполагая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=R} &= \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\Delta r}; \\ \varphi \Big|_{r=R} &= \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}); \\ g \Big|_{r=R} &= \frac{1}{2}(g_n + g_{n-1}) = g_{n-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.8)$$

получаем

$$\varphi_{n-1} = \Gamma \varphi_n + G, \quad (6.6.9)$$

где

$$\Gamma = \frac{\frac{\xi}{\Delta r} + \frac{\eta}{2}}{\frac{\xi}{\Delta r} - \frac{\eta}{2}}; \quad G = -\frac{g_{n-1/2}}{\frac{\xi}{\Delta r} - \frac{\eta}{2}}. \quad (6.6.10)$$

Переходим далее к постановке граничных условий в центре. Наиболее общим условием для уравнения диффузии будет

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\gamma} \varphi \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad (6.6.11)$$

где  $\gamma$  и  $r_0$  — заданные величины. Строго говоря, условие (6.6.11) необходимо ставить для систем, когда в центр симметрии системы помещен поглощающий стержень радиусом  $r_0$ . Если стержень отсутствует, то необходимо положить  $\gamma = \infty$  и  $r_0 = 0$ .

Для получения конечно-разностного соотношения аппроксимирующего условия (6.6.11) выберем разностную сетку таким образом, чтобы точка  $r = r_0$  совпадала с серединой первого расчетного интервала. Это значит, что решение аналитически продолжается в сторону отрицательных значений  $r$ . Пользуясь центральными разностями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=r_0} &= \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta r}; \\ \varphi \Big|_{r=r_0} &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0), \end{aligned} \right\} \quad (6.6.12)$$

получим

$$\varphi_0 = \frac{1 - \frac{\Delta r}{2\gamma}}{1 + \frac{\Delta r}{2\gamma}} \varphi_1. \quad (6.6.13)$$

В частности, при  $\gamma = \infty$ ,  $\varphi_0 = \varphi_1$ .

## 6.7. Соотношение баланса

При решении конечно-разностных уравнений полезно использовать некоторые контрольные соотношения, с помощью которых можно судить о точности решения конечно-разностных уравнений. Эти контрольные соотношения являются

уравнениями баланса нейтронов. Если соотношение баланса выполнено, то ни один нейтрон не выпал из рассмотрения.

Для получения уравнения баланса рассмотрим уравнение (6.6.1) и запишем его с учетом обозначений (6.6.3) в следующем виде:

$$a_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - a_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - p_k\varphi_k = -F_k. \quad (6.7.1)$$

Просуммируем далее конечно-разностное уравнение (6.7.1) по всем  $k$  от 1 до  $n-1$ . Тогда будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\varphi_k = -\sum_{k=1}^{n-1} F_k. \quad (6.7.2)$$

Заменив в первой сумме индекс  $k+1$  на  $k$ , приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) = J_n - J_1, \quad (6.7.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= a_0(\varphi_1 - \varphi_0); \\ J_n &= a_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.7.4)$$

Величины  $J_1$  и  $J_n$  описывают утечку нейтронов в поглотитель ( $r = r_0$ ) и через внешнюю границу ( $r = R$ ).

С учетом соотношения (6.7.3) уравнение баланса принимает вид

$$J_1 - J_n + P = F, \quad (6.7.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{n-1} p_k\varphi_k; \\ F &= \sum_{k=1}^{n-1} F_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.6)$$

Учитывая тот факт, что утечка нейтронов в поглотитель равна числу ежесекундно захватываемых поглотителем нейтронов, величину  $J_1$  будем называть числом нейтронов, захваченных поглотителем.

Если соотношение баланса выполнено с требуемой точностью, то решение конечно-разностной системы уравнений выполнено правильно.

## 6.8. О точности проведения численных расчетов по конечно-разностным схемам

Все рассмотренные различные конечно-разностные схемы имеют второй интегральный порядок точности и отличаются только локальным порядком аппроксимации. Таким образом, с точки зрения предельного перехода, при стремлении интервала разностной сетки к нулю, все рассмотренные в настоящей главе конечно-разностные схемы теоретически можно считать эквивалентными друг другу. Однако на практике при ведении конкретного счета выявляются преимущества одних схем и недостатки других. Прежде чем это показать, остановимся на качественном анализе различных схем.

Для простоты рассмотрим уравнение (6.1.10)

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\varphi}{dr} = -f(r). \quad (6.8.1)$$

Предполагая, что  $D$  и  $f(r)$  — кусочно-непрерывные функции, приходим к эквивалентному конечно-разностному уравнению

$$a_{k+1}(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - a_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + F_k = 0, \quad (6.8.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + B_{k+1} - B_k; \\ B_k &= \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r f r'^\alpha dr'; \\ a_k &= \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.8.3)$$

Конечно-разностное уравнение (6.8.2) является точным в том смысле, что оно доставляет точное решение уравнения (6.8.1) в узловых точках  $r = r_k$ .



Уравнение (6.8.2) заменим далее приближенным

$$a_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - a_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr = 0 \quad (6.8.4)$$

и введем в рассмотрение ошибку

$$\varepsilon_k = \varphi_k^h - \varphi_k. \quad (6.8.5)$$

Тогда, вычитая из уравнения (6.8.4) уравнение (6.8.2), приходим к конечно-разностному уравнению для ошибки

$$a_{k+1}(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) - a_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) = B_{k+1} - B_k. \quad (6.8.6)$$

В дальнейшем ради простоты анализа будем считать, что  $\alpha = 0$ .

Пусть функции  $f$  и  $D$  — кусочно-постоянные с разрывами в точках  $r = r_k$ . Тогда нетрудно показать, что

$$B_k = 0$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_k = 0. \quad (6.8.7)$$

Это значит, что конечно-разностная схема (6.8.4) в классе кусочно-постоянных функций  $f$  и  $D$  с разрывами в узловых точках  $r = r_k$  приводит к точному решению задачи.

Рассмотрим теперь случай, когда разрывы функций  $f$  и  $D$  приходятся на внутренние точки интервалов  $r_{k-1}, r_k$ . Пусть такими точками будут  $r = r_{k-1/2}$ . Если вне точек разрыва эти функции постоянны, то получим

$$B_k = \frac{1}{8} \frac{\left[ f \frac{\Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( f \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}}, \quad (6.8.8)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} [A]_{k-1/2} &= A_k - A_{k-1}; \\ (A)_{k-1/2} &= \frac{1}{2}(A_k + A_{k-1}). \end{aligned}$$

Итак, в рассматриваемом случае  $B_k \neq 0$  и, следовательно,  $\varepsilon_k \neq 0$ .

Оценим величину погрешности рассматриваемой конечно-разностной схемы (см. [353]). Для этого предположим, что точка разрыва совпадает с  $r = r_{m-1/2}$ .

В этом случае

$$B_m = \frac{1}{8} \frac{\left[ f \frac{\Delta r^2}{D} \right]_{m-1/2}}{\left( f \frac{\Delta r}{D} \right)_{m-1/2}},$$

Тогда система уравнений (6.8.6) однородна для всех  $k \neq m-1, m$ . Что касается уравнений для  $k = m-1$  и  $k = m$ , то они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} a_m(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) - a_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2}) &= B_m; \\ a_{m+1}(\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m) - a_m(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) &= -B_m. \end{aligned} \right\} \quad (6.8.9)$$

Таким образом, в уравнении для ошибок имеется диполь в соседних узлах сетки, то есть источники, равные по величине и противоположные по знаку. Тогда решение задачи формально можно записать в виде

$$\varepsilon_k = B_m [G(r_m \rightarrow r_k) - G(r_{m-1} \rightarrow r_k)], \quad (6.8.10)$$

где  $G(r_m \rightarrow r_k)$  — решение уравнения (6.8.6), если для уравнения с номером  $k = m$  в правой части положить

$$B_{k+1} - B_k = 1.$$

Можно показать, что

$$G(r_m \rightarrow r_k) - G(r_{m-1} \rightarrow r_k) = M_{km} \Delta r_m, \quad (6.8.11)$$

где  $M_{km}$  — некоторые константы порядка единицы. Учитывая, что

$$B_m = O(\Delta r)$$

и принимая во внимание (6.8.11), получаем оценку

$$\varepsilon_k = O(\Delta r^2). \quad (6.8.12)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае конечно-разностная схема имеет второй интегральный порядок точности. Это значит, что в классе кусочно-постоянных функций  $f$  и  $D$  можно считать, что разностная схема с разрывами в узловых точках оказывается более точной, чем схема с разрывами, приходящимися на внутренние точки интервалов.

Если теперь предположить, что  $f(r)$  и  $D(r)$  — кусочно-непрерывные функции, дважды непрерывно дифференцируемые на участках непрерывности, то как первая, так и вторая

конечно-разностные схемы имеют второй интегральный порядок точности<sup>1)</sup>.

В этом случае схема с разрывами, совпадающими с узловыми точками, имеет первый локальный порядок аппроксимации, и выражение для ошибки дается уравнением (6.8.6), где

$$B_k = \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{df}{dr} \Delta r^2 \right]_k - \left[ f \frac{d \ln D}{dr} \Delta r^2 \right]_k \right\}.$$

В предположении гладкости функций  $f$  и  $D$  мы видим, что источниками являются диполи и величина  $B_k$  имеет оценку

$$B_k = O(\Delta r^2). \quad (6.8.13)$$

В случае разностной схемы с разрывами в точках  $r_k \pm 1/2$  погрешность

$$B_k = \frac{1}{2} \frac{\left[ f \frac{\Delta r^2}{D} \right]_{k-1/2}}{\left( f \frac{\Delta r}{D} \right)_{k-1/2}}$$

и, следовательно,

$$B_k = O(\Delta r). \quad (6.8.14)$$

Сопоставление оценок (6.8.13) и (6.8.14) показывает, что схема с разрывами в узловых точках более точна в практических расчетах. Разумеется, при уменьшении шага сетки отличие между решениями, полученными по обеим рассмотренным схемам, исчезает. Однако в практических расчетах, когда интервалы  $\Delta r$  берутся большими, преимущества первой схемы оказываются весьма существенными.

## 6.9. Конечно-разностные уравнения с «фиктивными точками»

Схемы непрерывного счета, рассмотренные в настоящей главе, имеют важное преимущество перед другими конечно-разностными схемами, в которых переход от решения в одной

<sup>1)</sup>Если, в частности,  $D$  — кусочно-постоянная функция, то можно показать, что первая разностная схема имеет третий интегральный порядок точности. Однако при рассмотрении более общего случая, когда учитывается поглощение, интегральный порядок разностного уравнения останется вторым вследствие аппроксимации члена, учитывающего захват нейтронов.

зоне к решению в другой осуществляется с помощью дополнительных соотношений, играющих роль граничных условий. При этом следует отметить наиболее употребительный метод постановки граничных условий, который в литературе именуется методом «фиктивных точек». Этот метод состоит в том, что на границе зон решение с обеих сторон аналитически продолжается на один шаг или наполовину шага в сторону соседней зоны в предположении гладкости. Такое предположение решений позволяет затем с определенной точностью сформулировать граничные условия. Полученная таким образом конечно-разностная схема используется для расчетов.

В настоящем параграфе мы установим тождественность метода фиктивных точек с методом непрерывного счета. Будет показано также, что разностные уравнения, полученные с помощью метода фиктивных точек, в точности совпадают с разностными уравнениями непрерывного счета.

Для примера рассмотрим простейшее уравнение

$$\frac{d}{dr} D \frac{d\varphi}{dr} = -f(r). \quad (6.9.1)$$

Пусть разрыв функций  $D(r)$  и  $f(r)$  совпадает с узловой точкой  $r_k$ . Область левее точки  $r_k$  будем считать первой, а правее — второй. Аналитически продолжим решения из каждой зоны в соседнюю на расстояние одного шага  $\Delta r_k$  соответствующей зоны, из которой осуществляется продолжение решения.

Проинтегрируем уравнение (6.9.1) в пределах  $(r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$  первой области. Тогда получим

$$J'_{k+1/2} - J_{k-1/2} = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f_1(r) dr. \quad (6.9.2)$$

Интегрируя далее это же уравнение в пределах  $(r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$  второй области, получаем

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f_2(r) dr, \quad (6.9.3)$$

где  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  — функции  $f(r)$  соответственно на первом и втором листе поверхности.

К уравнениям (6.9.2), (6.9.3) присоединим еще одно, а именно:

$$\frac{1}{2}(J'_{k+1/2} + J_{k-1/2}) = \frac{1}{2}(J_{k+1/2} + J'_{k-1/2}). \quad (6.9.4)$$

Это уравнение является следствием требования, чтобы поток  $J(r)$  был непрерывен при переходе из одной зоны в другую. Естественно, что условие (6.9.4) является приближенным.

Итак, мы имеем три уравнения (6.9.2), (6.9.3) и (6.9.4). Из этих уравнений можно исключить величину  $J'_{k\pm 1/2}$ . После исключения нетрудно прийти к следующему уравнению:

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} = - \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f dr, \quad (6.9.5)$$

где  $f(r)$  — кусочно-непрерывная функция с разрывом в точке  $r = r_k$ .

Если приближенно положить, что

$$\int_{r_{k-1/2}}^{r_k} f dr = \frac{1}{2} f_k^- \Delta r_k^-; \quad \int_{r_k}^{r_{k+1/2}} f dr = \frac{1}{2} f_k^+ \Delta r_k^+,$$

то уравнение (6.9.5) представится в виде

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} = -(f \Delta r)_k. \quad (6.9.6)$$

Для величин  $J_{k\pm 1/2}$  можно использовать следующие аппроксимации:

$$\left. \begin{aligned} J_{k+1/2} &= \frac{D_{k+1/2}}{\Delta r_{k+1/2}} (\varphi_{k+1} - \varphi_k); \\ J_{k-1/2} &= \frac{D_{k-1/2}}{\Delta r_{k-1/2}} (\varphi_k - \varphi_{k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.9.7)$$

Подставляя выражения (6.9.7) в уравнение (6.9.6), приходим к конечно-разностному уравнению непрерывного счета (6.3.9).

Аналогичным образом можно показать, что в случае продолжения решения на половину шага в сторону соседних областей мы приходим к схеме непрерывного счета (6.3.16). Отличие выводов будет состоять в том лишь, что вместо условия равенства потоков (6.9.4) теперь следует поставить условие:

$$\frac{1}{2}(\varphi'_k + \varphi_{k-1}) = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi'_{k-1}).$$

Наличие поглощения принципиально не изменяет результаты и приводит нас в конечном итоге к схемам (6.3.11) и (6.3.17).

## 7

## Конечно-разностные уравнения диффузии для двумерных областей

### 7.1. Общий метод построения конечно-разностных уравнений для двумерных областей

В настоящей главе дано развитие конечно-разностных методов решения уравнений диффузии для двумерных областей. Так же как и для одномерного случая, вводятся конечно-разностные уравнения для двумерных областей в классе разрывных коэффициентов. Вводится в рассмотрение соотношение баланса.

Рассмотрим уравнение диффузии для двумерных областей. В этом случае оно будет иметь вид

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \Sigma \varphi = -f(r, z), \quad (7.1.1)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{— для плоской геометрии,} \\ 1 & \text{— для цилиндрической геометрии.} \end{cases}$$

Уравнение (7.1.1) запишем в виде системы

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \Sigma \varphi = f; \quad (7.1.2)$$

$$J = -r^\alpha D \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad (7.1.3)$$

$$Y = -D \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (7.1.4)$$

Помножим уравнение (7.1.2) на  $r^\alpha$  и проинтегрируем в пределах

$$r \in (r_{k-1/2}, r_{k+1/2}), \quad z \in (z_{l-1/2}, z_{l+1/2}).$$

Тогда будем иметь соотношение баланса нейтронов

$$\begin{aligned} \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} (J_{k+1/2} - J_{k-1/2}) dz + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (Y_{l+1/2} - Y_{l-1/2}) r^\alpha dr = \\ = - \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma\varphi - f) r^\alpha dr. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Разрешим теперь уравнение (7.1.2) относительно  $dJ/dr$  и результат проинтегрируем по  $r$  в пределах  $(r_{k-1/2}, r)$ . Получим

$$J = J_{k-1/2} - \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'. \quad (7.1.6)$$

Аналогично можно получить

$$Y = Y_{l-1/2} - \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \quad (7.1.7)$$

Исключим из равенств (7.1.6) и (7.1.7) функции  $J$  и  $Y$  с помощью соотношений (7.1.3) и (7.1.4):

$$\left. \begin{aligned} r^\alpha D \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -J_{k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ D \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -Y_{l-1/2} + \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.8)$$

Первое из соотношений (7.1.8) поделим на  $r^\alpha D$  и результат проинтегрируем в пределах  $(r_{k-1}, r_k)$ . Второе уравнение поделим на  $D$  и проинтегрируем в пределах  $(z_{l-1}, z_l)$ . Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k - \varphi_{k-1} &= - \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \cdot J_{k-1/2} + \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ \varphi^l - \varphi^{l-1} &= - \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D} \cdot Y_{l-1/2} + \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D} \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz', \end{aligned} \right\} \quad (7.1.9)$$

где

$$\varphi_{k\pm\nu} = \varphi_{k\pm\nu}(r), \quad \varphi^{l\pm\nu} = \varphi^{l\pm\nu}(z) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Разрешим далее уравнения (7.1.9) относительно величин  $J_{k-1/2}$  и  $Y_{l-1/2}$ :

$$J_{k-1/2} = -\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} + \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr';$$

$$Y_{l-1/2} = -\frac{\varphi^l - \varphi^{l-1}}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} + \frac{1}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D} \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \quad (7.1.10)$$

Подставим выражения (7.1.10) в соотношение баланса нейтронов (7.1.5):

$$\int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} \left( \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \right) dz + \int_{r_{l-1/2}}^{r_{k+1/2}} \left( \frac{\varphi^{l+1} - \varphi^l}{\int_{z_l}^{z_{l+1}} \frac{dz}{D}} - \frac{\varphi^l - \varphi^{l-1}}{\int_{z_{l+1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} \right) r^\alpha dr -$$

$$- \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma\varphi - f) r^\alpha dr = \varepsilon_{k,l}, \quad (7.1.11)$$

где

$$\varepsilon_{kl} = \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} (\lambda_{k+1/2} - \lambda_{k-1/2}) dz + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\nu_{l+1/2} - \nu_{l-1/2}) r^\alpha dr. \quad (7.1.12)$$

Величины  $\lambda_{k\pm 1/2}$  и  $\nu_{l\pm 1/2}$  вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{k-1/2} &= d \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ \nu_{l-1/2} &= \frac{1}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D} \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.13)$$

Соотношение (7.1.11) — основное для получения конечно-разностных уравнений заданной точности.



## 7.2. Конечно-разностные уравнения в классе разрывных функций

Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$\begin{aligned} & \mu_{k+1/2}^l (\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{k,l}^h) - \mu_{k-1/2}^l (\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k-1,l}^h) + \\ & + \mu_k^{l+1/2} (\varphi_{k,l+1}^h - \varphi_{k,l}^h) - \mu_k^{l-1/2} (\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k,l-1}^h) - \pi_{kl} \varphi_{kl}^h = -F_{kl}^h, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k-1/2}^l &= s \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} \frac{dz}{r_k} \int_{r_{k-1/2}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}; & \mu_k^{l-1/2} &= \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \frac{r^\alpha dr}{z_l} \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}; \\ \pi_{kl} &= \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \Sigma r^\alpha dr; & F_{kl}^h &= \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2)$$

Сначала рассмотрим случай, когда линии разрыва проходят через узловые точки  $(r_k, z_l)$  разностной сетки, покрывающей область  $G$ .

В этом случае, как нетрудно убедиться,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{k\pm 1/2}^l &= O(\Delta r^2); \\ \nu_{l\pm 1/2} &= O(\Delta z^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.3)$$

Оценки (7.2.3) получены с помощью разложения подынтегральных функций в соотношении (7.1.13) в ряд Тейлора.

Предполагая, что  $\Delta r_k$  имеет одинаковый порядок малости с  $\Delta z_l$ , введем в рассмотрение величину

$$h = \max_{k,l} \{\Delta r_k, \Delta z_l\}.$$

Имея в виду уравнение (7.1.12), получим

$$\varepsilon_{k,l} = O(h^3). \quad (7.2.4)$$

Оценим порядок величин  $\pi_{kl}$  и  $F_{kl}^h$ . Очевидно, что

$$\pi_{kl} = O(h^2), \quad F_{kl}^h = O(h^2). \quad (7.2.5)$$

Если далее учесть, что разностное уравнение (7.1.7) получено из соотношения (7.1.11) в предположении, что  $\varepsilon_{kl} = 0$ , мы придем к выводу, что

$$\Delta_{kl} = F_{kl}^h \cdot O(h), \quad \varepsilon_{kl} = \pi_{kl} \varphi_{kl} \cdot O(h), \quad (7.2.6)$$

а это значит, что конечно-разностное уравнение (7.2.1) аппроксимирует дифференциальное уравнение (7.1.11) с точностью до величин первого порядка малости.

Можно показать, так же как и в одномерном случае, что конечно-разностное уравнение (7.2.1) имеет второй интегральный порядок точности, то есть

$$\varphi_{kl} = \varphi_{kl}^h [1 + O(h^2)]. \quad (7.2.7)$$

Покажем далее, что выражения (7.2.2) можно упростить, оставаясь в рамках конечно-разностного уравнения первого порядка точности.

В самом деле, с точностью до величин первого порядка малости нетрудно получить

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k-1/2}^l &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{\Delta r_{k-1/2}} (D\Delta z)_{k-1/2,l}; \\ \mu_k^{l-1/2} &= \frac{r_k^\alpha}{\Delta z_{l-1/2}} (D\Delta r)_{l-1/2,k}; \\ \pi_{kl} &= r_k^\alpha (\Sigma \Delta r \Delta z)_{k,l}; \\ F_{kl}^h &= r_k^\alpha (f \Delta r \Delta z)_{k,l}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$

где

$$(\psi)_{kl} = ((\psi)_k)_l.$$

Таким образом, конечно-разностное уравнение (7.2.1) при условии (7.2.8) имеет первый порядок аппроксимации и второй интегральный порядок точности.

Разностное уравнение (7.2.8) приведем к следующему виду:

$$a_{kl}\varphi_{k+1,l} + b_{kl}\varphi_{k,l+1} + c_{kl}\varphi_{k-1,l} + d_{kl}\varphi_{k,l-1} - p_{kl}\varphi_{kl} = -f_{kl}, \quad (7.2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{kl} &= \frac{\mu_{k+1/2}^l}{r_k^\alpha}; & c_{kl} &= \frac{\mu_{k-1/2}^l}{r_k^\alpha}; \\ b_{kl} &= \frac{\mu_k^{l-1/2}}{r_k^\alpha}; & d_{kl} &= \frac{\mu_k^{l+1/2}}{r_k^\alpha}; \\ p_{kl} &= a_{kl} + b_{kl} + c_{kl} + d_{kl} + \frac{\pi_{kl}}{r_k^\alpha}; \\ f_{kl} &= \frac{F_{kl}}{r_k^\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.10)$$

### 7.3. Дальнейшие обобщения результатов

Если транспортное приближение оказывается недостаточным, то при решении многогрупповых уравнений реактора приходится иметь дело с решением системы уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 &= \mathbf{f}_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

В случае двумерной геометрии эта система эквивалентна следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} r^\alpha \varphi_{1r} + \frac{\partial \varphi_{1z}}{\partial z} + \Sigma_0 \varphi_0 &= f_0; \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \Sigma_1 \varphi_{1r} &= f_r; \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \Sigma_1 \varphi_{1z} &= f_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

где использованы такие обозначения:

$$\varphi_1 = \varphi_{1r} \mathbf{i} + \varphi_{1z} \mathbf{k};$$

$$\mathbf{f}_1 = f_r \mathbf{i} + f_z \mathbf{k};$$

$$\mathbf{r} = r \mathbf{i};$$

$$\mathbf{z} = z \mathbf{k}.$$

Систему уравнений (7.3.2) приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \Sigma \varphi &= f; \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{J}{r^\alpha D} &= 3f_r; \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{Y}{D} &= 3f_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

где  $\varphi = \varphi_0$ ;  $\Sigma = \Sigma_0$ ;  $f = f_0$ ;  $J = r^\alpha \varphi_{1r}$ ;  $Y = \varphi_{1z}$ .

Для получения конечно-разностного уравнения поступим следующим образом.

Помножим первое из уравнений (7.3.3) на  $r^\alpha$  и проинтегрируем в пределах  $r \in (r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$ ,  $z \in (z_{l-1/2}, z_{l+1/2})$ :

$$\begin{aligned} \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} (J_{k+1/2} - J_{k-1/2}) dz + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (Y_{l+1/2} - Y_{l-1/2}) r^\alpha dr = \\ = - \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma\varphi - f) r^\alpha dr. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Так же как и в § 7.1, получим

$$\left. \begin{aligned} J &= J_{k-1/2} - \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ Y &= Y_{l-1/2} - \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

Функции  $J$  и  $Y$  исключим с помощью второго и третьего соотношений системы (7.3.3). Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r^\alpha D \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 3r^\alpha D f_r - J_{k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ D \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 3D f_z - Y_{l-1/2} + \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.6)$$

Первое из соотношений (7.3.6) поделим на  $r^\alpha D$ , а второе — на  $D$  и результаты проинтегрируем соответственно по интервалам  $(r_{k-1}, r_k)$  и  $(z_{l-1}, z_l)$ . В результате получим

$$\left. \begin{aligned} J_{k-1/2} &= \\ &= - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1} - 3 \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_r dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} + \frac{1}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D} \int_{r_{k-1/2}}^r \left( \Sigma\varphi - f + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) r'^\alpha dr'; \\ Y_{l-1/2} &= \\ &= - \frac{\varphi^l - \varphi^{l-1} - 3 \int_{z_{l-1}}^{z_l} f_z dz}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} + \frac{1}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D}} \int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dz}{D} \int_{z_{l-1/2}}^z \left( \Sigma\varphi - f + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial J}{\partial r} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.7)$$

Подставим соотношения (7.3.7) в уравнение баланса (7.3.4):

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} \left( \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k - 3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} f_r dr}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1} - 3 \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_r dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \right) dz + \\
 & + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \left( \frac{\varphi^{l+1} - \varphi^l - 3 \int_{z_l}^{z_{l+1}} f_z dz}{\int_{z_l}^{z_{l+1}} \frac{dz}{D}} - \frac{\varphi^l - \varphi^{l-1} - 3 \int_{z_{l-1}}^{z_l} f_z dz}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dr}{D}} \right) r^\alpha dr - \\
 & - \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\Sigma \varphi - f) r^\alpha dr = \varepsilon_{k,l}, \quad (7.3.8)
 \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{kl}$  вычисляется по формуле (7.1.12) с учетом соотношений (7.1.13).

Рассмотрим конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее (7.3.8):

$$\begin{aligned}
 & \mu_{k+1/2}^l (\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{k,l}^h) - \mu_{k-1/2}^l (\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k-1,l}^h) + \\
 & + \mu_k^{l+1/2} (\varphi_{k,l+1}^h - \varphi_{k,l}^h) - \mu_k^{l-1/2} (\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k,l-1}^h) - \pi_{kl} \varphi_{kl}^h = -F_{kl}^h, \quad (7.3.9)
 \end{aligned}$$

где величины  $\mu_{k-1/2}^l, \mu_k^{l-1/2}, \pi_{kl}$  находятся с помощью формул (7.2.2), а

$$\begin{aligned}
 F_{kl}^h = & \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} dz \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} f r^\alpha dr + 3 \int_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} \left( \frac{\int_{r_k}^{r_{k+1}} f_r dr}{\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dr}{r^\alpha D}} - \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} f_r dr}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{dr}{r^\alpha D}} \right) dz + \\
 & + 3 \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \left( \frac{\int_{z_l}^{z_{l+1}} f_z dz}{\int_{z_l}^{z_{l+1}} \frac{dz}{D}} - \frac{\int_{z_{l-1}}^{z_l} f_z dz}{\int_{z_{l-1}}^{z_l} \frac{dr}{D}} \right) r^\alpha dr. \quad (7.3.10)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что конечно-разностное уравнение (7.3.9) имеет первый порядок аппроксимации, если разрывы функций совпадают с узловыми точками, и нулевой порядок во всех остальных случаях. В классе непрерывных функций конечно-разностное уравнение (7.3.9) имеет второй порядок аппроксимации.

Одновременно отметим, что все указанные выше схемы имеют второй интегральный порядок точности. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k-1/2}^l &= \frac{r_{k-1/2}^\alpha}{\Delta r_{k-1/2}} (D\Delta z)_{k-1/2,l}, & \mu_k^{l-1/2} &= \frac{r_k^\alpha}{\Delta z_{l-1/2}} (D\Delta r)_{k,l-1/2}, \\ \pi_{kl} &= r_k^\alpha (\Sigma \Delta r \Delta z)_{kl}, \\ F_{kl}^h &= r_k^\alpha \{ (f \Delta r \Delta z)_{k,l} + 3[(f_r D)_{k+1/2,l} - (f_r D)_{k-1/2,l}] + \\ &\quad + 3[(f_z D)_{k,l+1/2} - (f_z D)_{k,l-1/2}] \}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.11)$$

Тогда конечно-разностное уравнение (7.3.9) приведем к следующему виду:

$$a_{kl} \varphi_{k+1,l} + b_{kl} \varphi_{k,l-1} + c_{kl} \varphi_{k-1,l} + d_{kl} \varphi_{k,l+1} - p_{kl} \varphi_{kl} = -f_{kl}, \quad (7.3.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{kl} &= \frac{\mu_{k+1/2}^l}{r_k^\alpha}; & c_{kl} &= \frac{\mu_{k-1/2}^l}{r_k^\alpha}; \\ b_{kl} &= \frac{\mu_k^{l-1/2}}{r_k^\alpha}; & d_{kl} &= \frac{\mu_k^{l+1/2}}{r_k^\alpha}; \\ p_{kl} &= a_{kl} + b_{kl} + c_{kl} + d_{kl} + \frac{\pi_{kl}}{r_k^\alpha}; \\ f_{kl} &= \frac{F_{kl}}{r_k^\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.13)$$

В качестве граничных условий выберем следующие:

$$\varphi_{0l} = \varphi_{1l}; \quad \varphi_{n,l} = 0; \quad l = (1, 2, \dots, m); \quad (7.3.14)$$

$$\varphi_{k0} = \varphi_{k1}; \quad \varphi_{km} = 0; \quad k = (1, 2, \dots, n). \quad (7.3.15)$$

## 7.4. Матричная форма записи конечно-разностных уравнений для двумерных областей

Рассмотрим конечно-разностное уравнение диффузии для двумерной плоской или цилиндрической области, которое запишется в виде

$$a_{kl}\varphi_{k+1,l} + b_{kl}\varphi_{k,l-1} + c_{kl}\varphi_{k-1,l} + d_{kl}\varphi_{k,l+1} - p_{kl}\varphi_{kl} = -f_{kl}, \quad (7.4.1)$$

где коэффициенты  $a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl}, p_{kl}$  — заданные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$a_{kl} + b_{kl} + c_{kl} + d_{kl} \leq p_{kl}, \quad (7.4.2)$$

причем выполнение строго неравенства (7.4.2) имеет место по крайней мере в одном узле сетки  $(k, l)$ .

Систему уравнений (7.4.1) необходимо дополнить соотношениями, вытекающими из граничных условий

$$\varphi_{0l} = \varphi_{1l}; \quad \varphi_{n+1,l} = 0; \quad l = (1, 2, \dots, m); \quad (7.4.3)$$

$$\varphi_{k0} = \varphi_{k1}; \quad \varphi_{k,m+1} = 0; \quad k = (1, 2, \dots, n). \quad (7.4.4)$$

Первые соотношения (7.4.3) и (7.4.4) являются следствиями условий симметрии области относительно координатных осей  $r$  и  $z$ , а вторые учитывают тот факт, что решение обращается в нуль на внешней границе  $S$ .

Конечно-разностные уравнения (7.4.1) с учетом условий (7.4.4) запишем в матричной форме:

$$\mathbf{a}_k \varphi_{k+1} - \mathbf{b}_k \varphi_k + \mathbf{c}_k \varphi_{k-1} = -\mathbf{f}_k, \quad (7.4.5)$$

где

$$\varphi_k = |\varphi_{kl}|; \quad \mathbf{f}_k = |f_{kl}|$$

— векторы, а  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k$  — матрицы следующего вида:

$$\mathbf{a}_k = \begin{vmatrix} a_{k1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{k2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{km} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{c}_k = \begin{vmatrix} c_{k1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{k2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{km} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} p_{k1} - b_{k1} & -d_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_{k2} & p_{k2} & -d_{k2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{k3} & p_{k3} & -d_{k3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{km} \end{pmatrix}.$$

Помножим уравнение (7.4.5) слева на матрицу  $\mathbf{a}_k^{-1}$ :

$$\varphi_{k+1} - \mathbf{B}_k \varphi_k + \mathbf{C}_k \varphi_{k-1} = -\mathbf{F}_k, \quad (7.4.6)$$

где

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{a}_k^{-1} \mathbf{b}_k; \quad \mathbf{C}_k = \mathbf{a}_k^{-1} \mathbf{c}_k; \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{a}_k^{-1} \mathbf{f}_k.$$

К системе уравнений (7.4.6) присоединим граничные условия, которые с учетом равенств (7.4.3) имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = \varphi_1, \\ \varphi_{n+1} = 0. \end{array} \right\} \quad (7.4.7)$$

Система уравнений (7.4.6), (7.4.7) замкнута. Формально мы пришли к системе разностных уравнений, аналогичных рассмотренным в одномерном случае, с той лишь разницей, что само решение теперь представляется в виде вектора, а коэффициенты — матрицы.

Как будет показано ниже, матричная форма записи конечно-разностных уравнений для двумерных областей в некоторых случаях оказывается полезной для отыскания решения системы уравнений.

## 7.5. Соотношение баланса

Рассмотрим уравнение (7.2.1), которое запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & A_{k+1,l}(\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k,l}) - A_{kl}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k-1,l}) + \\ & + B_{k,1+l}(\varphi_{k,l+1} - \varphi_{k,l}) - B_{k,l}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k,l-1}) - \pi_{k,l}\varphi_{k,l} = -F_{kl}, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

где

$$A_{k,l} = \mu_{k-1/2}^l; \quad B_{k,l} = \mu_k^{l-1/2}.$$



Конечно-разностное уравнение (7.5.1) просуммируем по индексам  $k$  и  $l$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} [A_{k+1,l}(\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k,l}) - A_{kl}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k-1,l})] + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} [B_{k,1+l}(\varphi_{k,l+1} - \varphi_{k,l}) - B_{k,l}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k,l-1})] - \\
 & - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \pi_{k,l} \varphi_{k,l} = - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} F_{kl}. \tag{7.5.2}
 \end{aligned}$$

Преобразуем выражения, стоящие под знаком первых двух сумм, с помощью изменения индекса суммирования. Так, нетрудно показать, что имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} [A_{k+1,l}(\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k,l}) - A_{kl}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k-1,l})] = \\
 & = - \sum_{l=1}^{m-1} A_{1l}(\varphi_{1,l} - \varphi_{0l}) + \sum_{l=1}^{m-1} A_{m,l}(\varphi_{n,l} - \varphi_{n-1,l}); \\
 & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} [B_{k,1+l}(\varphi_{k,l+1} - \varphi_{k,l}) - B_{k,l}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k,l-1})] = \\
 & = - \sum_{k=1}^{n-1} B_{k,l}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k0}) + \sum_{k=1}^{n-1} B_{km}(\varphi_{k,m} - \varphi_{k,m-1}).
 \end{aligned}$$

С учетом этих равенств уравнение (7.5.2) может быть записано в виде

$$Y + P = F, \tag{7.5.3}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 Y &= J_1 - J_n + Y_1 - Y_m; \\
 P &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \pi_{k,l} \varphi_{k,l}; \\
 F &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} F_{kl};
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{l=1}^{m-1} A_{1,l}(\varphi_{1,l} - \varphi_{0l}); \\
 J_n &= \sum_{l=1}^{m-1} A_{n,l}(\varphi_{n,l} - \varphi_{n-1,l}); \\
 Y_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} B_{k,l}(\varphi_{k,l} - \varphi_{k0}); \\
 Y_m &= \sum_{k=1}^{n-1} B_{k,m}(\varphi_{k,m} - \varphi_{k,m-1}).
 \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

Здесь  $Y$  — утечка нейтронов через внешние границы;  $P$  — полное число нейтронов, захватываемых в единицу времени;  $F$  — количество нейтронов, рождающихся в единицу времени в области  $G$ .

Заметим, что соотношение баланса нейтронов (7.5.3) должно выполняться для любых функций  $a_{k,l}$ ,  $b_{k,l}$  и  $\pi_{k,l}$ .

## 8

## Конечно-разностные уравнения метода сферических гармоник

### 8.1. Конечно-разностные уравнения для задач в плоскопараллельной геометрии

Аналитическое решение уравнений сферических гармоник в  $P_n$ -приближении целесообразно только в крайне редких случаях. Это связано с трудностями математического характера, которые усугубляются при решении уравнений в случае неоднородных сред. В сущности это обстоятельство оказалось причиной тому, что долгое время метод сферических гармоник не мог быть эффективно использован для решения задач, связанных с расчетами ядерных реакторов. Более того, даже при решении простейших односкоростных задач имело место стремление избежать применения этого метода.

Развитие численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений привело к созданию весьма эффективных методов решения краевых задач в  $P_n$ -приближении.

В результате метод сферических гармоник вновь стал наиболее мощным аппаратом решения кинетических уравнений. В настоящей главе будут приведены конечно-разностные уравнения в  $P_n$ -приближении, полученные автором совместно с Е. И. Погудалиной, а в следующей главе даны эффективные методы их решения [259].

Рассмотрим односкоростное уравнение в плоскопараллельной геометрии. Оно имеет вид (5.1.1)

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') g(\mu_0) + f(z, \mu) \quad (8.1.1)$$

с граничными условиями

$$\varphi(z, \mu) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (8.1.2)$$

Как было показано в § 5.1, решение задачи (8.1.1) и (8.1.2) с помощью метода сферических гармоник приводит к следующей системе векторно-матричных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{d\mathbf{J}}{dz} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}; \\ \beta \frac{d\varphi}{dz} + \mathbf{b}\mathbf{J} &= \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (8.1.3)$$

при условии, что

$$\mathbf{A}\varphi + \mathbf{B}\mathbf{J} = 0 \quad \text{на } S. \quad (8.1.4)$$

Весь интервал изменения переменной  $z$  в области  $G$  разобьем узловыми точками  $z_k$  на частичные интервалы. Средние точки этих частичных интервалов будем обозначать через  $z_{k+1/2}$ . Проинтегрируем первое из уравнений (8.1.3) по  $z$  в пределах  $(z_{k-1/2}, z_{k+1/2})$ . Тогда получим

$$\alpha(\mathbf{J}_{k+1/2} - \mathbf{J}_{k-1/2}) + \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f})dz = 0. \quad (8.1.5)$$

Далее проинтегрируем то же самое уравнение в пределах  $(z_{k-1/2}, z)$ . В результате будем иметь

$$\alpha\mathbf{J} = \alpha\mathbf{J}_{k-1/2} - \int_{z_{k-1/2}}^z (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f})dz'. \quad (8.1.6)$$

Отсюда

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{k-1/2} - \alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^z (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f})dz'. \quad (8.1.7)$$

Разрешим теперь второе из уравнений (8.1.3) относительно функции  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = -\mathbf{b}^{-1}\beta \frac{d\varphi}{dz} + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{F}. \quad (8.1.8)$$

Подставим выражение (8.1.8) в соотношение (8.1.7) и результат помножим почленно на матрицу  $\mathbf{b}$ . Тогда получим

$$-\beta \frac{d\varphi}{dz} + \mathbf{F} = \mathbf{b} \mathbf{J}_{k-1/2} - \mathbf{b} \alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^z (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f}) dz'. \quad (8.1.9)$$

Равенство (8.1.9) проинтегрируем в пределах  $(z_{k-1}, z_k)$ . Будем иметь

$$-\beta(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \mathbf{J}_{k-1/2} - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} \alpha^{-1} dz \int_{z_{k-1/2}}^z (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f}) dz'. \quad (8.1.10)$$

Отсюда

$$\mathbf{J}_{k-1/2} = - \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \left[ \beta(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz \right] + \varepsilon_k, \quad (8.1.11)$$

где

$$\varepsilon_k = \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} \alpha^{-1} dz \int_{z_{k-1/2}}^z (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f}) dz'. \quad (8.1.12)$$

Введем в рассмотрение класс векторных функций  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{F}$  кусочно-непрерывных вместе с производными первого порядка и класс решений системы уравнений  $\{\varphi, \mathbf{J}\}$  — непрерывных и обладающих кусочно-непрерывными производными первого порядка.

В этом случае можно показать, что если разрывы функций совпадают с узловыми точками  $r_i$ , то в выражении (8.1.11) величина  $\varepsilon_i$  имеет первый порядок малости по сравнению с первым слагаемым в правой части (8.1.11), а во всех остальных случаях — нулевой порядок. Полагая  $\varepsilon_n = 0$ , получим

$$\mathbf{J}_{k-1/2}^h = - \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \left[ \beta(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz \right]. \quad (8.1.13)$$

Подставляя соотношение (8.1.13) в уравнение (8.1.5), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \alpha \left\{ \left( \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \left[ \beta(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{F} dz \right] - \right. \\
& \left. - \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \left[ \beta(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz \right] \right\} - \\
& - \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (\mathbf{a}\varphi^h - \mathbf{f}) dz = 0.
\end{aligned} \tag{8.1.14}$$

Уравнение (8.1.14) почленно умножим на  $\alpha^{-1}$  и вынесем непрерывную функцию  $\varphi^h$  из-под знака интеграла в точке  $z_k$ . Тогда получим разностное уравнение

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \beta(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \beta(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \\
& - \alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{a} dz \varphi_k^h = -\alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{f} dz + \left( \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{F} dz - \\
& - \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz.
\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

Итак, мы пришли к основному конечно-разностному уравнению. При этом следует помнить, что разностное уравнение (8.1.15) имеет первый локальный порядок аппроксимации в рассматриваемом классе функций с разрывами в узловых точках. Если разрывы функций приходятся на внутренние точки интервалов  $(z_{l-1}, z_k)$ , то уравнение (8.1.17) будет иметь нулевой порядок аппроксимации. В классе непрерывных функций  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{F}$  вместе с непрерывными производными до второго порядка разностное уравнение (8.1.15) имеет второй порядок аппроксимации. Можно показать, что решение конечно-разностного уравнения (8.1.15) имеет второй интегральный порядок точности при конечном числе точек разрыва. Конечно-разностное уравнение (8.1.15) запишем в следующем виде:

$$\mu_{k+1}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \mu_k(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \mathbf{p}_k \varphi_k^h = -\mathbf{f}_k^h, \quad (8.1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \beta; \quad \mathbf{p}_k = -\alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{a} dz; \\ \mathbf{f}_k^h &= \alpha^{-1} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{f} dz - \left( \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{F} dz + \\ &+ \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{b} dz \right)^{-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{F} dz. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Если разрывы функций совпадают с узловыми точками, то уравнение (8.1.16) будет иметь первый порядок аппроксимации. В этом случае можно принять

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{b_{k-1/2}^{-1}}{\Delta z_{k-1/2}} \beta; \quad \mathbf{p}_k = -\alpha^{-1} (\mathbf{a} \Delta z)_k; \\ \mathbf{f}_k^h &= \alpha^{-1} (\mathbf{f} \Delta z)_k - \mathbf{b}_{k+1/2}^{-1} \mathbf{F}_{k+1/2} + \mathbf{b}_{k-1/2}^{-1} \mathbf{F}_{k-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.18)$$

где снова использованы обозначения

$$(\psi)_k = \frac{1}{2}(\psi_k^+ + \psi_k^-); \quad \psi_k^\pm = \psi(z_k \pm O).$$

Аналогичным образом получим

$$\mathbf{J}_{k-1/2} = -\mu_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \mathbf{b}_{k-1/2} \mathbf{F}_{k-1/2}. \quad (8.1.19)$$

Уравнение (8.1.16) приведем к следующему виду:

$$\mathbf{a}_k \varphi_{k+1} - \mathbf{b}_k \varphi_k + \mathbf{c}_k \varphi_{k-1} = -\mathbf{f}_k, \quad (8.1.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \mu_{k+1}; \quad \mathbf{c}_k = \mu_k; \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_k + \mathbf{p}_k; \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k^h. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.21)$$

Обсудим теперь вопрос о граничных условиях. Если в центре слоя при  $z = 0$  источники отсутствуют, то согласно рассмотренному в § 5.1 необходимо положить

$$\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

и, с точностью до величин первого порядка малости, будем иметь

$$\varphi_0 = \varphi_1, \quad (8.1.22)$$

где

$$\varphi_0 = \varphi(0); \quad \varphi_1 = \varphi_1(\Delta z).$$

На внешней поверхности реактора  $S$  в качестве граничного условия необходимо принять условие

$$\mathbf{A}\varphi + \mathbf{B}\mathbf{J} = 0. \quad (8.1.23)$$

Предположим, что граничная точка совпадает с серединой последнего интервала. Тогда граничное условие (8.1.23) запишем в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{A}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \mathbf{B}\mathbf{J}_{n-1/2} = 0. \quad (8.1.23')$$

Подставим далее в соотношение (8.1.23') выражение для  $\mathbf{J}_{n-1/2}$  из (8.1.13). В результате приходим к равенству

$$\left( \frac{1}{2} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mu_n \right) \varphi_{n-1} + \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mu_n \right) \varphi_n = -\mathbf{B}\mathbf{b}_{n-1/2}^{-1} \mathbf{F}_{n-1/2}. \quad (8.1.24)$$

Равенство (8.1.24) умножим почленно на матрицу  $\left( \frac{1}{2} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mu_n \right)^{-1}$ . Тогда будем иметь

$$\varphi_{n-1} = -\Gamma \varphi_n + g \mathbf{F}_{n-1/2}, \quad (8.1.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \alpha_1^{-1} \alpha_2; \\ g &= \alpha_1^{-1} \alpha_3; \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mu_n; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mu_n; \\ \alpha_3 &= -\mathbf{B}\mathbf{b}_{n-1/2}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.26)$$

Соотношение (8.1.25) и будет требуемым граничным условием на внешней поверхности  $S$ .



В заключение выпишем окончательные формулы для решения кинетического уравнения в  $P_3$ -приближении:

$$\mathbf{a}_k = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{3(\Sigma_1 \Delta z)_{k+1/2}} & \frac{2}{3(\Sigma_1 \Delta z)_{k+1/2}} \\ 0 & \frac{3}{7(\Sigma_3 \Delta z)_{k+1/2}} \end{array} \right\|;$$

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{a}_{k-1}; \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_k + \mathbf{p}_k;$$

$$\mathbf{p}_k = \left\| \begin{array}{cc} (\Sigma_0 \Delta z)_k & 0 \\ -\frac{2}{3}(\Sigma_0 \Delta z)_k & \frac{5}{3}(\Sigma_2 \Delta z)_k \end{array} \right\|;$$

$$\mathbf{f}_k = \left| \begin{array}{c} (f_0 \Delta z)_k - \frac{(f_1 \Delta z)_{k+1/2}}{(\Sigma_1 \Delta z)_{k+1/2}} + \frac{(f_1 \Delta z)_{k-1/2}}{(\Sigma_1 \Delta z)_{k-1/2}} \\ -\frac{2}{3}(f_0 \Delta z)_k + \frac{5}{3}(f_2 \Delta z)_k - \frac{(f_3 \Delta z)_{k+1/2}}{(\Sigma_3 \Delta z)_{k+1/2}} + \frac{(f_3 \Delta z)_{k-1/2}}{(\Sigma_3 \Delta z)_{k-1/2}} \end{array} \right|$$

и аналогично

$$\alpha_1 = \left\| \begin{array}{cc} 2 - \frac{8}{\Sigma_1 \Delta z} & \frac{5}{2} - \frac{16}{3\Sigma_1 \Delta z} \\ \frac{1}{2} - \frac{4}{5\Sigma_1 \Delta z} & \frac{5}{4} - \frac{8}{5\Sigma_1 \Delta z} - \frac{24}{35\Sigma_3 \Delta z} \end{array} \right\|;$$

$$\alpha_2 = \left\| \begin{array}{cc} 2 + \frac{8}{3\Sigma_1 \Delta z} & \frac{5}{2} + \frac{16}{3\Sigma_1 \Delta z} \\ \frac{1}{2} + \frac{4}{5\Sigma_1 \Delta z} & \frac{5}{4} + \frac{24}{35\Sigma_3 \Delta z} + \frac{8}{5\Sigma_1 \Delta z} \end{array} \right\|;$$

$$\alpha_3 \mathbf{F} = \left| \begin{array}{c} \frac{8}{\Sigma_1} f_1 \\ \frac{12}{5\Sigma_1} f_1 + \frac{8}{5\Sigma_3} f_3 \end{array} \right|.$$

Последние соотношения имеют место только в точке с индексом  $n - 1/2$ .

## 8.2. Сферическая геометрия

Рассмотрим уравнения для сферической геометрии в векторно-матричной форме (5.1.21):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{KJ} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}; \\ \mathbf{L}\varphi + \mathbf{bJ} &= \mathbf{F}, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.1)$$

где  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$  — дифференциально-матричные операторы, определенные в § 5.1.

На внешней границе области необходимо поставить условие

$$\mathbf{A}\varphi + \mathbf{bJ} = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (8.2.2)$$

Введем в рассмотрение узловые точки  $r_k$  и  $r_{k+1/2}$ . Уравнение

$$\mathbf{KJ} + \mathbf{a}\varphi = \mathbf{f} \quad (8.2.3)$$

определим на интервале  $(r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$ , а уравнение

$$\mathbf{L}\varphi + \mathbf{bJ} = \mathbf{F} \quad (8.2.4)$$

— на интервале  $(r_{k-1}, r_k)$ . В пределах соответствующих интервалов в формулах (8.2.3) и (8.2.4) операторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$  приближенно представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{d}{dr} \mathbf{c}; & (r_{k-1/2} \leq r \leq r_{k+1/2}); \\ \mathbf{L} &= \frac{d}{dr} \mathbf{l}; & (r_{k-1} \leq r \leq r_k), \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5)$$

где  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{l}$  — матрицы, определенные следующим образом:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2\left(\frac{r}{r_k}\right) & 3\left(\frac{r}{r_k}\right)^4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4\left(\frac{r}{r_k}\right)^3 & 5\left(\frac{r}{r_k}\right)^6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6\left(\frac{r}{r_k}\right)^5 & 7\left(\frac{r}{r_k}\right)^8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix} 1 & 2\left(\frac{r}{r_{k-1/2}}\right)^3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3\left(\frac{r}{r_{k-1/2}}\right)^2 & 4\left(\frac{r}{r_{k-1/2}}\right)^5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5\left(\frac{r}{r_{k-1/2}}\right)^4 & 6\left(\frac{r}{r_{k-1/2}}\right)^7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

С учетом равенств (8.2.5), в пределах соответствующих интервалов изменения переменной  $r$  уравнения (8.2.3) и (8.2.4) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} \mathbf{cJ} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}; \\ \frac{d}{dr} \mathbf{l}\varphi + \mathbf{bJ} &= \mathbf{F}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

Первое из уравнений (8.2.6) проинтегрируем в пределах  $(r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$ . Тогда получим

$$\mathbf{c}_{k+1/2} \mathbf{J}_{k+1/2} - \mathbf{c}_{k-1/2} \mathbf{J}_{k-1/2} + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \mathbf{a}\varphi dr = \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \mathbf{f} dr. \quad (8.2.7)$$

Проинтегрируем далее это же уравнение в пределах  $(r_{k-1/2}, r)$ . В результате будем иметь

$$\mathbf{c}\mathbf{J} = \mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{J}_{k-1/2} - \int_{r_{k-1/2}}^r (\alpha\varphi - \mathbf{f}) dr'. \quad (8.2.8)$$

Из второго уравнения системы (8.2.6) найдем  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = -\mathbf{b}^{-1}\frac{d}{dr}\mathbf{l}\varphi + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{F}. \quad (8.2.9)$$

Подставим соотношение (8.2.9) в равенство (8.2.8). Тогда получим

$$-\frac{d}{dr}\mathbf{l}\varphi = \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1}\mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{J}_{k-1/2} - \mathbf{F} - \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1} \int_{r_{k-1/2}}^r (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f}) dr'. \quad (8.2.10)$$

Проинтегрируем равенство (8.2.10) по  $r$  в пределах  $(r_{k-1}, r)$  и результат разрешим относительно вектора  $\mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{J}_{k-1/2}$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{J}_{k-1/2} = -\left(\int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1} dr\right)^{-1} \left[ \mathbf{l}_k\varphi_k - \mathbf{l}_{k-1}\varphi_{k-1} - \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{F} dr \right] + \varepsilon_k, \quad (8.2.11)$$

где

$$\varepsilon_k = \left(\int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1} dr\right)^{-1} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1} dr \int_{r_{k-1/2}}^r (\mathbf{a}\varphi - \mathbf{f}) dr'. \quad (8.2.12)$$

Если разрывы функций совпадают с узловыми точками, то в классе функций  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{F}\}$  и  $\{\varphi, \mathbf{J}\}$  величина  $\varepsilon_k$  будет иметь локальный первый порядок аппроксимации, во всех других случаях величина  $\varepsilon_k$  будет иметь нулевой локальный порядок аппроксимации.

Предполагая, что разрывы совпадают с узловыми точками  $r_k$ , положим  $\varepsilon_k = 0$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{J}_{k-1/2}^h = -\left(\int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1} dr\right)^{-1} \left[ \mathbf{l}_k\varphi_k^h - \mathbf{l}_{k-1}\varphi_{k-1}^h - \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{F} dr \right]. \quad (8.2.13)$$

Пользуясь соотношением (8.2.13), исключим из уравнения (8.2.7) величины  $\mathbf{c}_{k\pm 1/2}\mathbf{J}_{k\pm 1/2}^h$ . В результате приходим к следующему конечно-разностному уравнению:

$$\mathbf{a}_k \varphi_{k+1}^h - \mathbf{b}_k \varphi_k^h + \mathbf{c}_k \varphi_{k-1}^h = -\mathbf{f}_k^h, \quad (8.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \left( \int_{r_k}^{r_{k+1}} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} \mathbf{l}_{k+1}; \quad \mathbf{c}_k = \left( \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} \mathbf{l}_{k-1}; \\ \mathbf{b}_k &= \left[ \left( \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} + \left( \int_{r_k}^{r_{k+1}} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} \right] \mathbf{l}_k + \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \mathbf{a} dr; \\ \mathbf{f}_k &= \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \mathbf{f} dr + \left( \int_{r_k}^{r_{k+1}} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \mathbf{F} dr - \\ &\quad - \left( \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{b} \mathbf{c}^{-1} dr \right)^{-1} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{F} dr. \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

Итак, мы пришли к конечно-разностному уравнению локально первого порядка и интегрально второго порядка точности. Можно показать, что, не нарушая порядка точности конечно-разностного уравнения (8.2.14), выражения (8.2.15) существенно упрощаются, если положить

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \mathbf{c}_{k+1/2}^{-1} \mathbf{b}_{k+1/2}^{-1} \mathbf{l}_{k+1} \Delta r_{k+1/2}^{-1}; \\ \mathbf{c}_k &= \mathbf{c}_{k-1/2}^{-1} \mathbf{b}_{k+1/2}^{-1} \mathbf{l}_{k-1} \Delta r_{k-1/2}^{-1}; \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{c}_{k-1/2}^{-1} (\mathbf{b}_{k-1/2}^{-1} \Delta r_{k-1/2}^{-1} + \mathbf{c}_{k+1/2}^{-1} \mathbf{b}_{k+1/2}^{-1} \Delta r_{k+1/2}^{-1}) \mathbf{l}_k + (\mathbf{a} \Delta r)_k; \\ \mathbf{f}_k &= (\mathbf{f} \Delta r)_k + (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F} \Delta r)_{k+1/2} - \mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F} \Delta r_{k-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.16)$$

где использовано обозначение

$$(\psi)_k = \frac{1}{2} (\psi_k^+ + \psi_k^-); \quad \psi_k^\pm = \psi(r_k \pm 0).$$

Для получения граничных условий запишем систему уравнений сферических гармоник (5.1.19) в окрестности начала координат. В этих уравнениях приближенно положим

$$\frac{1}{r}\varphi_{m-1} = \frac{d\varphi_{m-1}}{dr}, \quad \frac{1}{r}\varphi_{m+1} = \frac{d\varphi_{m+1}}{dr}. \quad (8.2.17)$$

Тогда система уравнений (5.1.19) переписывается в виде

$$\begin{aligned} m(2-m)\frac{d\varphi_{m-1}}{dr} + (m+1)(m+3)\frac{d\varphi_{m+1}}{dr} + \\ + (2^m + 1)\Sigma_m\varphi_m = (2m+1)f_m. \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

Систему уравнений (8.2.18) отдельно запишем для  $m$  четных и  $m$  нечетных. В результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2m(2-2m)\frac{d\varphi_{2m-1}}{dr} + (2m+1)(2m+3)\frac{d\varphi_{2m+1}}{dr} + \\ + (4m+1)\Sigma_{2m}\varphi_{2m} = (4m+1)f_{2m}, \\ (2m+1)(1-2m)\frac{d\varphi_{2m}}{dr} + (2m+2)(2m+4)\frac{d\varphi_{2m+2}}{dr} + \\ + (4m+3)\Sigma_{2m+1}\varphi_{2m+1} = (4m+3)f_{2m+1}, \\ (m=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8.2.19)$$

Аналогично тому, как это сделано в § 5.1, введем в рассмотрение вектор-функцию  $\varphi$  с компонентами  $\varphi_{2m}$  и  $\mathbf{J}$  с компонентами  $\varphi_{2m+1}$  и систему уравнений (8.2.19) запишем в векторно-матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}^0 \frac{d\mathbf{J}}{dr} + \mathbf{a}\varphi = \mathbf{f}; \\ \mathbf{l}^0 \frac{d\varphi}{dr} + \mathbf{b}\mathbf{J} = \mathbf{F}, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.20)$$

где  $\mathbf{c}^0$  и  $\mathbf{l}^0$  — матрицы, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{c}^0 = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 \cdot 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 \cdot 5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 \cdot 4 & 5 \cdot 7 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -4 \cdot 6 & 7 \cdot 9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|;$$

$$I^0 = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 0 & 0 & \dots \\ -1 \cdot 3 & 4 \cdot 6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -3 \cdot 5 & 6 \cdot 8 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|.$$

Что касается остальных величин в (8.2.18), то они определены таким же образом, как в системе (5.1.21).

Поскольку матрицы  $c^0$  и  $I^0$  не зависят от координат, систему уравнений (8.2.20) можно записать в виде, аналогичном (8.2.6):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dr} c^0 \mathbf{J} + \mathbf{a} \varphi = \mathbf{f}; \\ \frac{d}{dr} I^0 \varphi + \mathbf{b} \mathbf{J} = \mathbf{F}. \end{array} \right\} \quad (8.2.21)$$

Далее, при получении конечно-разностных уравнений, соответствующих системе (8.2.21), будем поступать совершенно аналогично тому, как и при получении разностной системы, соответствующей (8.2.6). В результате приходим к разностному уравнению (8.2.14), то есть

$$\mathbf{a}_k \varphi_{k+1}^h - \mathbf{b}_k \varphi_k^h + \mathbf{c}_k \varphi_{k-1}^h = -\mathbf{f}_k^h, \quad (8.2.22)$$

где матрицы  $\mathbf{a}_k$ ,  $\mathbf{b}_k$ ,  $\mathbf{c}_k$  и свободный член-вектор  $\mathbf{f}_k^h$  определяются формулами (8.2.15), где матрицы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{I}$  необходимо заменить на  $c^0$  и  $I^0$ . С точностью до величин первого порядка аппроксимации будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_k = c^0 \mathbf{b}_{k+1/2}^{-1} I^0 \Delta r_{k+1/2}^{-1}; \\ \mathbf{c}_k = c^0 \mathbf{b}_{k-1/2}^{-1} I^0 \Delta r_{k-1/2}^{-1}; \\ \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_k + (\mathbf{a} \Delta r)_k; \\ \mathbf{f}_k = (\mathbf{f} \Delta r)_k + (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F} \Delta r)_{k+1/2} - (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F} \Delta r)_{k-1/2}. \end{array} \right\} \quad (8.2.23)$$

Очевидно, что конечно-разностное уравнение (8.2.22) может быть использовано только в непосредственной окрестности от точки  $r = 0$ .

Для получения граничных соотношений продолжим решение задачи на половину расчетного шага от точки  $r = 0$  в сто-

рону отрицательных значений  $r$  и рассмотрим следующие узловые точки:  $r_{-1} = -\frac{\Delta r}{2}$ ,  $r_0 = \frac{\Delta r}{2}$ ,  $r_1 = \frac{3}{2} \Delta r$ , соответствующие индексам  $k = -1, 0, 1$ . Запишем теперь разностное уравнение (8.2.22) для точки  $k = 0$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{a}_0 \varphi_1^h - \mathbf{b}_0 \varphi_0^h + \mathbf{c}_0 \varphi_{-1}^h = -\mathbf{f}_0^h, \quad (8.2.24)$$

где матрицы  $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$  и вектор  $\mathbf{f}_0^h$  определяются формулами (8.2.23) при  $k = 0$ , и используем симметрию решения относительно точки  $r = 0$ . В таком случае необходимо принять

$$\varphi_{-1}^h = \varphi_0^h. \quad (8.2.25)$$

С учетом равенства (8.2.25) разностное уравнение (8.2.24) принимает вид

$$\mathbf{a}_0 \varphi_1^h - (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0) \varphi_0^h = -\mathbf{f}_0^h. \quad (8.2.26)$$

Уравнение (8.2.26) преобразуем следующим образом. Умножим его почленно слева на матрицу  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^{-1}$ . Тогда будем иметь

$$\varphi_0^h = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^{-1} \mathbf{a}_0 \varphi_1^h + (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^{-1} \mathbf{f}_0^h. \quad (8.2.27)$$

Итак, мы пришли к соотношению, которое учитывает граничные условия в центре симметрии системы. На внешней границе области будем иметь условие

$$\mathbf{A} \varphi_n^h + \mathbf{B} \mathbf{J}_{n-1/2}^h = 0. \quad (8.2.28)$$

Предположим, что граница области совпадает с серединой последнего интервала. Тогда уравнение (8.2.28) приближенно запишется в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{A}(\varphi_n^h + \varphi_{n-1}^h) \mathbf{B} \mathbf{J}_{n-1/2}^h = 0. \quad (8.2.28')$$

Подставляя в (8.2.28') выражение для  $\mathbf{J}_{n-1/2}^h$ , получим

$$\varphi_{n-1} = -\Gamma \varphi_n + \mathbf{g} \mathbf{F}_{n-1/2}, \quad (8.2.29)$$



где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \alpha_1^{-1} \alpha_2; \\ \mathbf{g} &= \alpha_1^{-1} \alpha_3; \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1/2}^{-1} (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \Delta r)_{n-1/2}^{-1} \mathbf{l}_{n-1}; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1/2}^{-1} (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \Delta r)_{n-1/2}^{-1} \mathbf{l}_n; \\ \alpha_3 &= -\mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1/2}^{-1} (\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \Delta r)_{n-1/2}^{-1} \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.30)$$

В  $P_3$ -приближении будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|; & \mathbf{c}_k &= \left\| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right\|; \\ \mathbf{p}_k &= \left\| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\|; & \mathbf{f}_k &= \left| \begin{array}{c} f_{1k} \\ f_{2k} \end{array} \right|; \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_k + \mathbf{p}_k + \left\| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \frac{r_k}{r_{k-1}} \\ c_{21} & 2c_{21} + d \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{3(\Sigma_1 \Delta r)_{k+1/2}}; & a_{12} &= \frac{2}{3} \left( \frac{r_{k+1}}{r_{k+1/2}} \right)^3 \frac{1}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k+1/2}}; \\ a_{21} &= 0; & a_{22} &= \frac{3}{7} \left( \frac{r_{k+1/2}}{r_{k+1}} \right)^2 \frac{1}{(\Sigma_3 \Delta r)_{k+1/2}}; \\ c_{11} &= \frac{1}{3(\Sigma_1 \Delta r)_{k-1/2}} \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^2; \\ c_{12} &= \frac{2}{3} \left( \frac{r_{k-1}}{r_{k+1/2}} \right)^2 \left( \frac{r_{k-1}}{r_{k-1/2}} \right) \frac{1}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k-1/2}}; \\ c_{21} &= \frac{2}{9} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^4 \left( \frac{r_k}{r_{k-1/2}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^3 \right] \frac{1}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k-1/2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= 2c_{21} \left( \frac{r_{k-1}}{r_{k-1/2}} \right)^3 + \frac{3}{7} \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^4 \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k-1}} \right)^2 \frac{1}{(\Sigma_3 \Delta r)_{k-1/2}}; \\
p_{11} &= \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^2 (\Sigma_0 \Delta r)_k; \quad p_{12} = 0; \\
p_{21} &= -\frac{2}{3} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^7 (\Sigma_0 \Delta r)_k; \\
p_{22} &= \frac{5}{3} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^4 (\Sigma_2 \Delta r)_k; \\
d &= \frac{3}{7} \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^4 \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k-1}} \right) \frac{1}{(\Sigma_3 \Delta r)_{k-1/2}}; \\
f_{1k} &= \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^2 (f_0 \Delta r)_k - \frac{(f_1 \Delta r)_{k+1/2}}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k+1/2}} + \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^2 \frac{(f_1 \Delta r)_{k-1/2}}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k-1/2}}; \\
f_{2k} &= -\frac{2}{3} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^7 (f_0 \Delta r)_k + \frac{5}{3} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^4 (f_2 \Delta r)_k - \frac{(f_3 \Delta r)_{k+1/2}}{(\Sigma_3 \Delta r)_{k+1/2}} + \\
&\quad + \frac{2}{3} \left( \frac{r_k}{r_{k+1/2}} \right)^4 \left( \frac{r_k}{r_{k-1/2}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^3 \right] \times \\
&\quad \times \frac{(f_1 \Delta r)_{k-1/2}}{(\Sigma_1 \Delta r)_{k-1/2}} + \left( \frac{r_{k-1/2}}{r_{k+1/2}} \right)^4 \frac{(f_3 \Delta r)_{k-1/2}}{(\Sigma_3 \Delta r)_{k-1/2}}.
\end{aligned}$$

Далее получим соотношения для условия в центре системы

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\Sigma_1} & \frac{8}{\Sigma_1} \\ 0 & -\frac{45}{7\Sigma_3} \end{array} \right\|; \quad \mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0 = \left\| \begin{array}{cc} \Sigma_0 \Delta r^2 + \frac{1}{\Sigma_1} & \frac{8}{\Sigma_1} \\ & 5\Sigma_2 \Delta r^2 - \frac{45}{7\Sigma_3} \end{array} \right\|; \\
\mathbf{f}_0^h &= \left| \begin{array}{c} f_{0,0} \Delta r^2 - \frac{3}{\Sigma_1} (f_{1,1/2} - f_{1,-1/2}) \Delta r \\ 5f_{2,0} \Delta r^2 - \frac{15}{\Sigma_3} (f_{3,1/2} - f_{3,-1/2}) \Delta r \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Здесь второй индекс у компонент  $f_{jk}^h$  указывает на номер узловой точки, причем за точку с индексом нуль принята точка  $r_0 = \frac{\Delta r}{2}$ .

Наконец, для условия на внешней границе получим следующие соотношения:

$$\alpha_1 = \left\| \begin{array}{cc} 2 - \frac{8}{3\Sigma_1\Delta r} & \frac{5}{2} + \frac{8}{\Sigma_1} \left( \frac{1}{R} - \frac{2}{3\Delta r} \right) \\ \frac{1}{2} - \frac{4}{5\Sigma_1\Delta r} & \frac{5}{4} + \frac{4}{5\Sigma_1} \left( \frac{3}{R} - \frac{2}{\Delta r} \right) - \frac{24}{35\Sigma_3} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\Delta r} \right) \end{array} \right\| ;$$

$$\alpha_2 = \left\| \begin{array}{cc} 2 + \frac{8}{3\Sigma_1\Delta r} & \frac{5}{2} + \frac{8}{\Sigma_1} \left( \frac{1}{R} + \frac{2}{3\Delta r} \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{4}{5\Sigma_1\Delta r} & \frac{5}{4} + \frac{4}{5\Sigma_1} \left( \frac{3}{R} + \frac{2}{\Delta r} \right) - \frac{24}{35\Sigma_3} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\Delta r} \right) \end{array} \right\| ;$$

$$\alpha_3 \mathbf{F} = \left| \begin{array}{c} \frac{8}{\Sigma_1} f_1 \\ \frac{12}{5\Sigma_1} f_1 + \frac{8}{5\Sigma_3} f_3 \end{array} \right| ,$$

где  $R$  — радиус внешней границы области. Всем величинам, входящим в матрицы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и вектор  $F$ , следует приписать номер  $n - 1/2$ .

### 8.3. Цилиндрическая геометрия

Для задач одномерной цилиндрической геометрии метод получения конечно-разностных уравнений аналогичен рассмотренному случаю сферической геометрии. Указанный метод проиллюстрируем на случае уравнений в  $P_3$ -приближении. Рассмотрение алгоритма на случай  $P_n$ -приближений очевидно.

С этой целью рассмотрим систему уравнений (5.2.7):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{KJ} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}; \\ \mathbf{L}\varphi + \mathbf{bJ} &= \mathbf{F}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.1)$$

где операторы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$ , матрицы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и векторы  $\varphi$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{F}$  определены в § 5.2.

На внешней границе поставлено условие (5.2.21):

$$\mathbf{A}\varphi + \mathbf{BJ} = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (8.3.2)$$

Введем в рассмотрение точки  $r_k$  и  $r_{k+1/2}$ . Уравнение

$$\mathbf{KJ} + \mathbf{a}\varphi = \mathbf{f}$$

определим на интервале  $(r_{k-1/2}, r_{k+1/2})$ , а уравнение

$$\mathbf{L}\varphi + \mathbf{bJ} = \mathbf{F}$$

– на интервале  $(r_{k-1}, r_k)$ . В пределах соответствующих интервалов операторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$  приближенно представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{d}{dr} \mathbf{c}; & (r_{k-1/2} \leq r \leq r_{k+1/2}); \\ \mathbf{L} &= \frac{d}{dr} \mathbf{l}; & (r_{k-1} \leq r \leq r_k), \end{aligned} \right\} \quad (8.3.3)$$

где  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{l}$  — матрицы, определенные следующим образом:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \frac{r}{r_k} & 0 & 0 \\ -\frac{r}{r_k} & \frac{r}{r_k} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{r_k}{r} & -\frac{1}{12} \frac{r_k}{r} & \frac{1}{24} \left( \frac{r}{r_k} \right)^3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \left( \frac{r}{r_{k-1/2}} \right)^2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} \left( \frac{r}{r_{k-1/2}} \right)^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \left( \frac{r_{k-1/2}}{r} \right)^2 \end{vmatrix}.$$

С учетом равенств (8.3.3) на каждом из указанных выше интервалов система уравнений (8.3.1) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} \mathbf{cJ} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}, \\ \frac{d}{dr} \mathbf{l}\varphi + \mathbf{bJ} &= \mathbf{F}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4)$$

Заметим, что система уравнений (8.3.4) формально совпадает с системой (8.2.6) для сферически-симметричных задач. Поэтому для получения соответствующих уравнений в цилиндрической геометрии воспользуемся изложенным в § 8.2 методом. В результате приходим к конечно-разностному уравнению

$$\mathbf{a}_k \varphi_{k+1}^h - \mathbf{b}_k \varphi_k^h + \mathbf{c}_k \varphi_{k-1}^h = -\mathbf{f}_k^h, \quad (8.3.5)$$

где матрицы  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k$  и вектор  $\mathbf{f}_k^h$  определяются формулами (8.2.15). С учетом дальнейших упрощений приходим к формулам (8.2.16), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \mathbf{c}\varphi_{k+1/2}\mathbf{b}_{k+1/2}^{-1}\mathbf{l}_{k+1}\Delta r_{k+1/2}^{-1}; \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{c}_{k-1/2}(\mathbf{b}_{k-1/2}^{-1}\Delta r_{k-1/2}^{-1} + \mathbf{c}_{k+1/2}\mathbf{b}_{k+1/2}^{-1}\Delta r_{k+1/2}^{-1})\mathbf{l}_k + (\mathbf{a}\Delta r)_k; \\ \mathbf{c}_k &= \mathbf{c}_{k-1/2}\mathbf{b}_{k-1/2}^{-1}\mathbf{l}_{k-1}\Delta r_{k-1/2}^{-1}; \\ \mathbf{f}_k &= (\mathbf{f}\Delta r)_k + (\mathbf{c}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{F}\Delta r)_{k+1/2} - (\mathbf{c}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{F}\Delta r)_{k-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.6)$$

Переходим теперь к постановке граничных условий в центре симметрии и на внешней границе области. Для получения граничного условия в центре симметрии запишем уравнения сферических гармоник в окрестности точки  $r = 0$ . Полагая

$$\frac{\varphi_{11}}{r} = \frac{d\varphi_{11}}{dr}, \quad \frac{\varphi_{31}}{r} = \frac{d\varphi_{31}}{dr}, \quad \frac{\varphi_{33}}{r} = \frac{d\varphi_{33}}{dr}, \quad \frac{\varphi_{22}}{r} = \frac{d\varphi_{22}}{dr}.$$

Систему уравнений (5.2.15) и (5.2.16) запишем в следующем виде:

для четных моментов

$$\left. \begin{aligned} 2\frac{d\varphi_{11}}{dr} + \Sigma_0\varphi_{00} &= f_{00}; \\ 2\frac{d\varphi_{31}}{dr} - 2\frac{d\varphi_{11}}{dr} + 5\Sigma_2\varphi_{20} &= 5f_{20}; \\ \frac{1}{6}\frac{d\varphi_{33}}{dr} + \frac{5}{12}\Sigma_2\varphi_{22} &= \frac{5}{12}f_{22} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.7)$$

и для нечетных моментов

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_{00}}{dr} - \frac{d\varphi_{20}}{dr} + \frac{3}{2}\frac{d\varphi_{22}}{dr} + 3\Sigma_1\varphi_{11} &= 3f_{11}; \\ \frac{d\varphi_{20}}{dr} - \frac{1}{4}\frac{d\varphi_{22}}{dr} + \frac{7}{6}\Sigma_3\varphi_{31} &= \frac{7}{6}f_{31}; \\ -\frac{1}{24}\frac{d\varphi_{22}}{dr} + \frac{7}{360}\Sigma_3\varphi_{33} &= \frac{7}{360}f_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.8)$$

Систему уравнений (8.3.7), (8.3.8) запишем в векторно-матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_0\frac{d}{dr}\mathbf{J} + \mathbf{a}\varphi &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{l}^0\frac{d\varphi}{dr} + \mathbf{b}\mathbf{J} &= \mathbf{F}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.9)$$

где

$$\mathbf{c}_0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{l}^0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/24 \end{vmatrix}.$$

Итак, мы пришли к уравнениям (8.3.9), которые формально совпадают с соответствующей системой (8.2.21) для сферически-симметричного случая.

В результате преобразований, аналогичных рассмотренным в § 8.2, приходим к граничному соотношению (8.2.26), или

$$\mathbf{a}_0 \varphi_1^h - (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0) \varphi_0^h = -\mathbf{f}_0^h, \quad (8.3.10)$$

где матрицы  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{c}_0$  и вектор  $\mathbf{f}_0^h$  определяются соотношениями (8.2.23) при  $k = 0$ . Разумеется, что входящие в эти выражения величины необходимо выбирать соответствующими цилиндрическому случаю.

Соотношение (8.3.10) преобразуем к виду

$$\varphi_0^h = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^{-1} \mathbf{a}_0 \varphi_1^h + (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^{-1} \mathbf{f}_0^h. \quad (8.3.11)$$

На внешней границе области будем иметь условие (5.2.21), то есть

$$\mathbf{A} \varphi_n^h + \mathbf{B} \mathbf{J}_{n-1/2}^h = 0, \quad (8.3.12)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  определены в § 5.2.

Подставляя в соотношение (8.3.12) выражение для  $\mathbf{J}_{n-1/2}^h$ , приходим к равенству

$$\varphi_{n-1}^h = -\Gamma \varphi_n^h + \mathbf{g} \mathbf{F}_{n-1/2}, \quad (8.3.13)$$

где матрицы  $\Gamma$  и  $\mathbf{g}$  определены формулами (8.2.30).

# 9

## Решение конечно-разностных уравнений

### 9.1. Метод факторизации уравнения диффузии

В литературе имеется большое число работ, посвященных методам решения конечно-разностных уравнений. Для случая одномерных уравнений наиболее эффективным оказался метод факторизации. Метод факторизации оказался также удобным аппаратом для решения двумерных конечно-разностных уравнений.

В настоящей главе будут рассмотрены наиболее эффективные численные методы решения конечно-разностных уравнений эллиптического типа, которые получили широкое распространение в ядерно-физических расчетах. Более подробные сведения по этому вопросу можно получить в книге В. И. Саульева [323].

Для решения уравнений диффузии можно применить метод факторизации. Сущность метода заключается в разложении дифференциального оператора диффузии Штурмана – Лиувилля на более простые операторы первого порядка. Такое разложение в конечном счете приводит к системе уравнений первого порядка, эквивалентной уравнению диффузии.

Впервые метод факторизации дифференциальных уравнений был предложен Э. Айнсом [22]. Для расчета критических масс реакторов он был использован А. Томпсоном [507]. В дальнейшем этот метод был существенно развит В.С. Владимировым [69].

Рассмотрим уравнение диффузии для однородной плоской области  $-1 \leq x \leq 1$ . Тогда приходим к уравнению



$$D \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \Sigma \varphi = -f(x). \quad (9.1.1)$$

Если предположить, что функции  $D$ ,  $\Sigma$  и  $f$  симметричны относительно  $x = 0$  и на внешней границе поток считается равным нулю, то приходим к системе граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \varphi &= 0 \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.2)$$

Требуется найти решение задачи (9.1.1), (9.1.2) при  $0 \leq x \leq 1$ . Рассмотрим оператор

$$\mathbf{L} = D \frac{d^2}{dx^2} - \Sigma \quad (9.1.3)$$

и представим его в виде произведения двух операторов первого порядка:

$$\mathbf{L} = D \left( \frac{d}{dx} + \beta \right) \left( \frac{d}{dx} - \alpha \right), \quad (9.1.4)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — функции, которые следует найти из условия

$$D \left( \frac{d}{dx} + \beta \right) \left( \frac{d}{dx} - \alpha \right) \equiv D \frac{d^2}{dx^2} - \Sigma. \quad (9.1.5)$$

Для выполнения тождества (9.1.5) достаточно потребовать, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ \frac{d\beta}{dx} + \beta^2 &= \frac{\Sigma}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.6)$$

Введем в рассмотрение новую функцию  $z$  по формуле

$$\frac{d\varphi}{dx} - \beta \varphi = -z.$$

Тогда уравнение диффузии сведется к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} + \beta^2 &= \frac{\Sigma}{D}; \\ \frac{dz}{dx} + \beta z &= \frac{f}{D}; \\ \frac{d\varphi}{dx} - \beta\varphi &= -z. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.7)$$

Систему (9.1.7) будем называть факторизованной.

Для полной определенности задачи к системе (9.1.7) присоединим граничные условия. Для этого воспользуемся условиями (9.1.2) и третьим из равенств (9.1.7).

Очевидно, что условия (9.1.2) будут удовлетворены, если положить

$$\left. \begin{aligned} \beta(0) &= 0, \\ z(0) &= 0, \\ \varphi(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.8)$$

Таким образом, мы пришли к эквивалентной задаче (9.1.7), (9.1.8), которая может быть решена последовательно: сначала находится  $\beta(x)$ , затем  $z(x)$  и, наконец, функция  $\varphi(x)$ . Следует отметить, что система (9.1.7), (9.1.8) может быть решена приближенно с помощью известных конечно-разностных методов. При этом расчет функции  $\beta$  и  $z$  необходимо вести от узла к узлу в сторону возрастающих значений  $x$ , а расчет функции  $\varphi$  — в сторону убывающих значений  $x$ .

## 9.2. Метод факторизации конечно-разностных уравнений для одномерных областей

Метод факторизации дифференциального уравнения диффузии, рассмотренный в предыдущем параграфе, может быть обобщен и применен непосредственно к конечно-разностному уравнению диффузии. Сущность метода состоит в том, что разностные уравнения второго порядка сводятся к последовательному решению трех разностных уравнений первого порядка. Метод разностной факторизации был предложен

И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским [96] и, независимо от них, А.С. Кронродом (см. [84]) и Штарком (см. [434]).

Итак, рассмотрим конечно-разностное уравнение диффузии

$$a_k \varphi_{k+1} - b_k \varphi_k + c_k \varphi_{k-1} = -f_k, \quad (9.2.1)$$

где  $a_k, b_k, c_k, f_k$  — заданные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_k + c_k \leq b_k,$$

причем строгое неравенство имеет место хотя бы в одной точке области.

Уравнение (9.2.1) почленно поделим на  $a_k$ . В результате получим

$$\varphi_{k+1} - B_k \varphi_k + C_k \varphi_{k-1} = -F_k, \quad (9.2.2)$$

где

$$B_k = \frac{b_k}{a_k}; \quad C_k = \frac{c_k}{a_k}; \quad F_k = \frac{f_k}{a_k}. \quad (9.2.3)$$

Введем следующее обозначение:

$$L\varphi_k = \varphi_{k+1} - B_k \varphi_k + C_k \varphi_{k-1}.$$

Оператор  $L$  представим в виде произведения двух разностных операторов первого порядка

$$L = L_1 L_2,$$

так, чтобы уравнение (9.2.2) представлялось в виде

$$L_1 L_2 \varphi_k = -F_k. \quad (9.2.4)$$

Операторы  $L_1$  и  $L_2$  определим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L_1 z_k &= z_k - \frac{z_{k+1}}{\beta_{k+1}}, \\ L_2 \varphi_k &= C_k \varphi_{k-1} - \beta_k \varphi_k, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.5)$$

где  $\beta_k$  — произвольные числа, которые найдем из условия, чтобы

$$L\varphi_k \equiv L_1 L_2 \varphi_k. \quad (9.2.6)$$

Очевидно, тождество (9.2.6) будет иметь место в том случае, если величины  $\beta_k$  удовлетворяют следующему уравнению:

$$\beta_k = -\frac{C_{k+1}}{\beta_{k+1}} + B_k. \quad (9.2.7)$$

Разрешая уравнение (9.2.7) относительно величины  $\beta_{k+1}$ , приходим к следующему разностному уравнению первого порядка для  $\beta_k$ :

$$\beta_{k+1} = \frac{C_{k+1}}{B_k - \beta_k}. \quad (9.2.8)$$

Таким образом, разностное уравнение (9.2.2) факторизуется при условии, что  $\beta_k$  является решением уравнения (9.2.8). Полагая

$$z_k = \mathbf{L}_2 \varphi_k,$$

мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} z_k - \frac{z_{k+1}}{\beta_{k+1}} &= -\mathbf{F}_k, \\ C_k \varphi_{k-1} - \beta_k \varphi_k &= z_k. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.9)$$

Разрешая первое из уравнений (9.2.9) относительно  $z_{k+1}$ , а второе — относительно  $\varphi_k$  и объединяя полученные уравнения с (9.2.8), приходим к следующей факторизованной системе разностных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k+1} &= \frac{C_{k+1}}{B_k - \beta_k}, \\ z_{k+1} &= \beta_{k+1}(z_k + \mathbf{F}_k), \\ \varphi_k &= \frac{\beta_{k+1} \varphi_{k+1} + z_{k+1}}{C_{k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.10)$$

Можно показать, что при ведении счета с помощью системы разностных уравнений (9.2.10) ошибки округления не будут возрастать от узла к узлу и, следовательно, счет будет устойчив. Особенно просто это доказать в том случае, когда коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  и  $c_k$  в разностном уравнении (9.2.1) не зависят от индекса  $k$ . Для простоты рассмотрим плоскую область. В этом случае уравнение (9.2.1) имеет вид

$$\varphi_{k+1} - (2 + \alpha)\varphi_k + \varphi_{k-1} = -f_k,$$

где  $\alpha = \frac{\Sigma \Delta x^2}{D}$ . В этом случае  $B_k = 2 + \alpha$ ,  $C_k = 1$  и, следовательно,

$$\beta_{k+1} = \frac{1}{2 + \alpha - \beta_k}. \quad (9.2.11)$$

При  $k \rightarrow \infty$   $\beta_{k+1} \rightarrow \beta$ ,  $\beta_k \rightarrow \beta$  и асимптотически мы будем иметь

$$\beta = \frac{1}{2 + \alpha - \beta}.$$

Это уравнение приводится к квадратному:

$$\beta^2 - (2 + \alpha)\beta + 1 = 0.$$

Интересующее нас решение уравнения имеет вид

$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)}. \quad (9.2.12)$$

Поскольку  $\alpha > 0$ , то отсюда следует, что

$$\beta < 1,$$

а это значит, что при решении второго и третьего уравнений (9.2.10), по крайней мере вдали от границ, ошибка округления, допущенная в узле, будет затухать по закону

$$\varepsilon_n = \beta^{n-k} \varepsilon_k.$$

Общее доказательство счетной устойчивости факторизованной системы дано О. В. Локуциевским [221], а также В. К. Саулевым [323].

Определим теперь начальные значения для величин  $\beta_k, z_k$  и  $\varphi_k$  таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям для уравнения диффузии. С этой целью рассмотрим два случая, а именно: когда на внутренней границе системы при  $r = 0$  задано условие

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\gamma} \varphi \quad (9.2.13)$$

и на внешней границе при  $r = R$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\gamma} \varphi. \quad (9.2.14)$$

В первом случае мы приходим к условию (6.6.13):

$$\varphi_0 = \frac{1 - \frac{\Delta r}{2\gamma}}{1 + \frac{\Delta r}{2\gamma}} \varphi_1. \quad (9.2.15)$$

Это условие соответствует случаю, когда в центре системы находится поглощающий блок.

Аналогично на внешней границе при  $r = R$  должно выполняться соотношением (6.6.9):

$$\varphi_{n-1} = \Gamma \varphi_n + G. \quad (9.2.16)$$

Найдем начальные данные для функций  $\beta_k, z_k$  и  $\varphi_k$  при условии (9.2.15), (9.2.16). Для этого в третьем уравнении из системы (9.2.10) сначала положим  $k = 0$ . Тогда будем иметь

$$\varphi_0 = \frac{\beta_1}{C_1} \varphi_1 + \frac{z_1}{C_1}. \quad (9.2.17)$$

Сравнивая выражения (9.2.15) и (9.2.17), приходим к выводу, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1 - \frac{\Delta r}{2\gamma}}{1 + \frac{\Delta r}{2\gamma}} C_1, \\ z_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.18)$$

Чтобы найти начальное условие для  $\varphi_k$ , снова воспользуемся третьим уравнением из системы (9.2.10), в котором положим  $k = n - 1$ . Тогда получим

$$\varphi_{n-1} = \frac{\beta_n}{C_n} \varphi_n + \frac{z_n}{C_n}. \quad (9.2.19)$$

Объединяя равенства (9.2.16) и (9.2.19), приходим к системе уравнений для двух неизвестных  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n-1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n-1} &= \Gamma \varphi_n + G, \\ \varphi_{n-1} &= \frac{\beta_n}{C_n} \varphi_n + \frac{z_n}{C_n}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.20)$$

Вычитая из одного уравнения другое и разрешая полученное выражение относительно  $\varphi_n$ , будем иметь

$$\varphi_n = \frac{\frac{z_n}{C_n} - G}{\Gamma - \frac{\beta_n}{C_n}}. \quad (9.2.21)$$

В выражении (9.2.21) величины  $\beta_n, z_n$  предполагаются известными, полученными в результате решения соответствующих уравнений (9.2.10) при условии (9.2.18).

Итак, все необходимые начальные условия для функций  $\beta_k, z_k$  и  $\varphi_k$  найдены.

Мы рассмотрели только метод решения конечно-разностных уравнений диффузии, основанный на факторизации. Сведения о других методах решения разностных уравнений можно получить в книге В. К. Саульева [323].

### 9.3. Решение разностных уравнений методом матричной факторизации

Метод факторизации одномерных разностных уравнений диффузионного типа оказался весьма удобным расчетным алгоритмом. Этот метод в дальнейшем был существенно обобщен М. В. Келдышем, И. М. Гельфандом, О. В. Локуциевским, К. И. Бабенко и Н. К. Ченцовым на широкий класс задач эллиптического типа. Предполагается, что указанный класс задач приводится к векторно-матричному уравнению вида

$$a_k \varphi_{k+1} - b_k \varphi_k + c_k \varphi_{k-1} = -f_k \quad (9.3.1)$$

с соответствующими граничными условиями. В частности, к разностному уравнению (9.3.1) приближенно сводится многомерное уравнение диффузии, а также уравнения сферических гармоник.

Метод матричной факторизации позволяет получить точное решение конечно-разностного уравнения (9.3.1) без использования метода последовательных приближений. Наиболее эффективно он применяется для решения задач в случае матриц невысокого порядка. К. И. Бабенко, В. В. Русанов и Н. К. Ченцов показали, что расчет с помощью метода матричной факторизации не сопровождается накоплением ошибок округления и, таким образом, он является устойчивым. Необходимо лишь иметь в виду, что при обращении матриц высокого порядка может происходить потеря точности за счет округления. Поэтому в расчетах необходимо использовать методы обращения матриц, свободные от указанного недостатка.

При решении уравнений диффузии для двумерных областей мы приходим к матричному конечно-разностному уравнению следующего вида:

$$\varphi_{k+1} - \mathbf{B}_k \varphi_k + \mathbf{C}_k \varphi_{k-1} = -\mathbf{F}_k \quad (9.3.2)$$

при условии, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_1, \\ \varphi_{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.3)$$

Уравнение (9.3.2) запишем в виде

$$\mathbf{L} \varphi_k = -\mathbf{F}_k, \quad (9.3.4)$$

где

$$\mathbf{L} \varphi_k = \varphi_{k+1} - \mathbf{B}_k \varphi_k + \mathbf{C}_k \varphi_{k-1}.$$

Оператор  $\mathbf{L}$  представим в виде произведения

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2.$$

Тогда уравнение (9.3.4) будет иметь вид

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \varphi_k = -\mathbf{F}_k. \quad (9.3.5)$$

Операторы  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  определим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_k &= \mathbf{z}_k - \beta_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1}; \\ \mathbf{L}_2 \varphi_k &= \mathbf{C}_k \varphi_{k-1} - \beta_k \varphi_k, \end{aligned} \right\} \quad (9.3.6)$$

где  $\beta_k$  — произвольные матрицы, которые выберем из условия, чтобы

$$\mathbf{L} \varphi_k = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \varphi_k,$$

откуда получаем, что

$$\beta_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1} (\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}. \quad (9.3.7)$$

Полагая

$$\mathbf{L}_2 \varphi_k = \mathbf{z}_k,$$

мы приходим к системе уравнений



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_k &= \mathbf{F}_k; \\ \mathbf{L}_2 \varphi_k &= \mathbf{z}_k. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.8)$$

Принимая во внимание равенства (9.3.6) и решая уравнения (9.3.8) относительно  $\mathbf{z}_{k+1}$  и  $\varphi_k$  вместе с (9.3.7), приходим к конечно-разностным уравнениям первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k+1} &= \mathbf{C}_{k+1}(\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}; \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \beta_{k+1}(\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k); \\ \varphi_{k+1} &= \mathbf{C}_{k+1}^{-1}(\beta_{k+1}\varphi_{k+1} + \mathbf{z}_{k+1}). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.9)$$

Следует отметить, что при решении третьего уравнения из системы (9.3.9) приходится предварительно находить обратную матрицу  $\mathbf{C}_{k+1}^{-1}$ . Зачастую это приводит к потере точности. Для того чтобы избежать возникающей потери точности, Ж. Н. Бельская предложила преобразовать это уравнение следующим образом. Подставим второе уравнение системы (9.3.9) в третье. Тогда получим

$$\varphi_k = \mathbf{C}_{k+1}^{-1}\beta_{k+1}(\varphi_{k+1} + \mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k). \quad (9.3.10)$$

Из полученного уравнения исключим выражение  $\mathbf{C}_{k+1}^{-1}\beta_{k+1}$  с помощью первого уравнения системы (9.3.9). В самом деле, умножим левую часть первого уравнения системы на матрицу  $\mathbf{C}_{k+1}^{-1}$ . Тогда получим

$$\mathbf{C}_{k+1}^{-1}\beta_{k+1} = (\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}. \quad (9.3.11)$$

Подставим выражение (9.3.11) в уравнение (9.3.10). В результате будем иметь

$$\varphi_k = (\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}(\varphi_{k+1} + \mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k). \quad (9.3.12)$$

Уравнение (9.3.12) и будет использовано вместо третьего уравнения системы (9.3.9).

Таким образом, окончательно приходим к следующей факторизованной системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k+1} &= \mathbf{C}_{k+1}(\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}; \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \beta_{k+1}(\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k); \\ \varphi_k &= (\mathbf{B}_k - \beta_k)^{-1}(\varphi_{k+1} + \mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.13)$$

К системе уравнений (9.3.13) необходимо присоединить граничные условия (9.3.3). Для того чтобы эти условия были выполнены, необходимо потребовать выполнения следующих равенств, в результате будем иметь

$$\beta_1 = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{z}_1 = 0, \quad \varphi_{n+1} = 0. \quad (9.3.14)$$

Ввиду того, что нас в дальнейшем будут интересовать различные применения метода матричной факторизации, рассмотрим вопрос о граничных условиях более общего вида, а именно, пусть заданы следующие граничные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 + \alpha \varphi_1 &= \mathbf{g}; \\ \varphi_n + \gamma \varphi_{n+1} &= \mathbf{h}, \end{aligned} \right\} \quad (9.3.15)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — заданные матрицы, а  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$  — векторы. Рассмотрим сначала первое из этих уравнений:

$$\varphi_0 + \alpha \varphi_1 = \mathbf{g} \quad (9.3.16)$$

и третье уравнение системы (9.3.9) для точки  $k = 0$ :

$$\varphi_0 = \mathbf{C}_1^{-1}(\beta_1 \varphi_1 + \mathbf{z}_1). \quad (9.3.17)$$

Из сравнения уравнений (9.3.16) и (9.3.17) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_1^{-1} \beta_1 &= -\alpha; \\ \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{g}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.18)$$

Умножим слева соотношения (9.3.18) на матрицу  $\mathbf{C}_1$ . Тогда получим «начальные» условия для  $\beta_k$  и  $\mathbf{z}_k$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \mathbf{C}_1 \alpha; \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{C}_1 \mathbf{g}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.19)$$

Остается теперь получить условия для  $\varphi_k$ . Для этого рассмотрим второе из равенств (9.3.15):

$$\varphi_n + \gamma\varphi_{n+1} = \mathbf{h} \quad (9.3.20)$$

и уравнение (9.3.12) при  $k = n$ :

$$\varphi_n = (\mathbf{B}_n - \beta_n)^{-1}(\varphi_{n+1} + \mathbf{z}_n + \mathbf{F}_n). \quad (9.3.21)$$

Исключив из уравнения (9.3.20) вектор-функции  $\varphi_n$ , получим

$$[(\mathbf{B}_n - \beta_n)^{-1} + \gamma]\varphi_{n+1} = \mathbf{h} - (\mathbf{B}_n - \beta_n)^{-1}(\mathbf{z}_n + \mathbf{F}_n). \quad (9.3.22)$$

Отсюда

$$\varphi_{n+1} = [(\mathbf{B}_n - \beta_n)^{-1} + \gamma]^{-1}[\mathbf{h} - (\mathbf{B}_n - \beta_n)^{-1}(\mathbf{z}_n + \mathbf{F}_n)]. \quad (9.3.22')$$

Соотношение (9.3.22) и будет необходимым «начальным» условием для функции  $\varphi_k$ .

В заключение отметим, что если решение  $\varphi_k$  состоит только из одного компонента, то мы приходим к рассмотренному выше случаю факторизации простейшего трехточечного конечно-разностного уравнения.

## 9.4. Итерационные методы решения разностных уравнений

В предыдущем параграфе был рассмотрен метод решения двумерных конечно-разностных уравнений эллиптического типа, основанный на непосредственном решении линейной алгебраической системы уравнений. Однако в ряде случаев бывает целесообразно пользоваться итерационными схемами, которые отличаются простотой численного алгоритма. Недостатком этих схем является то, что они требуют проведения более или менее значительного числа итераций [63, 323, 399, 429, 430].

Рассмотрим некоторые итерационные схемы, наиболее употребляемые в практике расчетов.

*Схема Либмана.* Как известно [469], схема Либмана определяется следующим образом:

$$\varphi^{(n)} = \mathbf{A}\varphi^{(n-1)} + \mathbf{Sf}, \quad (9.4.1)$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{f}$  — векторы с компонентами

$$\varphi = \{\varphi_{k,l}\}, \mathbf{f} = \{f_k\};$$

$\mathbf{A}$  и  $S$  — матрицы, переводящие соответственно векторы  $\varphi$  и  $\mathbf{f}$  в другие вектора:

$$\mathbf{A} = \left\{ \varphi = \left| \frac{1}{p_{k,l}} (a_{k,l}\varphi_{k+1,l} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1}) \right. \right\},$$

$$S\mathbf{f} = \left\{ \frac{1}{p_{k,l}} f_{k,l} \right\};$$

$n$  — номер последовательного приближения.

В компонентном представлении метод Либмана записывается весьма просто:

$$\varphi_{k,l}^{(n)} = (a_{k,l}\varphi_{k+1,l}^{(n-1)} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1}^{(n-1)} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l}^{(n-1)} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1}^{(n-1)} + f_{k,l})/p_{k,l}. \quad (9.4.2)$$

*Схема Зейделя* отличается от метода Либмана только тем, что в  $n$ -й итерации при расчете величин  $\varphi_{k,l}^{(n)}$  используются не только значения  $\varphi_{k,l}^{(n-1)}$ , но и ранее подсчитанные значения  $\varphi_{k,l}^{(n)}$ .

*Линейная итерационная схема.* Большое распространение при решении двумерных разностных уравнений эллиптического типа получила линейная итерационная схема. Она определяется системой двух равенств [63]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_1\varphi_l^{(n)} &= \mathbf{f}_l - \mathbf{M}_2\varphi_k^{(n-1)}, \quad (l = 1, 2, \dots, l_0); \\ \mathbf{L}_2\varphi_k^{(n+1)} &= \mathbf{f}_k - \mathbf{M}_1\varphi_l^{(n)}, \quad (k = 1, 2, \dots, k_0), \end{aligned} \right\} \quad (9.4.3)$$

где

$$\mathbf{L}_1\varphi_l = |a_{k,l}\varphi_{k+1,l} - (p_{k,l} - b_{k,l} - d_{k,l})\varphi_{k,l} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l}|;$$

$$\mathbf{L}_2\varphi_k = |d_{k,l}\varphi_{k,l+1} - (p_{k,l} - a_{k,l} - c_{k,l})\varphi_{k,l} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1}|;$$

$$\mathbf{M}_2\varphi_k = |d_{k,l}(\varphi_{k,l+1} - \varphi_k) + b_{k,l}(\varphi_{k,l-1} - \varphi_{k,l})|;$$

$$\mathbf{M}_1\varphi_l = |a_{k,l}(\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k,l}) + c_{k,l}(\varphi_{k-1,l} - \varphi_{k,l})|.$$

В компонентном представлении линейная итерационная схема (9.4.3) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} a_k \varphi_{k+1,l}^{(n)} - b_k \varphi_{k,l}^{(n)} + c_k \varphi_{k-1,l}^{(n)} &= -F_{1kl}^{(n-1)}; \\ F_{1kl}^{(n-1)} &= \varepsilon_k (\varphi_{k,l+1}^{(n-1)} - \varphi_{k,l}^{(n-1)}) - \delta_k (\varphi_{k,l}^{(n-1)} - \varphi_{k,l-1}^{(n-1)}) + f_{k,l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.4)$$

$$(l = 1, 2, \dots, l_0),$$

где

$$a_k = a_{k,l}, \quad b_k = p_{k,l} - b_{k,l} - d_{k,l}, \quad c_k = c_{k,l}, \quad \varepsilon_k = d_{k,l}, \quad \delta_k = b_{k,l},$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_l \varphi_{k,l+1}^{(n+1)} - b_l \varphi_{k,l}^{(n+1)} + c_l \varphi_{k,l-1}^{(n+1)} &= -F_{2kl}^{(n)}; \\ F_{2kl}^{(n)} &= \varepsilon_l (\varphi_{k+1,l}^{(n)} - \varphi_{k,l}^{(n)}) - \delta_l (\varphi_{k,l}^{(n)} - \varphi_{k-1,l}^{(n)}) + f_{k,l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, k_0),$$

где

$$a_l = d_{k,l}; \quad b_l = p_{k,l} - a_{k,l} - c_{k,l}; \quad c_l = b_{k,l}; \quad \varepsilon_l = a_{k,l}; \quad \delta_{k,l} = c_{k,l}.$$

Существенной особенностью линейной итерационной схемы является то, что после первой итерации она дает точное решение задачи в том случае, когда решение не зависит от индекса  $l$  или  $k$ .

Расчет по схеме (9.4.4), (9.4.5) начинается с приближения  $F_{1kl}^{(n-1)} = f_{k,l}$ . Решение уравнений (9.4.4) и (9.4.5) с соответствующими граничными условиями производится обычным методом факторизации.

*Релаксационная схема Булеева.* Н. И. Булеев предложил следующую релаксационную схему решения конечно-разностных уравнений [59, 60]. Запишем систему разностных уравнений в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{L}\varphi = \mathbf{f}. \quad (9.4.6)$$

К обеим частям равенства (9.4.6) прибавим вектор  $\mu\varphi$ , где  $\mu$  — произвольная матрица. Тогда получим

$$(\mathbf{L} + \mu)\varphi = \mathbf{f} + \mu\varphi. \quad (9.4.7)$$

Матрицу  $\mu$  выберем таким образом, чтобы матрица  $L + \mu$  представилась в виде произведения двух треугольных матриц. В целях удобства матрицы  $L + \mu$  представим в виде

$$L + \mu = \Gamma^{-1}(E - S_1)(E - S_2), \quad (9.4.8)$$

где  $E$  — единичная матрица;  $E - S_1$  и  $E - S_2$  — треугольные матрицы различного строения, а  $\Gamma^{-1}$  — диагональная матрица.

С учетом соотношения (9.4.8) уравнение (9.4.7) заменим эквивалентной системой:

$$\left. \begin{aligned} (E - S_1)z &= \Gamma f + \Gamma \mu \varphi; \\ (E - S_2)\varphi &= z. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.9)$$

Тогда метод последовательных приближений можно сформулировать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (E - S_1)z^{(n)} &= \Gamma f + \Gamma \mu \varphi^{(n-1)}; \\ (E - S_2)\varphi^{(n)} &= z^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.10)$$

Для того чтобы практически воспользоваться указанным алгоритмом, поступим следующим образом.

Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$a_{k,l}\varphi_{k+1,l} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1} - p_{k,l}\varphi_{k,l} = -f_{k,l}, \quad (9.4.11)$$

$k = 1, 2, \dots, k_0$ ,  $l = 1, 2, \dots, l_0$ . Прибавим к правой части уравнения (9.4.11) выражение

$$-\sigma_{k,l}\varphi_{k-1,l+1} - \tau_{k,l}\varphi_{k+1,l-1} + \kappa(\sigma_{k,l} + \tau_{k,l})\varphi_{k,l}, \quad (9.4.12)$$

где  $\sigma_{k,l}$  и  $\tau_{k,l}$  остаются пока произвольными числами, а параметр  $\kappa$  выбирается в интервале  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Тогда получим

$$a_{k,l}\varphi_{k+1,l} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1} -$$

$$-(p_{k,l} - \kappa\sigma_{k,l} - \kappa\tau_{k,l})\varphi_{k,l} - \sigma_{k,l}\varphi_{k-1,l+1} - \tau_{k,l}\varphi_{k+1,l-1} = -F_{k,l},$$

где

$$F_{k,l} = f_{k,l} + \sigma_{k,l}(\varphi_{k-1,l+1} - \kappa\varphi_{kl}) + \tau_{k,l}(\varphi_{k+1,l-1} - \kappa\varphi_{kl}). \quad (9.4.14)$$

Разностное уравнение (9.4.13) заменим эквивалентной системой

$$\left. \begin{aligned} z_{k,l} &= m_{k,l}z_{k-1,l} + \beta_{k,l}z_{k,l-1} + \gamma_{k,l}F_{k,l}; \\ \varphi_{k,l} &= \alpha_{k,l}\varphi_{k+1,l} + n_{k,l}\varphi_{k,l+1} + z_{k,l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.15)$$

где  $\alpha_{k,l}, \beta_{k,l}, m_{k,l}, n_{k,l}, \gamma_{k,l}$  — неизвестные коэффициенты. Для отыскания этих коэффициентов разрешим второе уравнение из системы (9.4.15) относительно  $z_{k,l}$  и подставим в первое уравнение. В результате получим

$$\begin{aligned} &\alpha_{k,l}\varphi_{k+1,l} + \beta_{k,l}\varphi_{k,l-1} + m_{k,l}\varphi_{k-1,l} + n_{k,l}\varphi_{k,l+1} - \\ &- (1 + m_{k,l}\alpha_{k-1,l} + \beta_{k,l}n_{k,l-1})\varphi_{k,l} - m_{k,l}n_{k-1,l}\varphi_{k-1,l+1} - \\ &- \beta_{k,l}\alpha_{k,l-1}\varphi_{k+1,l-1} = -\gamma_{k,l}f_{k,l}. \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

Для того чтобы уравнение (9.4.16) было эквивалентно уравнению (9.4.13), их коэффициенты должны быть пропорциональны. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k,l} &= a_{k,l}\gamma_{k,l} & n_{k,l} &= d_{k,l}\gamma_{k,l}; \\ \beta_{k,l} &= b_{k,l}\gamma_{k,l} & \beta_{k,l}\alpha_{k,l-1} &= \tau_{k,l}\gamma_{k,l}; \\ m_{k,l} &= c_{k,l}\gamma_{k,l} & m_{k,l}n_{k-1,l} &= \sigma_{k,l}\gamma_{k,l}; \\ 1 + m_{k,l}\alpha_{k-1,l} + \beta_{k,l}n_{k,l-1} &= (p_{k,l} - \kappa\sigma_{k,l} - \kappa\tau_{k,l})\gamma_{k,l}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.17)$$

Из системы (9.4.17) непосредственно следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k,l} &= c_{k,l}d_{k-1,l}\gamma_{k-1,l}; \\ \tau_{k,l} &= b_{k,l}a_{k,l-1}\gamma_{k,l-1}; \end{aligned} \right\} \quad (9.4.18)$$

$$\gamma_{k,l} = [p_{k,l} - c_{k,l}(a_{k-1,l} + \kappa d_{k-1,l})\gamma_{k-1,l} - b_{k,l}(\kappa a_{k,l-1} + d_{k,l-1})\gamma_{k,l-1}]^{-1}. \quad (9.4.19)$$

Уравнения (9.4.15) с учетом соотношений (9.4.17) и (9.4.18) переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} z_{k,l} &= \gamma_{k,l} [c_{k,l}(z_{k-1,l} + d_{k-1,l}\gamma_{k-1,l}\delta_{k,l}) + \\ &\quad + b_{k,l}(z_{k,l-1} + a_{k,l-1}\gamma_{k,l-1}\mu_{k,l})] + F_{k,l}; \\ \varphi_{k,l} &= \gamma_{k,l}(a_{k,l}\varphi_{k+1,l} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1}) + z_{k,l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.20)$$

где

$$\delta_{k,l} = \varphi_{k-1,l+1} - \kappa\varphi_{k,l};$$

$$\mu_{k,l} = \varphi_{k+1,l-1} - \kappa\varphi_{k,l}.$$

Если в системе разностных уравнений (9.4.11) уже использованы граничные условия для функции  $\varphi$ , то

$$c_{1,l} = 0, \quad b_{k,l} = 0, \quad a_{k,0} = 0, \quad d_{k,l_0} = 0 \quad (9.4.21)$$

и уравнения (9.4.20) вместе с (9.4.19) позволяют получить значения функций  $\gamma_{k,l}$ ,  $z_{k,l}$  и  $\varphi_{k,l}$  во всех счетных узлах рассматриваемой области. В частности, функции  $\gamma_{k,l}$ ,  $z_{k,l}$  и  $\varphi_{k,l}$  на диагонали, проходящей через точку  $(x_1, y_1)$ , равны

$$x_{11} = \frac{1}{p_{11}}, \quad z_{11} = \gamma_{11}F_{11}, \quad \varphi_{k_0,l_0} = z_{k_0,l_0}. \quad (9.4.22)$$

Систему уравнений (9.4.20), (9.4.22) будем решать методом последовательных приближений. Для получения первого приближения функции  $\varphi_{k,l}$  задаем величины  $\delta_{k,l}$  и  $\mu_{k,l}$ , входящие в правые части уравнения для  $z_{k,l}$ . В результате получаем новое приближенное значение функции  $\varphi_{k,l}$ .

Относительная роль слагаемых  $\delta_{k,l}$  и  $\mu_{k,l}$  в уравнения (9.4.20) и быстрота сходимости метода последовательных приближений определяются выбором параметра  $\kappa$ . Так как минимальные значения функций  $\delta_{k,l}$  и  $\mu_{k,l}$  принимают при  $\kappa = l$ , то при отсутствии каких-либо предварительных сведений о характере поля искомой функции  $\varphi_{k,l}$  для вычисления первого приближения лучше всего использовать систему (9.4.20) при  $\kappa = l$ .

Если сумма коэффициентов  $a_{k,l}$ ,  $b_{k,l}$ ,  $c_{k,l}$  и  $d_{k,l}$  мало отличается от  $p_{k,l}$ , то сходимость итерационного процесса легко доказывается для случая  $\kappa = 0$ . Доказательство сходимости итерационного процесса при  $\kappa = 0$  проведено С. М. Ермаковым (см. [230]). Доказательство сходимости итерационного процесса при  $\kappa = 1/2$  дано Н. И. Булеевым [59].



Если система уравнений (9.4.11) решается при заданных значениях искомой функции на границе области, то для решения задачи можно использовать более экономичную схему, состоящую из попеременного использования двух систем вида (9.4.20), реализуемых для различных направлений счета, подобно тому, как это имело место в случае линейной итерационной схемы.

В заключение сформулируем метод улучшения сходимости для итерационного процесса Н.И. Булеева, который во многих случаях оказывается весьма эффективным. Сущность метода улучшения сходимости состоит в следующем.

Рассмотрим схему Булеева при  $\kappa = 0$ . В этом случае будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} a_{k,l}\varphi_{k+1,l}^{(n)} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1}^{(n)} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l}^{(n)} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1}^{(n)} - p_{k,l}\varphi_{k,l}^{(n)} - \\ - \sigma_{k,l}^0\varphi_{k-1,l+1}^{(n)} - \tau_{k,l}^0\varphi_{k+1,l-1}^{(n)} = -f_{k,l} - \sigma_{k,l}^0\varphi_{k-1,l+1}^{(n-1)} - \tau_{k,l}^0\varphi_{k+1,l-1}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (9.4.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k,l}^0 &= c_{k,l}d_{k-1,l}\gamma_{k-1,l}^0; \\ \tau_{k,l}^0 &= b_{k,l}a_{k,l-1}\gamma_{k,l-1}^0; \\ \gamma_{k,l}^0 &= p_{k,l} - c_{k,l}a_{k-1,l}\gamma_{k-1,l}^0 - b_{k,l}d_{k,l-1}\gamma_{k,l-1}^0. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.24)$$

Индексом нуль отмечен тот факт, что в схеме применяется  $\kappa = 0$ .

Рассмотрим далее точное двумерное уравнение (9.4.11):

$$a_{k,l}\varphi_{k+1,l} + b_{k,l}\varphi_{k,l-1} + c_{k,l}\varphi_{k-1,l} + d_{k,l}\varphi_{k,l+1} - p_{k,l}\varphi_{k,l} = -f_{k,l}. \quad (9.4.25)$$

Вычтем из уравнения (9.4.25) уравнение (9.4.23). Тогда получим

$$a_{k,l}\varepsilon_{k+1,l}^{(n)} + b_{k,l}\varepsilon_{k,l-1}^{(n)} + c_{k,l}\varepsilon_{k-1,l}^{(n)} + d_{k,l}\varepsilon_{k,l+1}^{(n)} - p_{k,l}\varepsilon_{k,l}^{(n)} = \quad (9.4.26)$$

$$= \sigma_{k,l}^0(\varphi_{k-1,l+1}^{(n)} - \varphi_{k-1,l+1}^{(n-1)}) + \tau_{k,l}^0(\varphi_{k+1,l-1}^{(n)} - \varphi_{k+1,l-1}^{(n-1)}),$$

где

$$\varepsilon_{k,l}^{(n)} = \varphi_{k,l} - \varphi_{k,l}^{(n)}. \quad (9.4.27)$$

В уравнении (9.4.26) правая часть известна. В результате приходим к уравнению для погрешности. Это уравнение будем решать методом Булеева при  $\kappa = 0$ . Тогда уравнение (9.4.26) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a_{k,l}\varepsilon_{k+1,l}^{(n)} + b_{k,l}\varepsilon_{k,l-1}^{(n)} + c_{k,l}\varepsilon_{k-1,l}^{(n)} + d_{k,l}\varepsilon_{k,l+1}^{(n)} - (p_{k,l} - \sigma_{k,l}^1 - \tau_{k,l}^1)\varepsilon_{k,l}^{(n)} = \\ = F_{k,l} + \sigma_{k,l}^1(\varepsilon_{k-1,l+1}^{(n)} - \varepsilon_{k,l}^{(n)}) + \tau_{k,l}^1(\varepsilon_{k+1,l-1}^{(n)} - \varepsilon_{k,l}^{(n)}); \end{aligned} \quad (9.4.28)$$

где

$$F_{k,l} + \sigma_{k,l}^0(\varphi_{k-1,l+1}^{(n)} - \varphi_{k-1,l+1}^{(n-1)}) + \tau_{k,l}^0(\varphi_{k+1,l-1}^{(n)} - \varphi_{k+1,l-1}^{(n-1)}). \quad (9.4.29)$$

Предполагается, что

$$F_{k,l} \gg \sigma_{k,l}^1(\varepsilon_{k-1,l+1}^{(n)} - \varepsilon_{k,l}^{(n)}) + \tau_{k,l}^1(\varepsilon_{k+1,l-1}^{(n)} - \varepsilon_{k,l}^{(n)}). \quad (9.4.30)$$

Неравенство (9.4.30) может быть удовлетворено, например, выбором густой сетки, так что разность между погрешностями в соседних точках может быть сделана малой. В этом случае уравнение (9.4.28) можно заменить приближенным

$$\begin{aligned} a_{k,l}\tilde{\varepsilon}_{k+1,l}^{(n)} + b_{k,l}\tilde{\varepsilon}_{k,l-1}^{(n)} + c_{k,l}\tilde{\varepsilon}_{k-1,l}^{(n)} + d_{k,l}\tilde{\varepsilon}_{k,l+1}^{(n)} - \\ - (p_{k,l} - \sigma_{k,l}^1 - \tau_{k,l}^1)\tilde{\varepsilon}_{k,l}^{(n)} = F_{k,l}. \end{aligned} \quad (9.4.30')$$

Уравнение (9.4.30') решается по методу Булеева при  $\kappa = 0$ . В результате приходим к приближенному решению для погрешности  $\tilde{\varepsilon}_{k,l}$ . Тогда уточненное решение задачи найдется в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}_{k,l} = \varphi_{k,l}^{(n)} + \tilde{\varepsilon}_{k,l}^{(n)}. \quad (9.4.31)$$

После того как приближенное решение  $\tilde{\varphi}_{k,l}$  найдено, его можно принять за  $n - 1$  приближение и весь процесс повторить и т. д.

Таким образом, алгоритм решения задачи следующий. Сначала для отыскания нулевого приближения производится решение задачи (9.4.13), (9.4.14) при  $\kappa = 1$  и в предположении, что при  $F_{k,l} = f_{k,l}$ . Затем повторяется цикл вычислений, состоящий из последовательного решения задач (9.4.23) и (9.4.30').

# 10

## Элементарные процессы в ядерных реакторах

### 10.1. Упругое рассеяние нейтронов

Упругое рассеяние является важнейшим механизмом замедления нейтронов в промежуточных и тепловых реакторах. Если энергия нейтрона много больше  $kT_0$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T_0$  — температура среды, то процесс рассеяния нейтрона на ядре слабо зависит от скорости движения ядер среды и в этом случае можно считать ядро неподвижным. Если энергия нейтрона сравнима с  $kT_0$  или меньше этой величины, то при расчете рассеяния нейтрона на ядре вещества необходимо учитывать тепловое движение ядер среды, молекулярные связи и кристаллические эффекты.

Введем в рассмотрение функцию рассеяния нейтрона в результате упругого соударения с ядром, которую будем обозначать  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . Здесь предполагается, что функция  $w$  зависит от косинуса угла рассеяния нейтрона при соударении с ядром:

$$\mu_0 = \Omega\Omega',$$

где  $\Omega'$  — вектор, характеризующий направление полета нейтрона до соударения, а  $\Omega$  — после соударения с ядром. Другой аргумент индикатрисы рассеяния, обозначаемый  $v' \rightarrow v$ , характеризует изменение скорости нейтрона при соударении с ядром.

Очевидно, что если энергия нейтрона — величина много большая  $kT_0$ , то рассеяние нейтрона сопровождается уменьшением кинетической энергии, а следовательно, и скорости нейтрона. Этот процесс называют замедлением нейтронов. При последовательных соударениях нейтрон уменьшает энергию и «попадает» в область скоростей, где существенны тепловое

движение ядер среды, молекулярные связи и кристаллические эффекты. Введем в рассмотрение скорость нейтронов, начиная с которой модель рассеяния нейтронов на неподвижных ядрах оказывается недостаточной. Условно обозначим ее

$$v = v.$$

Если в процессе замедления нейтрон попал в область  $v < v$ , то дальнейший процесс рассеяния нейтронов может сопровождаться как уменьшением, так и увеличением скорости. Если рассеяние нейтронов происходит на одноатомном газообразном замедлителе, то вполне обоснованно можно говорить об упругом рассеянии нейтронов. В этом случае скорости ядер распределены по закону Максвелла, и нейтрон в процессе рассеяния с определенной вероятностью может упруго столкнуться как с ядром, имеющим бóльшую скорость, чем скорость нейтрона, так и с ядром, имеющим меньшую скорость. В зависимости от этого в результате столкновения скорость нейтрона может увеличиваться или уменьшаться. Полезно отметить, что в каждом таком единичном акте столкновения выполняются законы классической механики.

Если замедление нейтрона происходит в жидкости, то при скоростях нейтрона  $v < v$  в силу химических связей нейтрон сталкивается с молекулой в целом, возбуждая вращательные и колебательные уровни молекулы [453].

Наконец, если рассеяние нейтрона в области  $v < v$  происходит на кристаллической решетке, то необходимо принять во внимание неупругие процессы с учетом переноса фононов [359, 360].

Таким образом, упругое рассеяние нейтронов в области  $v < v$  осуществляется только в случае одноатомного газового замедлителя. В остальных случаях, строго говоря, упругое рассеяние реализуется лишь в отдельных актах столкновения нейтрона со средой. Однако в дальнейшем мы не будем вводить новую терминологию и под термином «упругое рассеяние нейтронов» будем понимать просто рассеяние нейтронов в среде, так как разделение рассеянного излучения на упругое и неупругое не всегда целесообразно для указанной области скоростей нейтрона.

В дальнейшем будем предполагать, что функция рассеяния нейтронов известна и нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int dv w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \Sigma_{es}(v'), \quad (10.1.1)$$

где  $\Sigma_{es}(v')$  — макроскопическое сечение упругого рассеяния нейтрона, имеющего до столкновения скорость  $v'$ .

Исходя из структуры соотношения нормировки, можно ввести в рассмотрение более наглядную с физической точки зрения функцию  $g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , связанную с  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  соотношением

$$w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{es}(v') g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (10.1.2)$$

Тогда соотношение нормировки для функции  $g_{es}$  запишется следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = 1. \quad (10.1.2')$$

Величину  $\frac{1}{4} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  можно назвать плотностью вероятности упругого рассеяния нейтрона, имевшего скорость  $v'$  и направление полета  $\Omega'$ , а после соударения с ядром изменившего их соответственно на  $v$  и  $\Omega$ .

Рассмотрим теперь основные свойства величины  $\Sigma_{es}(v)$ . Прежде всего следует отметить, что в области  $v > v_{гр}$ , где более или менее существенны резонансные эффекты, величина  $\Sigma_{es}(v)$  составляется из суммы двух величин:

$$\Sigma_{es} = \Sigma_{sn} + \Sigma_{sr}, \quad (10.1.3)$$

где  $\Sigma_{sn}$  — макроскопическое сечение потенциального рассеяния и  $\Sigma_{sr}$  — макроскопическое сечение резонансного рассеяния. В расчетах ядерных реакторов обычно учитывалось лишь потенциальное рассеяние. Однако, как показали А. А. Лукьянов и В. В. Орлов [223], учет резонансного рассеяния может существенно изменить коэффициент диффузии в области резонансных энергий нейтрона. Резонансная структура сечения рассеяния обсуждена в § 10.5.

В области  $v < v_{гр}$  величина  $\Sigma_{es}(v)$  учитывает эффект теплового движения ядер, молекулярных и кристаллических связей. Естественно, что эта величина не совпадает с аналогичной ве-

личиною при температуре замедлителя  $T^\circ = 0^\circ K$ , то есть когда ядра замедлителя неподвижны, молекулярные связи и кристаллические эффекты отсутствуют. В связи с этим в некоторых случаях для обозначения величин  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  и  $\Sigma_{es}(v)$  в области  $v < v_{гр}$  мы будем пользоваться другими обозначениями, а именно:  $\alpha_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  и  $\alpha_{es}(v)$ .

## 10.2. Неупругое рассеяние нейтронов. Реакция (n, 2n)

Наряду с упругим рассеянием нейтронов при столкновении с ядром может осуществиться процесс неупругого рассеяния. Неупругое рассеяние обычно реализуется на тяжелых ядрах. При этом ядро, захватывающее нейтрон, переходит в возбужденное состояние [122]. В дальнейшем ядро, испустив нейтрон, переходит в свое невозмущенное состояние. Ввиду того, что испускаемый нейтрон имеет энергию меньше той, которую имел налетевший на ядро нейтрон, разность энергий обычно компенсируется выбросом из ядра  $\gamma$ -квантов или других частиц,  $\alpha$ -частиц и нейтронов. В том случае, когда на один захваченный нейтрон ядро испускает два нейтрона, соответствующий процесс носит название реакции (n, 2n). Очевидно, реакция (n, 2n) является весьма ценной для ядерных реакторов, так как она связана с расширенным воспроизводством нейтронов в системе. В этом смысле реакция (n, 2n) подобна реакции деления ядер горючего. Однако не все ядра имеют практически значимый выход реакции (n, 2n). Из наиболее употребительных в реакторостроении замедлителей, для которых существенна реакция (n, 2n), отметим лишь бериллий.

Неупругое рассеяние нейтронов возможно только в том случае, когда кинетическая энергия налетающего нейтрона больше энергии первого возбужденного уровня ядра. Учитывая, что первый возбужденный уровень для легких ядер составляет несколько мегаэлектронвольт, а для тяжелых ядер — сотни килоэлектронвольт, приходим к выводу, что неупругое рассеяние наиболее существенно на ядрах тяжелых элементов, таких как уран, железо, никель и др. Угловое распределение

неупруго рассеявшихся нейтронов обычно считают изотропным. Такое предположение практически оказывается вполне допустимым. Принимая во внимание тот факт, что неупругое рассеяние существенно только на тяжелых элементах, можно считать, что предположение об изотропности рассеяния нейтронов справедливо не только в системе центра масс, но и в лабораторной системе.

Наибольшее значение процесс неупругого рассеяния имеет в тех реакторах, где имеется большое количество ядер тяжелых элементов. Такие реакторы в основном работают на нейтронах высоких энергий, или, как говорят, на быстрых нейтронах.

Введем в рассмотрение функцию рассеяния нейтрона в результате неупругого соударения с ядром, в процессе которого реализуется только один нейтрон. Эту функцию будем обозначать  $w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . В силу сделанного выше предположения об изотропности рассеяния нейтронов в лабораторной системе координат можно положить

$$w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} w_{is}(v' \rightarrow v). \quad (10.2.1)$$

Функция  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int dv w_{is}(v' \rightarrow v) = \Sigma_{is}(v'), \quad (10.2.2)$$

где  $\Sigma_{is}(v')$  — макроскопическое сечение неупругого рассеяния для процессов с испусканием одного нейтрона. Функцию  $w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в следующем виде:

$$w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{is}(v') g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (10.2.3)$$

где

$$\frac{1}{4\pi} g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} g_{is}(v' \rightarrow v). \quad (10.2.4)$$

В этом случае имеем следующее условие нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_{is}(v' \rightarrow v) = 1. \quad (10.2.5)$$

Переходим теперь к рассмотрению реакции (n, 2n). В результате этой реакции появляется не один нейтрон, как было пред-

положено выше, а два. Это значит, что в данном случае нормировочные соотношения (10.2.2), (10.2.5), играющие роль соотношений баланса нейтронов в акте неупругого соударения, нарушается. Поэтому нейтроны, вступающие в реакцию  $(n, 2n)$ , рассмотрим особо.

Для того чтобы учесть в процессе неупругого рассеяния появление двух нейтронов, введем в рассмотрение функцию рассеяния  $w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , которая в предположении изотропности рассеяния равна

$$w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} w_{n,2n}(v' \rightarrow v) \quad (10.2.6)$$

и нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv w_{n,2n}(v' \rightarrow v) = 2\Sigma_{n,2n}(v'), \quad (10.2.7)$$

где  $\Sigma_{n,2n}(v')$  — макроскопическое сечение захвата нейтронов с последующим участием в реакции  $(n, 2n)$ .

Функцию  $w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде

$$w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \nu_{n,2n} \Sigma_{n,2n}(v') g_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (10.2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} g_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) &= \frac{1}{4\pi} g_{n,2n}(v' \rightarrow v); \\ \nu_{n,2n} &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.9)$$

Очевидно, имеет место следующее условие нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_{n,2n}(v' \rightarrow v) = 1. \quad (10.2.10)$$

Обратим внимание еще на одно важное обстоятельство. Если неупругое рассеяние происходит на ядрах вещества, распределенных по скоростям согласно закону Максвелла, то рассеяние на подвижных ядрах можно рассматривать как упругое рассеяние. Учитывая, однако, что неупругое рассеяние наиболее вероятно только при больших энергиях нейтрона, можно считать, что тепловое движение ядер замедлителя не оказывает существенного влияния на процесс неупругого рассеяния. А это зна-



чит, что неупругое рассеяние можно предполагать происходящим только на неподвижных ядрах. Такую модель неупругого рассеяния и примем в дальнейших рассуждениях.

### 10.3. Деление

В процессе взаимодействия нейтрона с ядром делящегося изотопа имеется определенная вероятность того, что нейтрон при захвате ядром вызовет деление ядра. При этом ядро делится на два примерно равных осколка с большой кинетической энергией, которые тормозятся в среде и передают свою энергию атомам окружающей среды. В результате кинетическая энергия осколков переходит в тепловое движение атомов среды.

При делении ядра имеется вероятность появления  $\nu_f$  нейтронов, которые пополняют общий запас нейтронов в системе. Величину  $\nu_f$  называют числом вторичных нейтронов деления. Эта величина, вообще говоря, является функцией энергии нейтрона, вызывающего деление, то есть

$$\nu_f = \nu_f(v),$$

где  $v$  — скорость нейтрона, налетающего на ядро.

Угловое распределение вторичных нейтронов, образующихся при делении ядра, обычно принимается изотропным в лабораторной системе координат.

Введем в рассмотрение функцию распределения вторичных нейтронов по углам и скоростям  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . В силу предположения об изотропности распределения вторичных нейтронов будем иметь

$$w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} w_f(v' \rightarrow v). \quad (10.3.1)$$

Величина  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv w_f(v' \rightarrow v) = \nu_f(v') 2\Sigma_f(v'). \quad (10.3.2)$$

Функцию  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде

$$w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \nu_f(v') \Sigma_f(v') g_f(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (10.3.3)$$

где

$$\frac{1}{4\pi} g_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} g(v' \rightarrow v). \quad (10.3.4)$$

Тогда функция  $\frac{1}{4\pi} g_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  будет нормирована на единицу:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_f(v' \rightarrow v) = 1. \quad (10.3.5)$$

Существенно отметить то обстоятельство, что функцию  $g_f(v' \rightarrow v)$  можно считать не зависящей от скорости налетающего нейтрона, то есть

$$g_f(v' \rightarrow v) = g_f(v). \quad (10.3.6)$$

Функцию  $g_f(v)$  обычно называют спектром деления нейтронов, то есть плотностью вероятности в результате деления ядра распределения нейтронов по скоростям.

Относительно величины функции  $\nu_f$  можно отметить, что она изменяется только в области высоких энергий ( $E > 1$ ). В области ( $E < 1$ ) эту функцию приближенно можно считать константой. Отметим далее, что сечение  $\sigma_f$ , как правило, имеет резонансный характер.

Однако в том случае, когда резонансные уровни перекрываются, можно говорить об усредненных плавных сечениях деления. В связи с этим целесообразно сечение деления  $\sigma_f$  представить в виде суммы

$$\sigma_f = \bar{\sigma}_f + \sigma_{fr}, \quad (10.3.7)$$

где  $\bar{\sigma}_f$  — сечение, слабо изменяющееся с энергией нейтрона, а  $\sigma_{fr}$  — сечение резонансного деления на отдельных, наиболее четко выраженных уровнях. Для того чтобы не усложнять терминологию, в дальнейшем под  $\sigma_f$  будем понимать сечение, плавно изменяющееся с энергией, а резонансное деление будем каждый раз рассматривать особо.

Наконец, следует иметь в виду, что при захвате нейтронов с делением в области скоростей  $v < v_{\text{гр}}$  существенно учитывать тепловое движение ядер среды, молекулярные связи и кристаллические эффекты. Следовательно, в этой области под ве-

личиной  $\sigma_f$  необходимо понимать эффективное сечение деления. Иногда соответствующее эффективное сечение мы будем обозначать  $\alpha_f(v)$ .

## 10.4. Захват нейтронов

Захват нейтронов ядром может происходить с помощью различных ядерных процессов. В дальнейшем мы под захватом нейтронов будем понимать радиационное поглощение, захват нейтронов с последующим делением, поглощение нейтрона в процессе реакции (n, 2n) и т.д. Это значит, что сечение захвата нейтрона ядрами данного сорта составит из суммы

$$\sigma_c = \sigma_a + \sigma_f + \sigma_{n,2n}, \quad (10.4.1)$$

где  $\sigma_a$ ,  $\sigma_f$  и  $\sigma_{n,2n}$  — соответственно макроскопические сечения радиационного поглощения, деления и реакции (n, 2n).

Сечение радиационного поглощения имеет резонансный характер. Если резонансы перекрываются, то имеет смысл говорить об усредненном сечении поглощения. Следовательно, можно положить

$$\sigma_a = \bar{\sigma}_a + \sigma_{ar}, \quad (10.4.2)$$

где  $\bar{\sigma}_a$  — усредненное, медленно изменяющееся по энергии сечение, а  $\sigma_{ar}$  — сечение резонансного поглощения на наиболее ярко выраженных резонансах. В дальнейшем под  $\sigma_a$  будем понимать плавно изменяющуюся часть сечения поглощения, а резонансное сечение каждый раз будем рассматривать особо.

Если захват нейтронов происходит в области  $v < v_{гр}$ , то сечение поглощения необходимо определять с учетом теплового движения ядер, химических эффектов и кристаллических связей. Это значит, что сечение поглощения, соответствующее температуре  $T = 0^\circ\text{K}$  необходимо заменять эффективным сечением поглощения. В некоторых случаях мы для обозначения эффективного сечения будем пользоваться обозначением  $\alpha_a(v)$ .

## 10.5. Резонансная структура сечений

Анализ экспериментальных данных по сечениям ядерных процессов показывает, что некоторые из них, например сечение захвата и сечение рассеяния, имеют резонансный характер. Резонансная структура сечений устанавливается также теоретически [122].

Рассмотрим сначала сечение захвата  $\sigma_c$ . Брейт и Вигнер показали, что резонансное сечение захвата весьма удовлетворительно описывается формулой

$$\sigma_c(E) = \sigma_c^j \sqrt{\frac{E_j}{E}} \left[ 1 + \left( \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (10.5.1)$$

где  $\sigma_c^j$  — сечение в максимуме резонанса;  $E = \frac{v^2}{2}$ ,  $E_j$  — энергия резонанса;  $\Gamma_j$  — ширина резонанса [122]. Формула (10.5.1) касается только захвата нейтрона изолированным ядром в системе центра масс. Это значит, что теория Брейта – Вигнера несправедлива в области, где существенны тепловое движение атомов, молекулярные эффекты и кристаллические связи. В этой области сечение захвата ведет себя согласно закону  $\frac{1}{\sqrt{E}}$  или  $\frac{1}{v}$ .

Переходим к рассмотрению резонансного рассеяния. При рассмотрении отдельного изолированного резонанса в основном можно сечение рассеяния составить из трех частей:

$$\sigma_s(E) = \sigma_{sn} + \sigma_{sr}(E) + \sigma_{int}(E), \quad (10.5.2)$$

где  $\sigma_{sn}$  — сечение потенциального рассеяния, не зависящего от энергии нейтрона;  $\sigma_{sr}(E)$  — сечение резонансного рассеяния;  $\sigma_{int}(E)$  — сечение рассеяния, вызванное эффектом интерференции резонансного и потенциального рассеяния, или, как мы будем говорить, сечение интерференции.

В системе центра масс сечения  $\sigma_{sr}$  и  $\sigma_{int}$  можно представить в виде

$$\sigma_{sr}(E) = \frac{\sigma_{sr}^j}{1 + \left( \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right)^2}; \quad (10.5.3)$$

$$\sigma_{int}(E) = \frac{\sigma_{int} \left( \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right)}{1 + \left( \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right)^2}, \quad (10.5.4)$$

где  $\sigma_{sr}^j$  и  $\sigma_{int}$  — сечение резонансного рассеяния и сечение интерференции при энергии резонанса.

В большинстве случаев сечение интерференции мало по сравнению с сечением  $\sigma_{sr}$ , поэтому приближенно можно положить, что

$$\sigma_s(E) = \sigma_{sn} + \sigma_{sr}. \quad (10.5.5)$$

В дальнейшем, если это специально не оговорено, мы будем пользоваться формулой (10.5.5).

Обратим внимание далее на следующее обстоятельство. До сих пор предполагалось, что рассмотрение ведется в системе центра масс. В лабораторной системе координат это соответствует тому случаю, когда температура среды равна 0 °K.

Если температура отлична от нуля, то необходимо учесть относительные скорости ядер вещества. Это в конечном итоге связано с некоторым уширением резонансов. Соответствующий эффект носит название доплеровского уширения и состоит в том, что резонансные сечения усредняются по спектру распределения ядер по скоростям, соответствующим данной температуре среды.

Не останавливаясь на выкладках, приведем лишь окончательные результаты операции усреднения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c(E) &= \sigma_{cr}^j \Psi \left( \xi, \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right); \\ \sigma_{sr}(E) &= \sigma_{sr}^j \Psi \left( \xi, \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right); \\ \sigma_{int}(E) &= \sigma_{int} \Phi \left( \xi, \frac{E - E_j}{\Gamma_j/2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.5.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\xi, x) &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}(x-y)^2}}{1+y^2} dy; \\ \Phi(\xi, x) &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ye^{-\frac{\xi^2}{4}(x-y)^2}}{1+y^2} dy. \end{aligned} \right\} \quad (10.5.7)$$

Здесь

$$\xi = \frac{\Gamma_j}{\Delta}; \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{E_j kT}{M}};$$

$k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура среды в °K;  $M$  — массовое число элемента.

Мы здесь специально не останавливались на выражении для сечения деления, предполагая, что формула для сечения захвата справедлива для захвата с делением и для радиационного поглощения.

Необходимо далее иметь в виду, что если уровни расположены близко друг к другу и перекрываются, то соответствующее полное сечение приближенно можно представить в виде суммы сечений по всем резонансам, которые вносят вклад в соответствующий ядерно-физический процесс.

## 10.6. Физический расчет ядерного реактора

Рассмотрим ядерный реактор, состоящий из активной зоны и отражателя. В активной зоне реактора происходит процесс деления ядер делящегося изотопа с рождением нейтронов, распределенных по некоторому энергетическому спектру. Эти нейтроны будем называть источниками замедления. Рожденные в процессе деления нейтроны, обладая большим запасом кинетической энергии, рассеиваются на ядрах замедлителя. Если рассеяние происходит с сохранением количества движения и кинетической энергии системы нейтрон – ядро, то оно будет упругим, если же при рассеянии часть энергии идет на возбуждение ядра, то оно будет неупругим.

Ввиду того, что каждое последующее рассеяние сопровождается потерей энергии нейтрона, скорость его движения в среде будет все более уменьшаться и, следовательно, нейтрон будет замедляться.

Процесс замедления сопровождается пространственным рассеянием нейтронов. Поэтому если ядерный реактор имеет ограниченные размеры, то после нескольких соударений нейтрон может вылететь из реактора.

Для уменьшения вероятности вылета нейтронов активную зону окружают отражателем. В этом случае часть нейтронов, вылетающих из активной зоны, попадает в отражатель. При этом некоторые нейтроны снова возвратятся в активную зону, а остальные вылетят из реактора.

При столкновении нейтрона с ядрами делящегося вещества и замедлителя появляется вероятность того, что нейтрон поглотится. В случае поглощения цикл замедления обрывается на энергии поглощения нейтрона.

Известная часть нейтронов в процессе замедления может достичь области скоростей ниже  $v_{гр}$ . В данной области существенным фактором оказывается тепловое движение ядер замедлителя. Распределение ядер по скоростям, как известно, подчиняется закону Максвелла.

Рассеяние нейтронов тепловых энергий сопровождается поглощением и утечкой. Если поглощение и утечка малы, то нейтроны входят в статистическое равновесие со средой и распределяются по закону Максвелла. В таком случае все нейтроны скоростей  $v < v_{гр}$  можно объединить в одну группу с эффективными константами, усредненными по равновесному максвелловскому спектру. Отклонения в спектре нейтронов от равновесного могут быть существенными в тех случаях, когда поглощение тепловых нейтронов или их утечка значительны. Тогда нейтроны не входят в равновесие с ядрами замедлителя и распределяются по спектру, отличному от максвелловского.

Некоторая часть нейтронов, поглощаемая ядрами делящегося изотопа как в процессе замедления, так и в области тепловых энергий, вызывает деление ядер. Этот процесс сопровождается рождением вторичных нейтронов с одновременным выделением большого количества тепла, полученного в результате тор-

можения в среде осколков ядер делящегося вещества. Вторичные нейтроны становятся источниками замедления и цепная реакция продолжается.

Как известно, режим работы реактора, при котором происходит простое воспроизводство нейтронов, то есть количество рождающихся в реакторе нейтронов в единицу времени в результате деления ядер горючего вещества равняется числу выбывающих из реактора нейтронов в процессе поглощения и утечки, называется критическим. Ввиду того, что критический режим предполагает простое воспроизводство нейтронов, он является стационарным.

Реакторы, в которых процесс деления происходит в основном при тепловых энергиях нейтрона ( $v < v_{\text{тр}}$ ), в соответствии с установившейся терминологией будем называть *тепловыми*. Если основная часть делений происходит при захвате нейтронов со скоростями ( $v_{\text{тр}} < v < v_1$ ), где  $v_1$  — скорость нейтрона, соответствующая энергии  $\sim E = 100$ , то такие реакторы будем называть *промежуточными*. Реакторы, в которых основная часть делений происходит при захвате на больших скоростях ( $v > v_1$ ), будем называть *быстрыми*.

Известно, что энергетическое распределение нейтронов (спектр нейтронов) для данного замедлителя, усредненное по объему активной зоны, в основном зависит от отношения числа ядер горючего вещества к числу ядер замедлителя. При этом наименьшие критические загрузки делящегося вещества нужны для реализации тепловых реакторов, наибольшие — для реакторов на быстрых нейтронах. Одновременно подчеркнем, что размеры тепловых реакторов оказываются наибольшими, а реакторов на быстрых нейтронах — наименьшими. Выбор того или иного типа реактора связан с учетом его целевых назначений.

В тепловых и промежуточных реакторах процесс замедления нейтронов в основном осуществляется в результате упругого рассеяния. В этом случае влияние неупругого рассеяния обычно мало. Для реакторов на быстрых нейтронах, наоборот, основным в замедлении оказывается процесс неупругого рассеяния.



Физический расчет гомогенного ядерного реактора прежде всего состоит в нахождении критического размера реактора заданной формы и пространственно-энергетического распределения нейтронов в реакторе. Однако этим физический расчет реактора далеко не исчерпывается. В него также входит расчет системы регулирования, длительности компани реактора, нестационарных процессов, происходящих при изменении реактивности системы, а также расчет биологической защиты реактора от излучения.

При расчетах гетерогенных реакторов появляется необходимость проведения дополнительных расчетов микроструктуры нейтронного потока в ячейке реактора. С помощью найденного спектра нейтронов можно произвести усреднение физических констант в ячейке гетерогенного реактора и поставить в соответствие ему реактор гомогенный с эффективными константами.

# 11

## Кинетическое уравнение реактора

### 11.1. Кинетическое уравнение замедления

Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в реакторе описывается кинетическим уравнением Больцмана. В настоящей главе будет дан краткий вывод кинетического уравнения для потока нейтронов. При изложении мы ограничимся рассмотрением только стационарной проблемы, имеющей интерес в вопросах расчета критических масс ядерных реакторов. Критическое уравнение будет записано для фазового пространства  $\mathbf{r}, v, \Omega$ . Переход к другим фазовым пространствам может быть осуществлен с помощью якобиана преобразования.

Рассмотрение будет проведено для общего случая индикатрис рассеяния в предположении, что они абсолютно интегрируемы. В заключение главы рассматриваются два предельных случая: односкоростное кинетическое уравнение и кинетическое уравнение для бесконечной однородной среды.

Рассмотрим фазовое пространство  $\mathbf{r}, v, \Omega$  с элементом  $d\mathbf{r} dv d\Omega$ . Около точки  $M$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  выделим элементный объем  $d\mathbf{r}$  (см. рис. 1). Если  $n(\mathbf{r}, v, \Omega)$  — плотность нейтронов в единице фазового пространства  $\mathbf{r}, v, \Omega$  в момент времени  $t$ , то число нейтронов в объеме  $d\mathbf{r}$  около точки  $M$ , имеющих разбросы скорости в интервале  $(v, v + dv)$  и направлений  $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ , равно

$$n(\mathbf{r}, v, \Omega) d\mathbf{r} dv d\Omega.$$

В момент времени  $t + dt$  их число будет

$$n(\mathbf{r} + v\Omega dt, v, \Omega) d\mathbf{r} dv d\Omega.$$

Таким образом, полное изменение числа нейтронов в объеме  $d\mathbf{r} d\Omega$  за время  $dt$  равно

$$dN = [n(\mathbf{r} + v\boldsymbol{\Omega}dt, v, \boldsymbol{\Omega}) - n(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega})] d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega}. \quad (11.1.1)$$

Разложив выражение (11.1.1) в ряд Тейлора и ограничившись членами первого порядка малости, получим

$$dN = v\boldsymbol{\Omega}\nabla n d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt. \quad (11.1.2)$$

Рассмотрим теперь ядерные процессы, в результате которых происходит изменение числа нейтронов в элементе фазового пространства  $d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt$ . Во-первых, подсчитаем число нейтронов, выбывающих из элемента фазового пространства. Очевидно, оно составит из нейтронов, поглощенных и рассеянных средой, то есть

$$dP = (\Sigma_c + \Sigma_s)vn(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega})d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt, \quad (11.1.3)$$

где  $\Sigma_c(v)$  — макроскопическое сечение поглощения нейтронов;  $\Sigma_s(v) = \Sigma_{es}(v) + \Sigma_{is}(v) + \Sigma_{n,2n}(v)$  — полное макроскопическое сечение рассеяния с учетом реакции  $(n, 2n)$ .

Подсчитаем далее число нейтронов, прибывающих в элемент фазового пространства в интервал времени  $dt$ . Очевидно, оно составит из суммы нейтронов, рассеянных из других элементов фазового пространства и источников деления, т. е.

$$dR = \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dv' w_s(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}') d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt \quad (11.1.4)$$

и

$$dS = \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dv' w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}') d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt, \quad (11.1.5)$$

где

$$w_s(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Функции  $w_{es}$ ,  $w_{is}$ ,  $w_{n,2n}$ ,  $w_f$  определены в главе 10.

Составим уравнение баланса нейтронов:

$$dN + dP = dR + dS. \quad (11.1.6)$$

Подставляя в уравнение баланса (11.1.6) соотношения (11.1.2), (11.1.3), (11.1.4) и (11.1.5) и сокращая на  $d\mathbf{r} dv d\boldsymbol{\Omega} dt$ , приходим к кинетическому уравнению замедления нейтронов:

$$\boldsymbol{\Omega}\nabla vn + \Sigma vn = \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}'), \quad (11.1.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_c + \Sigma_s; \\ w &= w_s + w_f. \end{aligned} \right\} \quad (11.1.8)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi = vn.$$

Тогда в окончательном виде кинетическое уравнение замедления нейтронов запишется так:

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega'). \quad (11.1.9)$$

Здесь интегрирование производится по всевозможным скоростям из интервала  $(0, \infty)$  и всем направлениям единичной сферы.

В развернутом виде с использованием свойств функций  $w_i(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , где индексом  $i$  обозначен любой ядерно-физический процесс, уравнение (11.1.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Omega \nabla \varphi + (\Sigma_c + \Sigma_{es} + \Sigma_{is} + \Sigma_{n,2n}) \varphi = \\ &= \int d\Omega' \int dv' w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') + \\ &+ \int d\Omega' \int dv' w_{is}(v' \rightarrow v) \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') + \\ &+ \int d\Omega' \int dv' w_{n,2n}(v' \rightarrow v) \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left[ g_f(v) \int d\Omega' \int dv' \nu_f \Sigma_f(v') \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \right]. \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда неупругое рассеяние несущественно, а реакция  $(n, 2n)$  вовсе отсутствует. Тогда кинетическое уравнение (11.1.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \int dv' \Sigma_{es}(v') \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \\ + \frac{1}{4\pi} g_f(v) Q(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(\mathbf{r}) = \int d\Omega' \int dv' \nu_f \Sigma_f(v') \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega'); \\ \frac{1}{4\pi} \Sigma_{es} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (11.1.12)$$

Величину  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  в простейших случаях найти весьма просто. Одним из таких случаев является рассеяние нейтронов на неподвижных ядрах. Очевидно, предположение о рассеянии нейтронов на неподвижных ядрах является удовлетворительным приближением к случаю, когда скорость нейтронов много больше скорости ядер. Это имеет место в области  $v > v_{\text{гр}}$ . В том случае, когда  $v < v_{\text{гр}}$ , необходимо учитывать тепловое движение ядер замедлителя, молекулярные связи и кристаллические эффекты.

В настоящем параграфе мы найдем выражение для функции  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  в том случае, когда рассеяние нейтронов происходит на свободных и неподвижных ядрах.

Рассмотрим систему нейтрон – ядро. До соударения с нейтроном ядро предполагается неподвижным. Для удобства будем пользоваться двумя системами координат: неподвижной, связанной с ядром-мишенью (лабораторная система координат), и подвижной, связанной с центром масс системы (рис. 11).

Пусть  $\mathbf{v}'$  — скорость нейтрона до соударения в неподвижной системе координат. Тогда в этой системе скорость центра масс определится соотношением

$$\mathbf{v}'_c = \frac{1}{1 + M} \mathbf{v}', \quad (11.1.13)$$

где  $M$  — масса ядра.

Ясно, что скорость нейтрона в подвижной системе координат, связанной с центром масс, будет равна

$$\mathbf{w}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_c = \frac{M}{1+M} \mathbf{v}', \quad (11.1.14)$$

а скорость ядра

$$\mathbf{w}'_0 = \mathbf{v}'_0 - \mathbf{v}'_c = -\mathbf{v}'_c = -\frac{1}{1+M} \mathbf{v}'. \quad (11.1.15)$$

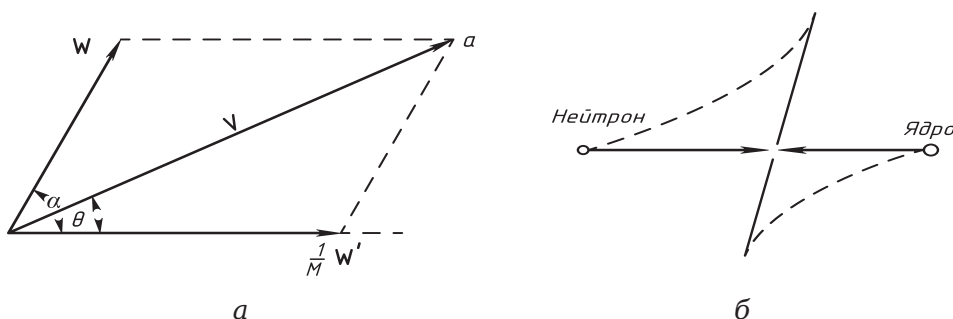


Рис. 11. Системы координат: а — лабораторная; б — связанная с центром масс

Итак, скорость нейтрона, центра масс и ядра удалось выразить как в неподвижной системе координат, так и в системе центра масс только через скорость нейтрона до соударения его с ядром в неподвижной системе координат.

Остается теперь найти соответствующие скорости после упругого соударения нейтрона с ядром. Ради удобства будем обозначать их теми же буквами без штрихов.

Для нахождения скорости нейтрона и ядра мишени в системе центра масс после соударения воспользуемся законами сохранения количества движения и кинетической энергии системы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} + M\mathbf{w}_0 &= \mathbf{w}' + M\mathbf{w}'_0; \\ \frac{w^2}{2} + \frac{Mw_0^2}{2} &= \frac{w'^2}{2} + \frac{Mw_0'^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.1.16)$$

Учитывая соотношения (11.1.14) и (11.1.15), приведем уравнение (11.1.16) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} + M\mathbf{w}_0 &= 0; \\ w^2 + Mw_0^2 &= \frac{M}{1+M} v'^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.1.17)$$

Первое из равенств (11.1.17) дает

$$\mathbf{w} = -M\mathbf{w}_0.$$

Отсюда следует, что

$$w = Mw_0. \quad (11.1.18)$$

Подставим  $w$  из уравнения (11.1.18) во второе соотношение (11.1.17). В результате будем иметь

$$w_0 = \frac{v'}{1+M} = w'_0. \quad (11.1.19)$$

Подставив  $w_0$  из (11.1.19) в равенство (11.1.18), получим

$$w = \frac{M}{1+M} v' = w'. \quad (11.1.20)$$

Из соотношений (11.1.19) и (11.1.20) следует, что относительные скорости как нейтрона, так и ядра-мишени в системе центра масс до и после столкновения по величине равны.

Остается лишь определить угол, на который изменится вектор скорости нейтрона в результате столкновения. С этой целью относительную скорость нейтрона после столкновения запишем в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_c = \mathbf{v} - \mathbf{v}'_c$$

откуда

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'_c = \mathbf{w} + \frac{1}{1+M} \mathbf{v}'. \quad (11.1.21)$$

Используя соотношения (11.1.14), приведем равенство (11.1.21) к виду

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \frac{1}{M} \mathbf{w}'. \quad (11.1.22)$$

Из соотношения (11.1.22) следует, что

$$v^2 = w^2 + \frac{1}{M^2} w'^2 + \frac{2}{M} ww' \cos \alpha, \quad (11.1.23)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{w}, \mathbf{w}')}{w w'}.$$

Разрешив уравнение (11.1.23) относительно  $\cos \alpha$  и воспользовавшись (11.1.20), получим

$$\cos \alpha = 1 - \frac{(M+1)^2}{2M} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v'} \right)^2 \right]. \quad (11.1.24)$$

С помощью (11.1.24) найдем выражение

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}')}{v w'}.$$

Для этого спроектируем параллелограмм скоростей на ось  $\mathbf{w}'$ . Тогда будем иметь

$$v \cos \theta = w \cos \alpha + \frac{1}{M} w'. \quad (11.1.25)$$

Учитывая соотношения (11.1.20) и (11.1.24), приведем равенство (11.1.25) к виду

$$\cos \theta = \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}. \quad (11.1.26)$$

Из соотношения (11.1.24) вытекает следующее неравенство:

$$1 \leq \frac{v'}{v} \leq \frac{M+1}{M-1}, \quad (11.1.27)$$

или

$$\frac{M-1}{M+1} v' \leq v \leq v'. \quad (11.1.28)$$

Неравенство (11.1.28) указывает на тот факт, что скорость нейтрона после соударения с ядром находится в строго определенных пределах.

Переходим теперь к определению функции распределения нейтронов по скоростям и направлениям после столкновения. С этой целью введем в рассмотрение функцию  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  — плотность вероятности нейтрону, имевшему до столкновения с ядром скорость  $\mathbf{v}'$ , в результате столкновения изменить скорость на  $\mathbf{v}$ . По определению функция  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  должна быть нормирована на единицу:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 1, \quad (11.1.29)$$



или

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{M-1}{M+1}v'}^{v'} v^2 dv \int d\Omega g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 1. \quad (11.1.29')$$

Соотношение (11.1.29') указывает на тот факт, что вероятность того, что нейтроны в результате рассеяния будут иметь скорость  $v$  из интервала  $\left(\frac{M-1}{M+1}v', v'\right)$  есть достоверное событие. Найдем явное выражение для функции  $\frac{1}{4\pi}g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ . С этой целью рассмотрим сначала закон распределения вероятностей в системе центра масс. Если предположить, что рассеяние нейтронов в системе центра масс изотропно, то есть вероятность рассеяния нейтронов на ядре зависит не от направления, а лишь от величины телесного угла, то с учетом нормировки она имеет вид

$$\frac{4\pi}{d\omega} = \frac{1}{4\pi} |\sin \alpha d\alpha d\beta|, \quad (11.1.30)$$

где  $\beta$  — азимут, а  $d\omega$  — элемент телесного угла в системе центра масс.

Имея в виду функциональную связь переменных  $\alpha$  и  $v$  (при фиксированной начальной скорости  $v'$ ), продифференцировав выражение (11.1.24), получим

$$\sin \alpha d\alpha = -\frac{(M+1)^2}{M} \frac{v dv}{v'^2}. \quad (11.1.31)$$

Следовательно, из предположения об изотропности рассеяния в системе центра масс вытекает закон распределения нейтронов по скоростям. Плотность вероятности такого распределения равна

$$\frac{1}{4\pi} \frac{(M+1)^2}{M} \frac{v}{v'^2}. \quad (11.1.32)$$

Найдем теперь закон распределения нейтронов по углам. Очевидно, что в силу существования функциональной связи

$$\cos \theta = \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \quad (11.1.33)$$

угол отклонения  $\theta$  будет полностью определен, если  $v'$  и  $v$  зафиксированы.

Формула (11.1.14), в частности, показывает, что упругое столкновение нейтрона с ядром возможно лишь при условии

$$\cos \theta - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) = 0. \quad (11.1.34)$$

Что касается случаев, когда это равенство не выполняется, то для них вероятность распределения оказывается равной нулю, так как столкновение нейтрона с ядром не осуществляется. Имея это в виду, можно формально написать трехмерный закон распределения вероятностей с помощью  $\delta$ -функции. С учетом выражения (11.1.32), а также нормировки (11.1.29) плотность вероятностей  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  примет вид

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} \frac{(M+1)^2}{M} \frac{1}{vv'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \quad (11.1.35)$$

В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$  функция  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(v' \Omega' \rightarrow v \Omega)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} g_{es}(v' \Omega' \rightarrow v \Omega) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{(M+1)^2}{M} \frac{v}{v'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (11.1.36)$$

где  $\mu_0 = \cos \theta$ .

Заметим, что функция  $\frac{1}{4\pi} g_{es}$  тождественно равна нулю вне интервала (11.1.27).

Если рассеяние нейтронов в системе центра масс неизотропно и анизотропия характеризуется функцией  $\gamma(\alpha, v')$ , нормированной следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\omega \gamma(\alpha, v') = 1,$$

то вероятность того, что нейтрон после рассеяния будет двигаться около направления  $\omega$  в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , будет равна

$$\gamma(\alpha, v') d\omega = |\gamma(\alpha, v') \sin \alpha d\alpha d\beta|.$$

Принимая во внимание, что

$$\alpha = \arccos \left\{ 1 - \frac{(M+1)^2}{2M} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v'} \right) \right] \right\}, \quad (11.1.37)$$

и учитывая соотношение (11.1.31), получим плотность вероятности распределения нейтронов по скоростям:

$$\frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right), \quad (11.1.38)$$

где

$$\gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) = \gamma\left(\arccos \left\{ \frac{(M+1)^2}{2M} \left[ 1 - \frac{v^2}{v'^2} \right] \right\}, v'\right). \quad (11.1.39)$$

В случае изотропного рассеяния

$$\gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) = 1. \quad (11.1.40)$$

В результате для анизотропного рассеяния в системе центра масс получим следующую функцию для функции плотности вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \\ = \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{1}{vv'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.1.41)$$

В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} g_{es}(v' \Omega' \rightarrow v \Omega) = \\ = \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.1.42)$$

Микроскопическое сечение упругого рассеяния обозначим  $\sigma_{es}(v')$ . Соответствующее макроскопическое сечение будет  $\Sigma_{es}(v')$  и длина свободного пробега до рассеяния  $\lambda_{es}(v')$ . Мы видим, что функция  $\frac{1}{4\pi} g_{es}(v' \Omega' \rightarrow v \Omega)$  от углов зависит только с помощью  $\mu_0 = \Omega \Omega'$ . Следовательно, можно ввести обозначение

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(v' \Omega' \rightarrow v \Omega) = \frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (11.1.43)$$

Итак, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\
& = \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \delta\left[\mu_0 - \left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right)\right].
\end{aligned} \tag{11.1.44}$$

С учетом выражения (11.1.44) кинетическое уравнение замедления примет вид

$$\begin{aligned}
\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi &= \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \int d\Omega' \int_v^{\frac{M+1}{M-1}v} \frac{v dv'}{v'^2} \Sigma_{es}(v') \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \times \\
&\times \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \delta\left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right) + \frac{1}{4\pi} g_f(v) Q(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{11.1.45}$$

где

$$Q = \int d\Omega' \int dv' \nu_f \Sigma_f \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega').$$

## 11.2. Граничные условия

Основное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана (11.1.10) содержит дифференциальный оператор. Это значит, что для полной определенности решения необходимо задать граничное условие на внешней поверхности реактора  $S$ .

Пусть реактор граничит с вакуумом. Тогда если поверхность  $S$  выпуклая (или невогнутая), то в качестве граничного условия необходимо взять следующее:

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \tag{11.2.1}$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Так как источники нейтронов находятся только в самом реакторе, то условие (11.2.1) отмечает тот факт, что нейтроны, налетающие на поверхность  $S$  из вакуума, отсутствуют.

Если поверхность  $S$  вогнута так, что луч, совпадающий с вектором  $\Omega$ , дважды пересекает область, занятую реактором, то в точках  $M$  и  $M'$  следует положить

$$\varphi(\mathbf{r}_M, v, \Omega) = \varphi(\mathbf{r}_{M'}, v, \Omega). \tag{11.2.2}$$

Предположим теперь, что область реактора состоит из зон с различными физическими свойствами. В этом случае необходимо потребовать непрерывность функции  $\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega)$  при переходе из одной области в другую<sup>1)</sup>, а именно:

$$\varphi(\mathbf{r}_{M+}, v\Omega) = \varphi(\mathbf{r}_{M-}, v\Omega), \quad (11.2.3)$$

где  $\mathbf{r}_{M+}$  и  $\mathbf{r}_{M-}$  — соответствующие пределы радиус-вектора при стремлении к точке  $M$  со стороны одной и другой зон.

### 11.3. Односкоростное кинетическое уравнение

В том случае, когда рассеяние нейтронов происходит на неподвижных ядрах, а сечения  $\Sigma_{es}, \Sigma_{is}, \Sigma_c$  и  $\Sigma_f$  не зависят от скорости и являются величинами постоянными, можно перейти к односкоростному кинетическому уравнению.

Для этого рассмотрим уравнение замедления

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) + S(\mathbf{r}, v, \Omega), \quad (11.3.1)$$

где

$$w(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \\ + w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_f(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Проинтегрируем уравнение (11.3.1) по переменной  $v$ . Тогда получим

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \int dv w(\mu_0, v' \rightarrow v) + S(\mathbf{r}, \Omega), \quad (11.3.2)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int dv \varphi(\mathbf{r}, v, \Omega); \quad S(\mathbf{r}, \Omega) = \int dv S(\mathbf{r}, v, \Omega).$$

С учетом  $w_{is}, w_{n,2n}, w_f$  получим

$$\int dv w(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int dv w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \\ + \frac{1}{4\pi} (\Sigma_{is} + \nu_{n,2n} \Sigma_{n,2n} + \nu_f \Sigma_f). \quad (11.3.3)$$

---

<sup>1)</sup>Подробно по этому поводу см. работу [135].

В предположении, что рассеяние происходит на свободных и неподвижных ядрах, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\ = \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \int dv \gamma\left(\frac{v}{v'}\right) \frac{v}{v'^2} \delta\left[\mu_0 - \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right]. \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

Здесь также предположено, что

$$\gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) = \gamma\left(\frac{v}{v'}\right).$$

Переходя в интеграле (11.3.4) к новой переменной интегрирования  $\xi$  по формуле

$$\xi = \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}, \quad (11.3.5)$$

выражение (11.3.4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\ = \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \int \frac{\Psi^2(\xi) \gamma(\Psi)}{(M+1)\Psi(\xi) - \xi} \delta(\Omega\Omega' - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11.3.6)$$

где

$$\frac{v}{v'} = \Psi(\xi) = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + M^2 - 1}}{M - 1}$$

— корень уравнения (11.3.5).

С учетом свойств  $\delta$ -функции вычислим интеграл в выражении (11.3.6). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi M} \gamma\left(\frac{\Omega\Omega' + \sqrt{[\Omega\Omega']^2 + M^2 - 1}}{M + 1}\right) \times \\ \times \frac{[\Omega\Omega' + \sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}]^2}{\sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

Если рассеяние изотропно в системе центра масс, то

$$\frac{1}{4\pi} \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi M} \frac{[(\Omega\Omega') + \sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}]^2}{\sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}}. \quad (11.3.8)$$

Анализ формул (11.3.7) и (11.3.8) показывает, что в правой их части стоят выражения, зависящие только от

$$\Omega\Omega' = \mu_0 = \cos \theta.$$

Отсюда приходим к важному выводу, что

$$\frac{1}{4\pi} \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0). \quad (11.3.9)$$

Следовательно, выражения (11.3.7) и (11.3.8) представимы в следующем виде:

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{4\pi M} \gamma \left( \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M + 1} \right) \frac{(\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1})^2}{\sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}} \quad (11.3.10)$$

и

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{4\pi M} \frac{(\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1})^2}{\sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}. \quad (11.3.11)$$

Рассмотрим предельный переход при  $M \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$\gamma \left( \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M - 1} \right) \rightarrow \gamma(1) = 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{4\pi},$$

то есть приходим к очевидному результату, что рассеяние на бесконечно тяжелых ядрах *изотропно* в лабораторной системе координат. В более общем случае для любых замедлителей выражение (11.3.11) можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра, то есть

$$\frac{1}{4\pi} g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\mu_0), \quad (11.3.12)$$

где  $g_n$  — коэффициент разложения функции  $g_{es}(\mu_0)$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

Возвращаясь к уравнению (11.3.2), мы видим, что его интегральный член преобразуется к виду

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega') [\Sigma_{es} g_{es}(\mu_0) + \Sigma_{is} + \nu_{n,2n} \Sigma_{n,2n} + \nu_f \Sigma_f].$$

В результате уравнение (11.3.2) примет вид

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega), \quad (11.3.13)$$

где

$$w(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} (\Sigma_{es} g_{es}(\mu_0) + \Sigma_{is} + \nu_{n,2n} \Sigma_{n,2n} + \nu_f \Sigma_f). \quad (11.3.14)$$

К уравнению (11.3.13) необходимо присоединить граничное условие

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (11.3.15)$$

## 11.4. Кинетическое уравнение для бесконечной однородной среды

Другим частным случаем кинетического уравнения, имеющим важное значение, является случай кинетического уравнения для бесконечной среды. Так как в бесконечной однородной среде все направления движения нейтронов оказываются равновероятными, то решение задачи не будет зависеть от переменной  $\Omega$ . Учитывая далее, что вследствие однородности пространства решение также не будет зависеть от  $\mathbf{r}$ , основное кинетическое уравнение реактора в этом случае можно записать в виде

$$\Sigma(v) \varphi(v) = \int dv' \varphi(v') w(v' \rightarrow v) + S(v), \quad (11.4.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w(v' \rightarrow v) &= \int d\Omega' w(\mu_0, v' \rightarrow v); \\ \Sigma &= \Sigma_c(v) + \Sigma_s(v). \end{aligned} \right\} \quad (11.4.2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} w &= w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \\ &\quad + w_f(\mu_0, v' \rightarrow v), \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

где функции  $w_{es}, w_{is}, w_{n,2n}$  и  $w_f$  определены в гл. 10.

Рассмотрим случай, когда рассеяние нейтронов происходит на свободных неподвижных ядрах. Тогда функция  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  будет определена формулой



$$\begin{aligned}
w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) &= \Sigma_{es} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \times \\
&\times \delta\left[\mu_0\left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right)\right], \\
&\left(\frac{M-1}{M+1} v' \leq v < v'\right).
\end{aligned} \tag{11.4.4}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
w_{es}(v' \rightarrow v) &= \Sigma_{es} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \int d\omega \delta \times \\
&\times \left[\mu_0\left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right)\right].
\end{aligned} \tag{11.4.5}$$

Отсюда следует, что

$$w_{es}(v' \rightarrow v) = \Sigma_{es} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{(M+1)^2}{2M} \frac{v}{v'^2}. \tag{11.4.6}$$

В частности, если рассеяние изотропно в системе центра масс, то

$$w_{es}(v' \rightarrow v) = \Sigma_{es} \frac{(M+1)^2}{2M} \frac{v}{v'^2}. \tag{11.4.7}$$

Если неупругое рассеяние несущественно, а реакции  $(n, 2n)$  деления ядер отсутствуют, то уравнение (11.4.1) запишется в виде

$$\Sigma\varphi = \frac{(M+1)^2}{2M} \int_v^{\frac{M+1}{M-1}v} \frac{v dv'}{v'^2} \Sigma_{es}(v') \varphi(v') + S(v). \tag{11.4.8}$$

# 12

## Сопряженные уравнения

### 12.1. Общая теория сопряженных уравнений реактора

Сопряженные уравнения и сопряженные функции, являющиеся решениями сопряженных уравнений, играют исключительную роль в теории ядерных реакторов.

Теория сопряженных уравнений реактора впервые была разработана Е. Вигнером [67]. В дальнейшем эта теория усовершенствовалась в работах А. С. Романовича и Л. Н. Усачева [362, 363], Р. Эрлиха и Г. Гурвитца [434], С. Глесстона и М. Эдлунда [106] и др.

Для односкоростных кинетических уравнений теория сопряженных уравнений разработана Н. А. Дмитриевым (см. [362]) и К. Фуксом [442]. Более общая формулировка сопряженных уравнений была дана в работе Л. Н. Усачева [362].

Более общие результаты по теории сопряженных уравнений и сопряженных функций изложены в работах Б. Б. Кадомцева [147], а также автора и В. В. Орлова [257].

Важнейшей особенностью сопряженных уравнений является то, что они дают возможность построения теории возмущений.

Рассмотрим поток нейтронов  $\varphi(x)$ , удовлетворяющий однородному уравнению

$$\mathbf{L}\varphi = 0, \quad (12.1.1)$$

где  $\mathbf{L}$  — линейный оператор, заданный на множестве функций  $D(\mathbf{L}) = \{f(x)\}$ , удовлетворяющих некоторым требованиям. При этом под символом  $x$  будем понимать совокупность всех переменных задачи  $(\mathbf{r}, \Omega, v)$ . Будем предполагать, что оператор  $\mathbf{L}$  и множество функций  $D(\mathbf{L})$  — вещественные.

Введем в рассмотрение скалярное произведение функций  $g(x)$  и  $h(x)$ , так что  $g \in D(L)$ , а  $h \in D(L^*)$ . Свойства функций множества  $D(L^*)$  будут обсуждены в дальнейшем.

Если переменная  $x$  непрерывна, то скалярное произведение может быть определено как интеграл от произведения этих функций:

$$(g, h) = \int g(x)h(x) dx, \quad (12.1.2)$$

где интегрирование ведется по всей области определения функций  $g$  и  $h$ .

Наряду с оператором  $L$  введем в рассмотрение сопряженный оператор в смысле Лагранжа  $L^*$ , определяемый с помощью следующего равенства:

$$(h, Lg) = (g, L^*h), \quad g \in D(L), \quad h \in D(L^*). \quad (12.1.3)$$

Если в качестве функции  $g$  выбрать решение уравнения (12.1.1), то из соотношения (12.1.3) следует, что функция  $h$  должна быть решением сопряженного уравнения

$$L^*\varphi^* = 0. \quad (12.1.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что множество функций  $D(L^*)$  должно определяться из того условия, чтобы оператор  $L^*$  на этом множестве имел смысл, а также удовлетворялось функциональное соотношение (12.1.3).

Операторы  $L$  и  $L^*$  удобно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} L &= M + \lambda N; \\ L^* &= M^* + \lambda N^*, \end{aligned} \right\} \quad (12.1.5)$$

где операторы  $M$  и  $M^*$ , а также  $N$  и  $N^*$  удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} (h, Mg) &= (g, M^*h); \\ (h, Ng) &= (g, N^*h); \end{aligned} \right\} \quad (12.1.6)$$

$\lambda$  — характеристическое число, смысл которого будет пояснен в дальнейшем.

Представление операторов  $L$  и  $L^*$  в виде суммы двух допускает известный произвол и диктуется обычно косвенными математическими и физическими соображениями. Например, в случае уравнений реактора в качестве оператора  $N$  удобно принять оператор числа вторичных нейтронов деления.

С учетом равенств (12.1.5) основное и сопряженное уравнения реактора запишутся в виде

$$\mathbf{M}\varphi = -\lambda\mathbf{N}\varphi; \quad (12.1.7)$$

$$\mathbf{M}^*\varphi^* = -\lambda\mathbf{N}^*\varphi^*. \quad (12.1.8)$$

Уравнения (12.1.7) и (12.1.8) однородны, поэтому вместе с соответствующими однородными граничными условиями, которым удовлетворяют функции множеств  $D(L)$  и  $D(L^*)$ , они определяют задачу на собственные числа.

Пусть  $\{\lambda_i\}$  — набор собственных чисел, а  $\{\varphi_i\}$  и  $\{\varphi_i^*\}$  — соответствующие наборы функций основного и сопряженного уравнений. Тогда первое собственное число  $\lambda = \lambda_1$  допускает неотрицательные решения уравнений (12.1.7) и (12.1.8), имеющих физический смысл потока нейтронов и функции, сопряженной с потоком, которую будем в дальнейшем называть *ценностью нейтронов*.

До сих пор предполагалось, что  $\lambda$  — математический параметр. Удобство этого параметра заключается в том, что он находится из условия, чтобы неотрицательное решение однородной задачи существовало. Если теперь изменять физические характеристики реактора или его размеры, то соответственно будет изменяться и характеристическое число задачи  $\lambda = \lambda_1$ . Очевидно, реактор будет стационарным и критическим, если будет удовлетворено условие

$$\lambda = \lambda_1 = 1.$$

Переходим теперь к рассмотрению неоднородных уравнений реактора:

$$\mathbf{L}\varphi = S(x), \quad (12.1.9)$$

где  $S(x)$  — функция, описывающая внешние источники нейтронов.

При решении тех или иных физических задач, описывающихся неоднородными уравнениями, обычно имеют в виду получение в результате значения некоторой величины, являющейся функционалом от потока  $\varphi(x)$ . Любая величина, линейно свя-

занная с потоком, может быть выражена в виде скалярного произведения. Например, если нас интересует число актов некоторого ядерного процесса с нейтронами в среде, характеризующийся сечением  $\Sigma(x)$ , то это число есть

$$I_{\Sigma} = \int \varphi(x) \Sigma(x) dx = (\varphi, \Sigma).$$

Таким образом, мы будем рассматривать физические величины, которые могут быть выражены в виде линейного функционала от потока  $\varphi(x)$ :

$$I_p[\varphi] = (\varphi, p),$$

где величина  $p$  характеризует интересующий нас физический процесс.

Так же как и в случае однородных уравнений, вместе с оператором  $L$  введем в рассмотрение сопряженный к нему оператор в смысле Лагранжа  $L^*$ , определяющийся условием

$$(h, Lg) = (g, L^*h), \quad (12.1.10)$$

где  $g$  и  $h$  — функции из множеств  $D(L)$  и  $D(L^*)$ .

Введем далее в рассмотрение неоднородное сопряженное уравнение

$$L^* \varphi_p^* = p(x), \quad (12.1.11)$$

где  $p(x)$  — некоторая, пока произвольная функция.

Подставив в соотношение (12.1.10) вместо функций  $g$  и  $h$  решения уравнений (12.1.9) и (12.1.11) — функции  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$ , получим

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p) \quad (12.1.12)$$

или, воспользовавшись уравнениями (12.1.9) и (12.1.11),

$$(\varphi_p^*, S) = (\varphi, p). \quad (12.1.13)$$

Отсюда получаем

$$I_s[\varphi_p^*] = I_p[\varphi].$$

Поэтому, если нам нужно найти значение функционала  $I_p[\varphi]$ , то мы можем получить его либо решив уравнение (12.1.9) и усреднив эту величину по формуле

$$I_p[\varphi] = (\varphi, p), \quad (12.1.14)$$

либо решив уравнение (12.1.11) и определив ту же самую величину по формуле

$$I_p[\varphi] = (\varphi_p^*, S). \quad (12.1.15)$$

Следовательно, каждому линейному функционалу  $I_p[\varphi] = (\varphi, p)$  может быть поставлена в соответствие функция  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющая уравнению (12.1.11), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию  $p(x)$ , характеризующую интересующий нас ядерный процесс.

Пусть в среде имеется источник нейтронов единичной мощности, помещенный в точку  $x_0$ , то есть

$$S(x) = \delta(x - x_0), \quad (12.1.16)$$

так как  $(S(x), \delta(x - x_0)) = S(x_0)$ , то в этом случае

$$I_p[\varphi] = I_{S=\delta(x-x_0)}[\varphi_p^*] = \varphi_p^*(x_0). \quad (12.1.17)$$

Следовательно, сопряженная функция  $\varphi_p^*(x_0)$  описывает зависимость функционала  $I_p[\varphi] = (\varphi, p)$  от точки помещения источника нейтронов единичной мощности.

Представим себе физическую систему (или прибор), в котором измеряется некоторая величина, являющаяся линейным функционалом от потока  $I_p[\varphi]$ . Если в некоторую «точку» системы мы впустим определенное количество частиц (или, наоборот, будем изымать эти частицы), то измеряемое значение величины  $I_p[\varphi]$  будет соответственно увеличиваться (или уменьшаться), причем это увеличение (или уменьшение) будет зависеть от той точки  $x_0$ , в которой мы производим изменение числа частиц. Как видно из предыдущего рассмотрения, эта зависимость описывается сопряженной функцией  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющей уравнению (12.1.11). Следовательно, сопряженная функция  $\varphi_p^*(x)$  дает вклад частиц, находящихся в той или иной точке системы, в интересующий нас функционал  $I_p$ . Поэтому функцию  $\varphi_p^*(x)$  можно назвать *ценностью нейтронов в точке  $x$  по отношению к функционалу  $I_p[\varphi] = (\varphi, p)$* .

## 12.2. Сопряженные уравнения реактора

Стационарная самоподдерживающаяся цепная реакция деления в ядерном реакторе описывается однородным уравнением

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) = 0 \quad (12.2.1)$$

при условии, что

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (12.2.2)$$

Таким образом, в этом случае

$$\mathbf{L}\varphi \equiv \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (12.2.3)$$

а множество функций  $D(L) = \{\varphi\}$ , на котором определен оператор  $\mathbf{L}$ , состоит из элементов, непрерывных в объеме реактора  $G$  вплоть до границы  $S$  и удовлетворяющих граничному условию (12.2.2). Требуется также, чтобы операторы в соотношении (12.2.3) от функций множества имели смысл.

Введем в рассмотрение скалярное произведение функций  $\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega)$  и  $\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega)$

$$(\varphi, \varphi^*) = \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \varphi^*, \quad (12.2.4)$$

где интегрирование производится по всей области переменных  $(\mathbf{r}, \Omega, v)$ .

Для определения вида сопряженного оператора  $\mathbf{L}^*$  воспользуемся основным функциональным соотношением

$$(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*). \quad (12.2.5)$$

Рассмотрим левую часть соотношения (12.2.5):

$$\begin{aligned} (\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) &= \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^* \times \\ &\times \left[ \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) \right]. \end{aligned} \quad (12.2.6)$$

В правой части функционала (12.2.6) совершим некоторые преобразования. Рассмотрим интеграл

$$\int d\mathbf{r} \varphi^* \Omega \nabla \varphi. \quad (12.2.7)$$

Имея в виду, что по теореме Гаусса – Остроградского

$$\int_G d\mathbf{r}(\Omega \nabla) \varphi \varphi^* = \int_S dS |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^*,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ , а вектор  $\Omega$  не зависит от переменных интегрирования, непосредственно приходим к следующему соотношению:

$$\int_G d\mathbf{r} \varphi^* \Omega \nabla \varphi = - \int_G d\mathbf{r} \varphi \Omega \nabla \varphi^* + \int_S dS |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^*. \quad (12.2.8)$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0, \quad (12.2.9)$$

и принять во внимание условие (12.2.2), то будем иметь

$$\int_S dS |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^* = 0. \quad (12.2.10)$$

Следует отметить, что равенство (12.2.8) остается справедливым при всевозможных направлениях  $\Omega$ .

Таким образом, соотношение (12.2.7) приводится к виду

$$\int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^* \Omega \nabla \varphi = - \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \Omega \nabla \varphi^*. \quad (12.2.11)$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$\int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (12.2.12)$$

Изменив в (12.2.12) порядки интегрирования, получим

$$\int d\mathbf{r} \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \int d\Omega \int dv \varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) w(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\ & = \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v \rightarrow v'). \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

Принимая во внимание (12.2.11) и (12.2.13), соотношение (12.2.14) можно преобразовать к виду



$$\begin{aligned}
(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) &\equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi \times \\
&\times \left[ -\mathbf{\Omega} \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) w(\mu_0, v \rightarrow v') \right].
\end{aligned} \tag{12.2.14}$$

Отсюда следует, что

$$(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*),$$

где

$$\mathbf{L}^* \varphi^* = -\mathbf{\Omega} \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}') w(\mu_0, v \rightarrow v'). \tag{12.2.15}$$

Если теперь предположить, что в качестве  $\varphi(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega})$  выбирается решение задачи (12.2.1), (12.2.2), то мы приходим к сопряженной задаче

$$-\mathbf{\Omega} \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}') w(\mu_0, v \rightarrow v') = 0, \tag{12.2.16}$$

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) = 0 \text{ на } S \text{ при } \mathbf{\Omega} \mathbf{n} > 0. \tag{12.2.17}$$

Переходим теперь к рассмотрению неоднородного кинетического уравнения реактора:

$$-\mathbf{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}') w(\mu_0, v' \rightarrow v) = S(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}). \tag{12.2.18}$$

Если нас интересует некоторый функционал  $J(\varphi)$  то, согласно общей теории, сопряженное уравнение реактора по отношению к функционалу  $I_p[\varphi]$  будет иметь вид

$$-\mathbf{\Omega} \nabla \varphi_p^* + \Sigma \varphi_p^* - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi_p^*(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}') w(\mu_0, v \rightarrow v') = p(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) \tag{12.2.19}$$

при условии

$$\varphi_p^*(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) = 0 \text{ на } S \text{ при } \mathbf{\Omega} \mathbf{n} > 0, \tag{12.2.20}$$

где  $p(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega})$  — функция, характеризующая тот или иной ядерный процесс. В таком случае

$$I_p[\varphi] = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi p, \tag{12.2.21}$$

или, что то же самое,

$$I_s[\varphi_p^*] = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi_p^* S. \tag{12.2.22}$$

Приведем выражения для некоторых основных функционалов, встречающихся в теории переноса нейтронов в веществе.

1. Если интересующей нас величиной является число актов некоторого процесса, имеющего сечение  $\Sigma_\alpha(\mathbf{r}, v)$  в объеме  $G_\alpha$  внутри рассматриваемой области  $G$ , то это число может быть представлено в виде функционала

$$I_\alpha[\varphi] = \int_{G_\alpha} d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \Sigma_\alpha(\mathbf{r}, v) \varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) \quad (12.2.23)$$

или в виде функционала

$$I_s[\varphi_p^*] = \int_G d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv S(\mathbf{r}, v, \Omega) \varphi_\alpha^*(\mathbf{r}, v, \Omega), \quad (12.2.24)$$

где  $S(\mathbf{r}, v, \Omega)$  — распределение источников нейтронов в среде, а  $\varphi_\alpha^*(\mathbf{r}, v, \Omega)$  — решение сопряженного уравнения (12.2.19) при

$$p = \begin{cases} \Sigma_\alpha(\mathbf{r}, v), & \mathbf{r} \in G_\alpha, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

2. Пусть измерительный прибор регистрирует излучение, попадающее в его объем через поверхность  $S_\alpha$  с некоторой эффективностью  $\beta(\mathbf{r}_s, v, \Omega)$ . Показания такого прибора могут быть записаны в виде функционала

$$I_\alpha[\varphi] = \int_{S_\alpha} d\mathbf{r}_s \int dv \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} d\Omega \Omega \mathbf{n} \beta(\mathbf{r}_s, v, \Omega) \varphi(\mathbf{r}_s, v, \Omega), \quad (12.2.25)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S_\alpha$ , направленная внутрь объема прибора. Если распределение источников в среде есть  $S(\mathbf{r}, v, \Omega)$ , то этот функционал может быть также записан в виде

$$I_s[\varphi_p^*] = \int d\mathbf{r} \int dv \int d\Omega S(\mathbf{r}, v, \Omega) \varphi_\alpha^*(\mathbf{r}, v, \Omega), \quad (12.2.26)$$

причем функция  $\varphi_\alpha^*(\mathbf{r}, v, \Omega)$  удовлетворяет уравнению (12.2.19) с поверхностным «источником»

$$p = \beta(\mathbf{r}_s, v, \Omega) \cdot \Omega \mathbf{n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \quad (12.2.27)$$

Если измерительный прибор находится вне объема  $G$ , то также можно пользоваться этими формулами, причем  $\beta(\mathbf{r}_s, v, \Omega)$  характеризует вероятность вылетевшему из среды нейтрону по-

пасть в прибор и быть им зарегистрированным. При  $\beta = 1$  функционалы (12.2.25) и (12.2.26) описывают полный поток нейтронов, вылетающих из среды  $G_\alpha$  через поверхность  $S_\alpha$ .

3. В качестве функционала можно рассматривать и сам поток излучения в некоторой «точке»  $(\mathbf{r}_0, v_0, \Omega_0)$ . В этом случае

$$p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(v - v_0) \delta(\Omega - \Omega_0), \quad (12.2.28)$$

а сопряженная функция  $\varphi_p^*$  есть не что иное, как функция Грина сопряженного уравнения.

Заметим, что в различных задачах могут встречаться и другие функционалы, не сводящиеся к приведенным выше.

### 12.3. Односкоростное сопряженное уравнение реактора

Рассмотрим однородное односкоростное уравнение

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) \quad (12.3.1)$$

при условии

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (12.3.2)$$

С помощью преобразований, аналогичных рассмотренным в § 12.2, нетрудно получить сопряженное уравнение

$$-\Omega \nabla \Phi^* + \Sigma \Phi^* - \int d\Omega' \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) = 0 \quad (12.3.3)$$

при условии

$$\Phi^*(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (12.3.4)$$

Если рассматривается неоднородное уравнение

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) + S(\mathbf{r}, \Omega) \quad (12.3.5)$$

при условии

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (12.3.6)$$

то сопряженное по отношению к функционалу  $I_p[\Phi]$  уравнение имеет вид

$$-\Omega \nabla \Phi_p^* + \Sigma \Phi_p^* = \int d\Omega' \Phi_p^*(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) + p(\mathbf{r}, \Omega), \quad (12.3.7)$$

$$\Phi_p^*(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } S \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (12.3.8)$$

В качестве  $I_p[\Phi]$  или  $I_s[\Phi_p^*]$  можно взять функционалы, аналогичные тем, которые были рассмотрены в § 12.2, с той только разницей, что интегрирование по переменной  $v$  следует исключить.

## 12.4. Сопряженное уравнение для бесконечной однородной среды

Переходим теперь к выводу сопряженного кинетического уравнения для бесконечной однородной среды. В этом случае воспользуемся однородным уравнением

$$\Sigma \varphi(v) - \int dv' \varphi(v') w(v' \rightarrow v) = 0. \quad (12.4.1)$$

Вводя скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \varphi^*) = \int dv \varphi \varphi^*, \quad (12.4.2)$$

нетрудно прийти к сопряженному уравнению

$$\Sigma \varphi^*(v) - \int dv' \varphi^*(v') w(v' - v) = 0.$$

Если рассматривать неоднородное кинетическое уравнение

$$\Sigma \varphi - \int dv' \varphi(v') w(v' - v) = S(v), \quad (12.4.3)$$

то сопряженным уравнением по отношению к функционалу  $I_p[\varphi]$  будет следующее:

$$\Sigma \varphi_p^* - \int dv' \varphi_p^*(v') w(v' - v) = p(v). \quad (12.4.4)$$

В частности, если  $p(v) = \Sigma(v)$ , то функционал

$$I_p[\varphi] = \int \Sigma \varphi dv$$

будет давать полное число актов некоторого ядерного процесса. Если функцию  $p(v)$  выбрать следующим образом:

$$p(v) = \beta(v)\Sigma(v),$$

где  $\beta(v)$  — функция, характеризующая прибор, то

$$I_p[\varphi] = \int \beta \Sigma \varphi dv.$$

## 12.5. Теория возмущений

Сформулируем теорию возмущений для неоднородных уравнений реактора.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}\varphi = S. \quad (12.5.1)$$

Если свойства среды, с которой взаимодействуют нейтроны, изменяются, то есть если оператор уравнения (12.5.1) переходит в

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \delta\mathbf{L},$$

то изменяется само решение задачи (12.5.1) —  $\varphi(x)$  и значение функционала  $I_p[\varphi]$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x), I_p[\varphi] \rightarrow I_p' = I_p + \delta I_p.$$

Установим связь между изменением оператора  $\delta\mathbf{L}$  и изменением функционала  $\delta I_p$ .

Систему (12.5.1) в дальнейшем будем называть невозмущенной. Для возмущенной системы уравнение запишется в виде

$$\mathbf{L}'\varphi' = (\mathbf{L} + \delta\mathbf{L})\varphi' = S. \quad (12.5.2)$$

Сопряженная функция невозмущенной системы, соответствующая функционалу  $I_p$ , описывается уравнением

$$\mathbf{L}^* \varphi_p^* = p. \quad (12.5.3)$$

Помножив скалярно уравнение (12.5.2) на  $\varphi_p^*$ , уравнение (12.5.3) на  $\varphi'$ , вычитая одно из другого и воспользовавшись определением сопряженного оператора  $\mathbf{L}^*$ , получим слева

$$(\varphi_p^*, \mathbf{L}'\varphi') - (\varphi', \mathbf{L}^* \varphi_p^*) = (\varphi_p^*, \delta\mathbf{L}\varphi'), \quad (12.5.4)$$

а справа

$$(\varphi_p^*, S) - (\varphi', p) = I_p[\varphi] - I_p[\varphi'] = -\delta I_p. \quad (12.5.5)$$

Приравнивая выражения (12.5.4) и (12.5.5), получим иско-  
мое общее соотношение теории возмущений:

$$\delta I_p = -(\varphi_p^*, \delta L \varphi'). \quad (12.5.6)$$

Если вместо уравнений (12.5.2) и (12.5.3) рассмотреть сопря-  
женное возмущенное уравнение

$$(L^* + \delta L^*) \varphi_p^{*'} = 0 \quad (12.5.7)$$

и невозмущенное основное уравнение (12.5.1), то аналогичным  
путем можно получить также соотношение

$$\delta I_p = -(\varphi, \delta L^* \varphi^{*'}), \quad (12.5.8)$$

которое, конечно, эквивалентно (12.5.6).

Если возмущение оператора  $L$  (а следовательно, и  $L^*$ ) мало,  
так что оно не сильно искажает функции  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$ , то в формулах  
(12.5.6) и (12.5.8) можно приближенно положить

$$\varphi' = \varphi \text{ и } \varphi^{*'} = \varphi^*.$$

При этом мы получим две эквивалентные формулы теории  
малых возмущений

$$\left. \begin{aligned} \delta I_p &= -(\varphi_p^*, \delta L \varphi); \\ \delta I_p &= -(\varphi, \delta L^* \varphi_p^*). \end{aligned} \right\} \quad (12.5.9)$$

Полученные формулы теории возмущений, кроме их прямо-  
го использования для оценки различных эффектов и для анали-  
за измерений, могут иметь и еще одно весьма важное примене-  
ние.

При теоретическом рассмотрении и в практических расче-  
тах часто пользуются методом замены исследуемой сложной  
системы упрощенной моделью. Необходимым условием такой  
замены является, очевидно, требование, чтобы она не приво-  
дила к изменению некоторых основных для рассматриваемого  
вопроса характеристик системы. Примером такого подхода  
к теории диффузии нейтронов могут служить замена гете-  
рогенной среды на однородную с соответствующим образом  
усредненными сечениями или методы усреднения по некото-  
рому энергетическому интервалу изменяющихся с энергией  
сечений. К таким методам относится и метод эффективных  
граничных условий, заключающийся в замене истинных усло-

вий некоторыми упрощенными, но такими, которые приводят к правильному значению потока нейтронов вдали от границы.

Полученные выше формулы теории возмущений позволяют сформулировать весьма общий подход к такого рода задачам.

Пусть рассматриваемая система характеризуется оператором  $L$ , причем наиболее существенной величиной в рассматриваемой задаче является функционал  $I_p[\varphi]$ . Если искомая простая модель характеризуется оператором  $L' = L + \delta L$ , то для того, чтобы величина  $I_p$  не изменялась при переходе от истинной системы к модели, необходимо, чтобы

$$\delta I = -(\varphi_p^*, [L' - L]\varphi') = 0, \quad (12.5.10)$$

то есть

$$(\varphi_p^*, L'\varphi') = (\varphi_p^*, L\varphi'). \quad (12.5.11)$$

Если мы интересуемся несколькими величинами  $I_{p_1}, I_{p_2}$  и т.д., то соответственно получим несколько условий типа (12.5.11) с решениями  $\varphi_{p_1}^*, \varphi_{p_2}^*$  и т.д.

Условие (12.5.11) не определяет однозначно искомой эквивалентной модели, но является ее необходимым условием и вместе с другими соображениями может помочь ее нахождению.

## 12.6. Формулы теории возмущений

Выведем формулы теории возмущений для уравнений реактора. Сначала рассмотрим однородное уравнение реактора:

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) = 0. \quad (12.6.1)$$

Представим это уравнение в виде

$$M\varphi + \lambda N\varphi = 0, \quad (12.6.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M\varphi &= \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w_s(\mu_0, v' \rightarrow v); \\ N\varphi &= - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w_f(\mu_0, v' \rightarrow v); \end{aligned} \right\} \quad (12.6.3)$$

$\lambda$  — характеристический параметр, связанный с коэффициентом размножения нейтронов в реакторе  $K_{\text{эфф}}$  формулой

$$\lambda = \frac{1}{K_{\text{эфф}}}.$$

Сопряженное уравнение реактора

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w_s(\mu_0, v \rightarrow v') = 0 \quad (12.6.4)$$

также представим в виде

$$\mathbf{M}^* \varphi^* + \lambda \mathbf{N}^* \varphi^* = 0, \quad (12.6.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^* \varphi^* &= -\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \\ &\quad - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w_s(\mu_0, v \rightarrow v'); \\ \mathbf{N}^* \varphi^* &= - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w_f(\mu_0, v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (12.6.6)$$

Уравнения (12.6.2) и (12.6.5) примем в качестве невозмущенных. Если теперь предположить, что физические параметры реактора возмущены, так что

$$\left. \begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma + \delta\Sigma; \\ w'_s &= w_s + \delta w_s; \\ w'_f &= w_f + \delta w_f, \end{aligned} \right\} \quad (12.6.7)$$

то для обеспечения стационарного режима работы реактора необходимо потребовать изменение величины  $K_{\text{эфф}}$  или параметра  $\lambda$  так, чтобы согласно формуле (12.5.10)

$$\delta\lambda = -\frac{(\varphi^*, \delta\mathbf{L}\varphi')}{(\varphi^*, \mathbf{N}\varphi')}, \quad (12.6.8)$$

где

$$\delta\mathbf{L}\varphi' = \delta\mathbf{M}\varphi' + \lambda\delta\mathbf{N}\varphi'.$$

Имея это в виду, получим<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Впервые формула (12.6.9) была получена Л. Н. Усачевым [362, 363].



$$\begin{aligned}
\delta\lambda = & -\frac{1}{\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv N \varphi' \varphi^*} \left\{ \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi^* \times \right. \\
& \times \left[ \varphi' \delta\Sigma - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi' \delta w_s(\mu_0, v' \rightarrow v) - \lambda \int d\mathbf{\Omega}' \times \right. \\
& \left. \left. \times \int dv' \varphi' \delta w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{12.6.9}$$

Для односкоростной задачи, а также задачи, зависящей только от скоростей формулы теории возмущений, аналогичны (12.6.9)

$$\begin{aligned}
\delta\lambda = & -\frac{1}{\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} N \Phi' \Phi^*} \left\{ \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \Phi^* \left[ \Phi' \delta\Sigma - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int d\mathbf{\Omega}' \Phi' \delta w_s(\mu_0) - \lambda \int d\mathbf{\Omega}' \Phi' \delta w_f(\mu_0) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{12.6.10}$$

и

$$\begin{aligned}
\delta\lambda = & -\frac{1}{\int dv N \varphi' \varphi^*} \left\{ \int dv \varphi^* \left[ \varphi' \delta\Sigma - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int dv' \varphi' \delta w_s(v' \rightarrow v) - \lambda \int dv' \varphi' \delta w_f(v' \rightarrow v) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{12.6.11}$$

Если теория возмущений формируется для неоднородных кинетических уравнений реактора, то, согласно изложенной теории, вариации исследуемых функционалов найдутся в следующем виде:

для общего кинетического уравнения

$$\delta I_p = - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi_p^* \left[ \varphi' \delta\Sigma - \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi' \delta w(\mu_0, v' \rightarrow v) \right], \tag{12.6.12}$$

для односкоростного кинетического уравнения

$$\delta I_p = - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \Phi_p^* \left[ \Phi' \delta\Sigma - \int d\mathbf{\Omega}' \varphi' \delta w(\mu_0) \right], \tag{12.6.12'}$$

и, наконец, для скоростной задачи

$$\delta I_p = - \int dv \varphi_p^* \left[ \varphi' \delta \Sigma - \int dv' \varphi' \delta w(v' \rightarrow v) \right]. \quad (12.6.13)$$

Здесь в качестве  $I_p[\varphi]$  можно рассматривать любой линейный функционал. Если в формулах (12.6.9), (12.6.10), (12.6.11), а также (12.6.12), (12.6.12'), (12.6.13) возмущение в функции потока  $\varphi$  считать малым, то можно  $\varphi'$  заменить  $\varphi$  и, таким образом, прийти к соответствующим формулам малых возмущений.

# 13

## Диффузионное приближение

### 13.1. $P_1$ -приближение

Так же как и в случае односкоростной теории, введем в рассмотрение диффузионное приближение, сущность которого состоит в том, что решение кинетического уравнения замедления имеем в виде ряда по сферическим функциям, ограничиваясь в разложении двумя первыми членами. Тогда для коэффициентов разложения приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений, где уже исключена угловая зависимость решения.

С помощью диффузионного приближения возможно более или менее удовлетворительное описание процессов, происходящих в реакторах, размеры которых значительно больше средних свободных пробегов нейтронов. Это требование не является жестким и, как правило, выполняется для большинства практически интересных задач.

На основе диффузионной теории в некоторых случаях можно перейти к диффузионно-возрастному приближению. Это приближение связано с дальнейшими предположениями, которые приводят к упрощению энергетических операторов задач. Эти упрощения основываются на предположениях о характере энергетической зависимости решения задачи.

Диффузионно-возрастное приближение хорошо описывает процесс замедления нейтронов в реакторе на замедлителях с массовым числом ядер  $M \gg 1$ .

Рассмотрим кинетическое уравнение замедления:

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) + S(\mathbf{r}, v, \Omega). \quad (13.1.1)$$

Решение уравнения (13.1.1) будем искать в виде ряда по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left\{ \varphi_n(\mathbf{r}, v) P_n(\mu) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^n \left[ \varphi_n^{(m)}(\mathbf{r}, v) \sin m\psi + \varphi_n^{(-m)}(\mathbf{r}, v) \cos m\psi \right] P_n^m(\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

где  $\varphi_n(\mathbf{r}, v)$ ,  $\varphi_n^{(m)}(\mathbf{r}, v)$  и  $\varphi_n^{(-m)}(\mathbf{r}, v)$  — искомые функции. Ограничиваясь в ряду (13.1.2) членами с  $n = 0$  и  $n = 1$ , можно записать

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \varphi_0(\mathbf{r}, v) + 3\mathbf{\Omega} \varphi_1(\mathbf{r}, v) \right], \quad (13.1.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}, v) &= \int d\mathbf{\Omega} \varphi(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}); \\ \varphi_1(\mathbf{r}, v) &= \int d\mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} \varphi(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.4)$$

Функцию  $w(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде ряда по полиномам Лежандра, ограничиваясь первыми двумя членами:

$$w(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \left[ w_0(v' \rightarrow v) + 3\mu_0 w_1(v' \rightarrow v) \right], \quad (13.1.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_0(v' \rightarrow v) &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu_0 w(\mu_0, v' \rightarrow v); \\ w_1(v' \rightarrow v) &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu_0 \mu_0 w(\mu_0, v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.6)$$

Источники нейтронов также представим в виде первых двух членов ряда по сферическим функциям:

$$S(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[ S_0(\mathbf{r}, v) + 3\mathbf{\Omega} S_1(\mathbf{r}, v) \right], \quad (13.1.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_0(\mathbf{r}, v) &= \int d\mathbf{\Omega} S(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}); \\ S_1(\mathbf{r}, v) &= \int d\mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} S(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.8)$$

Подставим теперь соотношения (13.1.3), (13.1.5) и (13.1.7) в уравнение (13.1.1) и результат проинтегрируем по всем телесным углам  $\mathbf{\Omega}$ . Тогда будем иметь

$$\nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 = \int dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_0(v' \rightarrow v) + S_0(\mathbf{r}, v). \quad (13.1.9)$$

Для получения второго уравнения снова подставим соотношения (13.1.3), (13.1.5) и (13.1.7) в уравнение (13.1.1), результат умножим скалярно на  $\Omega$  и проинтегрируем по всем телесным углам единичной сферы:

$$\frac{1}{3}\nabla\varphi_0 + \Sigma\varphi_1 = \int dv' \varphi_1(\mathbf{r}, v') w_1(v' \rightarrow v) + S_1(\mathbf{r}, v). \quad (13.1.10)$$

Итак, приходим к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений в  $P_1$ -приближении:

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 &= \int dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_0(v' \rightarrow v) + S_0(\mathbf{r}, v); \\ \frac{1}{3}\nabla\varphi_0 + \Sigma\varphi_1 &= \int dv' \varphi_1(\mathbf{r}, v') w_1(v' \rightarrow v) + S_1(\mathbf{r}, v). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.11)$$

Если внешние источники нейтронов отсутствуют, то пространственно-энергетическое распределение нейтронов в критическом реакторе будет описываться системой однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 &= \int dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_0(v' \rightarrow v); \\ \frac{1}{3}\nabla\varphi_0 + \Sigma\varphi_1 &= \int dv' \varphi_1(\mathbf{r}, v') w_1(v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.12)$$

В уравнениях (13.1.11) и (13.1.12) величины  $w_0(v' \rightarrow v)$  и  $w_1(v' \rightarrow v)$  представляются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} w_0(v' \rightarrow v) &= \Sigma_{es}(v')g_{es}(v' \rightarrow v) + \Sigma_{is}(v')g_{is}(v' \rightarrow v) + \\ &+ \nu_{n,2n}\Sigma_{n,2n}(v')g_{n,2n}(v' \rightarrow v) + \nu_f\Sigma_f(v')g_f(v); \\ w_1(v' \rightarrow v) &= \Sigma_{es}(v')g_{1es}(v' \rightarrow v), \end{aligned} \right\} \quad (13.1.13)$$

где

$$\Sigma(v) = \Sigma_c(v) + \Sigma_{es}(v) + \Sigma_{is}(v) + \Sigma_{n,2n}(v). \quad (13.1.14)$$

Если неупругим рассеянием можно пренебречь, а реакция (n, 2n) отсутствует вообще, то уравнение реактора (13.1.12) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= \int dv' \Sigma_{es}(v') \varphi_0(\mathbf{r}, v') g_{0es}(v' \rightarrow v) + g_f(v) Q(\mathbf{r}); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma \varphi_1 &= \int dv' \Sigma_{es}(v') \varphi_1(\mathbf{r}, v') g_{1es}(v' \rightarrow v), \end{aligned} \right\} \quad (13.1.15)$$

где

$$Q(\mathbf{r}) = \nu_f \int dv' \Sigma_f(v') \varphi_0(\mathbf{r}, v'). \quad (13.1.16)$$

Если предположить, что замедление происходит на неподвижных и свободных ядрах, то функции  $g_{0es}(v' \rightarrow v)$  и  $g_{1es}(v' \rightarrow v)$  можно найти без труда, используя соотношения (10.1.2), (11.1.44) и (13.1.6).

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} g_{0es}(v' \rightarrow v) &= \frac{(M+1)^2}{2M} \gamma \left( \frac{v}{v'}, v' \right) \frac{v}{v'^2}; \\ g_{1es}(v' \rightarrow v) &= \frac{(M+1)^2}{2M} \gamma \left( \frac{v}{v'}, v' \right) \frac{v}{v'^2} \times \\ &\times \left( \frac{(M+1)}{2} \frac{v}{v'} - \frac{(M-1)}{2} \frac{v'}{v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.17)$$

В случае изотропного рассеяния нейтронов в системе центра масс в формулах (13.1.17) следует положить  $\gamma = 1$ .

Для полной определенности задач на расчет спектра нейтронов в реакторе необходимо задать граничные условия. Соответствующие граничные условия будут такими же, как и в односкоростной теории. Так, если реактор граничит с вакуумом, то

$$2[\varphi_1(\mathbf{r}, v)]_n - \varphi_0(\mathbf{r}, v) = 0 \quad \text{на } S. \quad (13.1.18)$$

В заключение полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Если рассеяние нейтронов происходит на тяжелых ядрах, то интеграл в правой части второго уравнения из системы (13.1.15) будет малой величиной. Тогда приближенно можно из-под знака интеграла вывести функцию  $\Sigma_{es} \varphi_1$  при значении  $v' = v$ . В результате рассматриваемое уравнение примет вид

$$\frac{1}{3}\nabla\varphi_0 + \Sigma_{tr}\varphi_1 = 0, \quad (13.1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{tr} &= \Sigma - \bar{\mu}_0 \Sigma_{es}; \\ \bar{\mu}_0 &= \int dv' g_{1es}(v' \rightarrow v). \end{aligned}$$

Разрешим уравнение (13.1.19) относительно  $\varphi_1$ :

$$\varphi_1 = -D\nabla\varphi_0, \quad (13.1.20)$$

где

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}.$$

Подставив далее соотношение (13.1.20) в первое равенство (13.1.15), получим уравнение реактора в диффузионном приближении:

$$-\nabla D \nabla \varphi_0 + \Sigma \varphi_0 = \int dv' \Sigma_{es}(v') \varphi_0(\mathbf{r}, v') g_{0es}(v' \rightarrow v) + g_f(v) Q(\mathbf{r}). \quad (13.1.21)$$

Для получения граничного условия необходимо соотношение (13.1.20) подставить в уравнение (13.1.18):

$$2D(\nabla\varphi_0)_n + \varphi_0 = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (13.1.22)$$

## 13.2. Сопряженные уравнения в диффузионном приближении

Сопряженная система уравнений реактора в  $P_1$ -приближении запишется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla\varphi_1^* + \Sigma\varphi_0^* &= \int dv' \varphi_0^*(\mathbf{r}, v') w_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{3}\nabla\varphi_0^* + \Sigma\varphi_1^* &= \int dv' \varphi_1^*(\mathbf{r}, v') w_1(v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (13.2.1)$$

К системе уравнений (13.2.1) необходимо присоединить граничное условие, которое нетрудно найти с помощью следующего интегрального соотношения:

$$\int d\Omega |\Omega_n| \varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad (13.2.2)$$

где интегрирование производится на полусфере, обращенной внутрь области реактора.

Полагая

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} [\varphi_0^*(\mathbf{r}, v) + 3\boldsymbol{\Omega}\varphi_1^*(\mathbf{r}, v)], \quad (13.2.3)$$

будем иметь

$$2(\varphi_1^*)_n + \varphi_0^* = 0 \quad \text{на } S. \quad (13.2.4)$$

Задача (13.2.1), (13.2.4) — сопряженная задача по отношению к (13.1.12), (13.1.18). Чтобы это показать, достаточно ввести в рассмотрение вектор функции

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{vmatrix}; \quad \varphi^* = \begin{vmatrix} \varphi_0^* \\ \varphi_1^* \end{vmatrix}.$$

Если скалярное произведение  $(\varphi, \varphi^*)$  определить следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*) = \int d\mathbf{r} (\varphi_0 \varphi_0^* + \varphi_1 \varphi_1^*), \quad (13.2.5)$$

то нетрудно проверить выполнение основного функционального равенства

$$(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) = (\varphi, \mathbf{L}^*\varphi^*), \quad (13.2.6)$$

где

$$\mathbf{L}\varphi = \begin{vmatrix} \nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 - \int dv' \varphi_0 w_0(v' \rightarrow v) \\ \nabla\varphi_0 + 3\Sigma\varphi_1 - 3 \int dv' \varphi_1 w_1(v' \rightarrow v) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{L}^*\varphi^* = \begin{vmatrix} -\nabla\varphi_1^* + \Sigma\varphi_0^* - \int dv' \varphi_0^* w_0(v \rightarrow v') \\ -\nabla\varphi_0^* + 3\Sigma\varphi_1^* - 3 \int dv' \varphi_1^* w_1(v \rightarrow v') \end{vmatrix}.$$

Полагая  $\mathbf{L}\varphi = 0$ , с помощью соотношения (13.2.6) приходим к равенству  $\mathbf{L}^*\varphi^* = 0$ , которое приводит к системе (13.2.1).

Аналогичным образом можно определить сопряженные уравнения для неоднородных уравнений (13.1.11) по отношению к данному функционалу  $I_p[\varphi]$ .



### 13.3. Диффузионно-возрастное приближение

В предыдущих параграфах главы для упрощения математической постановки задач был осуществлен переход к диффузионному приближению. Однако непосредственное решение основных и сопряженных уравнений реактора в диффузионном приближении также представляет собой весьма сложную задачу. Трудности расчета оказываются особенно значительными, когда замедлитель состоит из смеси ядер различных элементов. Эти трудности в первую очередь связаны со сложной структурой энергетических операторов, действующих на решения. Отсюда следует, что для разработки эффективных методов расчета реакторов необходимы дальнейшие упрощения математической постановки задач. На этот раз упрощения должны основываться на предположениях о характере энергетической зависимости решения. В конечном итоге они сводятся к замене точных энергетических операторов задач приближенными. Этим вопросом и посвящен настоящий параграф.

Ввиду того, что механизм замедления нейтронов в области высоких энергий существенно отличается от механизма замедления нейтронов в области теплового движения ядер среды, необходимо рассмотреть два этих случая отдельно.

Рассмотрим сначала случай, когда тепловое движение ядер среды несущественно, а эффект неупругого рассеяния исчезающе мал, так что им в процессе замедления можно пренебречь.

Будем исходить из следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= \int dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_{0s}(v' \rightarrow v) + S(\mathbf{r}, v); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma \varphi_1 &= \int dv' \varphi_1(\mathbf{r}, v') w_{1s}(v' \rightarrow v); \\ S(\mathbf{r}, v) &= \int_0^\infty dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_f(v' \rightarrow v), \end{aligned} \right\} \quad (13.3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_{0s}(v' \rightarrow v) &= \Sigma_s(v') \frac{(M+1)^2}{2M} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{v}{v'^2}; \\ w_{1s}(v' \rightarrow v) &= \Sigma_s(v') \frac{(M+1)^2}{2M} \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \frac{v}{v'^2} \times \\ &\quad \times \left( \frac{(M+1)}{2} \frac{v}{v'} - \frac{(M-1)}{2} \frac{v'}{v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.3.2)$$

В уравнениях системы (13.3.1) положим  $\gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) = \gamma\left(\frac{v}{v_0}\right)$  и перейдем к новой переменной  $u$  по формуле

$$u = -2 \ln \frac{v}{v_0},$$

где  $v_0$  — некоторая произвольно фиксированная скорость. Величину  $u$  обычно называют логарифмической энергией, или летаргией.

В новых переменных система уравнений (13.3.1) представится в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= \int_{u-r}^u du' \Sigma_s(u') \varphi_0(\mathbf{r}, u') g_{0s}(u - u') + \chi(u) Q(\mathbf{r}); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma \varphi_1 &= \int_{u-r}^u du' \Sigma_s(u') \varphi_1(\mathbf{r}, u') g_{1s}(u - u'), \end{aligned} \right\} \quad (13.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} g_{0s}(u) &= \frac{(M+1)^2}{4M} \gamma(-e^{-u/2}) e^{-u}; \\ g_{1s}(u) &= \frac{(M+1)^2}{4M} \gamma(-e^{-u/2}) e^{-u} \left( \frac{(M+1)}{2} e^{-u/2} - \frac{(M-1)}{2} e^{u/2} \right); \\ Q(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty du \nu_f \Sigma_f(u') \varphi(\mathbf{r}, u'); \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

$\chi$  — спектр нейтронов, рожденных в результате деления;

$$r = 2 \ln \frac{M+1}{M-1}.$$

Следует заметить, что при переходе от переменной  $v$  к новой переменной  $u$  ради простоты сохранены прежние обозначения соответствующих функций.

Рассмотрим систему уравнений (13.3.3). Предположим, что на интервале  $(u - r, u)$  функции  $\Sigma_s \varphi_0$  и  $\Sigma_s \varphi_1$  изменяются слабо. Такое предположение обычно хорошо оправдывается, когда массовое число  $M$  ядер замедлителя намного больше массы нейтрона. Тогда с достаточной степенью точности эти функции можно представить первыми членами разложения в ряд Тейлора. Оценки показывают [84, 230], что для этой цели можно ограничиться следующими представлениями:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_s(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u') &= \Sigma_s(u)\varphi_0(\mathbf{r}, u) + \frac{\partial \Sigma_s \varphi_0}{\partial u}(u' - u); \\ \Sigma_s(u')\varphi_1(\mathbf{r}, u') &= \Sigma_s(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u). \end{aligned} \right\} \quad (13.3.5)$$

Подставим соотношение (13.3.5) в правую часть уравнений (13.3.2) и произведем интегрирование. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma_c \varphi_0 &= -\frac{\partial \xi \Sigma_s \varphi_0}{\partial u} + \chi(u)Q(\mathbf{r}); \\ \frac{1}{3}\nabla \varphi_0 + \Sigma_{tr} \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.3.6)$$

где

$$\xi = \int_0^r u g_{0s}(u) du; \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0) + \Sigma_c;$$

$$\bar{\mu}_0 = \int_0^r \mu_0(u) g_{0s}(u) du; \quad Q(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_f \Sigma_f \varphi_0 du.$$

Систему уравнений (13.3.5) можно свести к одному уравнению

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi = \frac{\partial \xi \Sigma_s \varphi}{\partial u} - \chi(u)Q(\mathbf{r}), \quad (13.3.7)$$

где  $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$  — коэффициент диффузии. Индекс нуль при неизвестной функции ради простоты опущен. Полученное уравнение (13.3.7) будет основным уравнением замедления в диффузионно-возрастном приближении.

Обсудим теперь вопрос о граничных условиях в диффузионно-возрастном приближении. С этой целью воспользуемся соотношением (13.1.18)

$$2(\varphi_1)_n - \varphi_0 = 0 \quad \text{на } S. \quad (13.3.8)$$

Принимая во внимание тот факт, что в диффузионно-возрастном приближении имеет место равенство

$$\varphi_1 = -D\nabla\varphi_0, \quad (13.3.9)$$

условие (13.3.8) запишем в виде

$$\varphi_0 + 2D \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad (13.3.10)$$

где  $n$  — расстояние от границы по нормали к поверхности  $S$ . Выражение (13.3.10) преобразуем к виду

$$-\frac{\varphi_0}{\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}} = 2D. \quad (13.3.11)$$

Величину  $\Gamma = 2D$  будем называть длиной экстраполяции. Смысл этой величины становится понятным, если предположить, что функция  $\varphi_0$  — линейная по отношению к переменной  $n$ , то есть

$$\varphi_0(\mathbf{r}, u) = c_1(u) + c_2(u)n. \quad (13.3.12)$$

Подставив выражение (13.3.12) в соотношение (13.3.11), получим

$$c_1(u) = -\Gamma(u)c_2(u). \quad (13.3.13)$$

Следовательно, с учетом равенства (13.3.13) функция  $\varphi_0$  вблизи границы  $S$  будет иметь вид

$$\varphi_0(\mathbf{r}, u) = c(u)[n - \Gamma(u)]. \quad (13.3.14)$$

Последнее равенство позволяет ввести в рассмотрение экстра-полированную границу реактора  $S_3$ , отстоящую от  $S$  на длину  $\Gamma$ .

Из выражения (13.3.14) следует, что на экстраполированной границе  $S_3$  в качестве граничного условия можно принять следующее:

$$\varphi_0(\mathbf{r}, u) = 0 \quad \text{на } S_3. \quad (13.3.15)$$

Следует иметь в виду, что экстраполированная граница реактора является функцией энергии. Для реакторов, разме-

ры которых значительно больше длины свободного пробега нейтрона, можно принять некоторую эффективную экстраполированную границу, не зависящую от энергии.

В том случае, когда размеры реактора невелики, зависимостью  $\Gamma$  от энергии (летаргии) пренебрегать уже нельзя, а следует пользоваться непосредственно граничным условием (13.3.8) или (13.3.11).

Переходим к рассмотрению граничного условия для сопряженных уравнений. В этом случае воспользуемся диффузионным граничным условием

$$2(\varphi_1^*)_n + \varphi_0^* = 0 \quad \text{на } S, \quad (13.3.16)$$

причем связь функций  $\varphi_1^*$  с  $\varphi_0$  дается в виде

$$\varphi_1^* = D \nabla \varphi_0. \quad (13.3.17)$$

С учетом соотношения (13.3.17) выражение (13.3.16) принимает вид

$$\varphi_0^* + 2D \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S. \quad (13.3.18)$$

Поскольку условие (13.3.18) совпадает с условием (13.3.10), экстраполированные поверхности для основных и сопряженных уравнений реактора будут одними и теми же.

Как было отмечено выше, основные уравнения замедления нейтронов в диффузионно-возрастном приближении получены в предположении, что рассеяние нейтронов происходит на свободных и неподвижных ядрах. Такое предположение оказывается неверным для области  $v < v_{zp}$ . В этом случае необходимо пользоваться более общей теорией в рамках диффузионного приближения.

Однако в некоторых случаях бывает достаточно нейтроны всевозможных скоростей, меньших  $v_{zp}$ , объединить в одну группу, которой прописать некоторые эффективные константы. В этом случае распределение нейтронов в реакторе поддается приближенному описанию с помощью уравнения диффузии

$$\nabla D_T \nabla_{cT} \Phi - \Sigma \Phi = -g_T(\mathbf{r}), \quad (13.3.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int_0^{v_p} dv \varphi(\mathbf{r}, v) = \int_{u_T}^{\infty} du \varphi(\mathbf{r}, u); \\ g(\mathbf{r}) &= \xi \Sigma_s \varphi_0(\mathbf{r}, u_T); \\ u_T &= u(v_p). \end{aligned} \right\} \quad (13.3.20)$$

Здесь и всюду в дальнейшем индексом  $T$  будем отмечать величины, соответствующие тепловой группе нейтронов.

В простейшем случае, когда поглощение нейтронов в реакторе мало и утечка нейтронов незначительна, нейтроны со скоростями  $v < v_p$  приближенно входят в статистическое равновесие с атомами замедлителя и распределяются по закону Максвелла. В этом случае эффективные константы  $D_T$  и  $\Sigma_{cT}$  определяются по следующим формулам:

$$D_T = \frac{\int_0^{v_p} D m(v) dv}{\int_0^{v_p} m(v) dv}, \quad \Sigma_{cT} = \frac{\int_0^{v_p} \Sigma_c m(v) dv}{\int_0^{v_p} m(v) dv}, \quad (13.3.21)$$

где  $m(v)$  — спектр Максвелла [84].

Аналогичным образом найдется величина  $\Sigma_f$ :

$$\Sigma_{fT} = \frac{\int_0^{v_p} \Sigma_f m(v) dv}{\int_0^{v_p} m(v) dv}. \quad (13.3.22)$$

Выше был рассмотрен вопрос о граничных условиях для функции  $\varphi(\mathbf{r}, u)$ . Аналогичные рассуждения приводят нас к граничным условиям для функции  $\Phi(\mathbf{r})$ .

Так, на внешней границе реактора ставится условие

$$D_T(\nabla \Phi)_n + \Phi = 0 \text{ на } S, \quad (13.3.23)$$

и на границе раздела зон  $S_i$  выполняются условия непрерывности функции  $\Phi$  и  $D_T(\nabla \Phi)_n$ .

В заключение сформулируем систему основных и сопряженных уравнений реактора в диффузионно-возрастном приближении.

Нетрудно показать, что система основных уравнений будет представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi &= \frac{\partial q}{\partial u} - \chi(u) Q(\mathbf{r}); \\ q &= \xi \Sigma_{es} \varphi; \\ \nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi &= -q(\mathbf{r}, u_T); \\ Q(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^u \nu_f \Sigma_f \varphi du + \nu_{fT} \Sigma_{fT} \Phi \end{aligned} \right\} \quad (13.3.24)$$

при условии, что

$$\left. \begin{aligned} D(\nabla \varphi)_n + \varphi &= 0; \\ D_T(\nabla \Phi)_n + \Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{на } S. \quad (13.3.25)$$

Если ввести в рассмотрение скалярное произведение

$$(f, f^*) = \int d\mathbf{r} \left( \Phi, \Phi^* + \int_{-\infty}^{u_T} \varphi \varphi^* du \right), \quad (13.3.26)$$

то методами, изложенными в главе 12, нетрудно прийти к сопряженной в смысле Лагранжа системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla D \nabla \varphi^* - \Sigma_c \varphi^* &= -\xi \Sigma_s \frac{\partial \varphi^*}{\partial u} - \nu_f \Sigma_f Q^*(\mathbf{r}); \\ \varphi^*(\mathbf{r}, u_T) &= \Phi^*(\mathbf{r}); \\ \nabla D_T \nabla \Phi^* - \Sigma_{cT} \Phi^* &= -\nu_{fT} \Sigma_{fT} Q^*(\mathbf{r}); \\ Q^*(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{u_T} \chi(u) \varphi^*(\mathbf{r}, u) du \end{aligned} \right\} \quad (13.3.27)$$

при условии, что

$$\left. \begin{aligned} D(\nabla \varphi^*)_n + \varphi^* &= 0; \\ D_T(\nabla \Phi^*)_n + \Phi^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{на } S. \quad (13.3.28)$$

## 13.4. Уточнение возрастной теории

Применение диффузионно-возрастной теории обычно приводит к удовлетворительному описанию процесса замедления нейтронов на ядрах, масса которых много больше единицы. Од-

нако даже в этих предположениях в ряде случаев она оказывается недостаточной. Так, например, обстоит дело при сильном поглощении замедляющихся нейтронов. В этом случае появляется необходимость уточнения и развития диффузионно-возрастной теории применительно к специфическим особенностям задачи.

В настоящем параграфе рассмотрены методы уточнения возрастного уравнения в энергетических и в пространственно-энергетических задачах в предположении упругого рассеяния нейтронов.

Итак, рассмотрим замедление нейтронов в бесконечных однородных средах. Очевидно, что в этом случае поток нейтронов не зависит ни от координаты точки  $\mathbf{r}$ , ни от углового распределения  $\Omega$ . Следовательно, функция  $\varphi$  изотропна и определяется лишь координатой  $u$ . Учитывая этот факт, непосредственно из кинетического уравнения замедления с помощью интегрирования по пространству и телесным углам приходим к интегральному уравнению Вольтерра

$$\Sigma\varphi = \int dv' \varphi_0(v') w(v' \rightarrow v) + S_0(v), \quad (13.4.1)$$

где  $S(v)$  — источники нейтронов от деления ядер делящегося изотопа.

В переменных  $u$  и  $u'$  уравнение (13.4.1) примет вид

$$\Sigma\varphi(u) = \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es}(u') \varphi_0(u') g_{0es}(u - u') + S(u). \quad (13.4.2)$$

Полезно заметить, что интегральное уравнение (13.4.2) может быть приведено к системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} + \Sigma_c \varphi &= S; \\ q &= \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es} \varphi G(u' - u), \end{aligned} \right\} \quad (13.4.3)$$

где

$$G(u' - u) = \int_u^{u'+r} g_{0es}(u'' - u') du''.$$



При выводе системы уравнений (13.4.3) было использовано тождественное преобразование

$$\frac{dq}{du} = \Sigma_s \varphi - \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es} \varphi g_{0es}(u - u').$$

Функция  $q$  — плотность замедления; она описывает полное число нейтронов, которые до соударения имели летаргию меньше  $u$ , а после соударения стали иметь летаргию больше  $u$ .

Приходим к вычислению функции  $q$ . С этой целью рассмотрим интегральное уравнение (13.4.2), решение которого будем искать в следующем виде:

$$\Sigma_s \varphi(u') = \Sigma_{es} \varphi(u) + \frac{d\Sigma_{es} \varphi}{du}(u' - u) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma_{es} \varphi}{du^2}(u' - u)^2 + \dots \quad (13.4.4)$$

Выражение (13.4.4) подставим в уравнение (13.4.2) и затем произведем интегрирование. Тогда получим

$$\Sigma_c \varphi = -\xi \frac{d\Sigma_{es} \varphi}{du} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{d^2 \Sigma_{es} \varphi}{du^2} + \dots + S(u), \quad (13.4.5)$$

где

$$\xi = \int_0^r u g_{0s}(u) du; \quad \bar{\xi}^2 = \int_0^r u^2 g_{0s}(u) du$$

— «моменты» функции распределения нейтронов.

Уравнение (13.4.5) запишем в виде

$$\frac{d\Sigma_{es} \varphi}{du_1} + \alpha \Sigma_{es} \varphi - S = \varepsilon \frac{d^2 \Sigma_{es} \varphi}{du_1^2} + \dots, \quad (13.4.6)$$

где

$$\alpha = \frac{\Sigma_c}{\Sigma_{es}}; \quad \varepsilon = \frac{\bar{\xi}^2}{2\xi^2}; \quad u_1 = \frac{1}{\xi} u.$$

Оценка показывает, что  $\varepsilon$  — величина первого порядка малости, а невыписанные члены в соотношении (13.4.6) второго и более высоких порядков. Ограничиваясь в соотношении (13.4.6) главными членами, приходим к уравнению

$$\frac{d\Sigma_{es} \varphi}{du_1} + \alpha \Sigma_{es} \varphi - S = 0, \quad (13.4.7)$$

которое запишем в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} + \Sigma_c \varphi &= S; \\ q &= \varepsilon \Sigma_{es} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13.4.8)$$

Таким образом, мы пришли к известному возрастному приближению.

Сохраним далее в соотношении (13.4.6) член, содержащий параметр  $\varepsilon$ . Тогда приходим к уравнению

$$\frac{d\Sigma_{es}\varphi}{du_1} + \alpha\Sigma_{es}\varphi - S = \varepsilon \frac{d^2\Sigma_{es}\varphi}{du_1^2}. \quad (13.4.9)$$

Следует заметить, что особенностью уравнения (13.4.9) является наличие малого параметра при старшей производной.

Преобразуем уравнение (13.4.9). С этой целью уравнение (13.4.9) разрешим относительно производной первого порядка:

$$\frac{d\Sigma_{es}\varphi}{du_1} = -\alpha\Sigma_{es}\varphi + S + \varepsilon \frac{d^2\Sigma_{es}\varphi}{du_1^2}. \quad (13.4.10)$$

Соотношение (13.4.10) продифференцируем по  $u_1$ :

$$\frac{d^2\Sigma_{es}\varphi}{du_1^2} = -\frac{d\alpha\Sigma_{es}\varphi}{du_1} + \frac{dS}{du_1} + \varepsilon \frac{d^3\Sigma_{es}\varphi}{du_1^3}. \quad (13.4.11)$$

Полученное выражение для второй производной подставим в правую часть уравнения (13.4.2). Пренебрегая величинами второго порядка малости, будем иметь

$$\frac{d\Sigma_{es}\varphi}{du_1} + \alpha\Sigma_{es}\varphi - S = -\varepsilon \frac{d}{du_1}(\alpha\Sigma_{es}\varphi - S). \quad (13.4.12)$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} + \Sigma_c \varphi &= S; \\ q &= (\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma_c)\varphi - \gamma S, \end{aligned} \right\} \quad (13.4.13)$$

где

$$\gamma = \frac{\bar{\xi}^2}{2\xi}. \quad (13.4.14)$$

Здесь мы снова перешли от переменной  $u_1$  к  $u$ .

Впервые связь функций  $q$  и  $\varphi$  в виде (13.4.13) была получена Б. Грейлингом и Д. Герцелем (см. [106]).

Таким образом, система уравнений (13.4.13) уточняет возрастную теорию правильного учета среднего квадрата потери логарифмической энергии.

Представляет интерес уравнение для функции  $q$ , которое нетрудно получить с помощью уравнений (13.4.13):

$$\frac{dq}{du} + \frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma_c} q = \frac{\xi\Sigma_{es}}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma_c} S. \quad (13.4.14')$$

Решение уравнения (13.4.14') будет следующим:

$$q = \int_{\infty-}^u S(u') \frac{\xi\Sigma_{es}}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma_c} e^{-\int_{u'}^u \frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma_c} du''} du'. \quad (13.4.15)$$

Полагая в соотношении (13.4.15)  $\gamma = 0$ , приходим к возрастному приближению.

Если замедлитель состоит из смеси ядер различных элементов, то имеют место следующие формулы усреднения:

$$\xi\Sigma_{es} = \sum_k \xi_k \Sigma_{esk}; \quad \gamma = \frac{1}{\xi\Sigma_{es}} \sum_k \gamma_k \xi_k \Sigma_{esk}. \quad (13.4.16)$$

Переходим теперь к уточнению возрастной теории замедления нейтронов в неоднородных средах.

При замедлении в неоднородных или конечных средах наряду с поглощением нейтронов появляется фактор утечки. Если исходить из диффузионного приближения, то уточнение диффузионно-возрастной теории применительно к данному случаю необходимо осуществлять с помощью уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 &= \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es} \varphi_0 g_{0es}(u - u') + S; \\ \frac{1}{3} \nabla\varphi_1 + \Sigma\varphi_1 &= \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es} \varphi_1 g_{1es}(u - u'). \end{aligned} \right\} \quad (13.4.17)$$

Решение уравнений (13.4.17) будем искать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{es}\varphi_0(\mathbf{r}, u') &= \Sigma_{es}\varphi_0(\mathbf{r}, u) + \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u}(u - u') + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u^2}(u - u')^2; \\ \Sigma_{es}\varphi_1(\mathbf{r}, u') &= \Sigma_{es}\varphi_1(\mathbf{r}, u) + \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_1}{\partial u}(u - u'). \end{aligned} \right\} \quad (13.4.18)$$

Выражение (13.4.18) подставим под знак интегралов в систему уравнений (13.4.17):

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi_1 + \Sigma_c\varphi_0 &= -\xi \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u^2} + S; \\ \frac{1}{3} \nabla\varphi_0 + \Sigma\varphi_1 &= \bar{\mu}_0 \Sigma_{es}\varphi_1 - \overline{\mu_0 \Delta u} \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_1}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (13.4.19)$$

Здесь

$$\bar{\mu}_0 = \int_0^r \mu_0(u) g_{0es}(u) du; \quad \overline{\mu_0 \Delta u} = \int_0^r u \mu_0(u) g_{0es}(u) du;$$

$$\mu_0(u) = \frac{M+1}{2} e^{-u/2} - \frac{M-1}{2} e^{u/2}.$$

Если в уравнениях (13.4.19) перейти к безразмерным величинам, используя характерные масштабы, то нетрудно показать, что при рассеянии нейтронов на ядрах с массой, много большей единицы, член

$$\overline{\mu_0 \Delta u} \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_1}{\partial u}$$

оказывается второго порядка малости и, следовательно, им можно пренебречь. В результате приходим к транспортному диффузионному приближению

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi_1 + \Sigma_c\varphi_0 &= -\xi \frac{\partial \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es}\varphi_0}{\partial u^2} + S; \\ \frac{1}{3} \nabla\varphi_0 + \Sigma_{tr}\varphi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.4.20)$$

где

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_{es}(1 - \bar{\mu}_0) + \Sigma_c.$$

Систему уравнений (13.4.20) можно привести к одному уравнению второго порядка:

$$\xi \frac{\partial \Sigma_{es} \varphi}{\partial u} - \nabla D \nabla \varphi + \Sigma_c \varphi - S = \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es} \varphi}{\partial u^2}; \quad (13.4.21)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}, u) = \varphi_0(\mathbf{r}, u); \quad D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}.$$

Так же как и в случае бесконечной однородной среды, можно показать, что в правой части уравнения (13.4.21) стоит член первого порядка малости. Используем этот факт. С этой целью разрешим уравнение (13.4.21) относительно производной первого порядка:

$$\xi \frac{\partial \Sigma_{es} \varphi}{\partial u} = \nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi + S + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es} \varphi}{\partial u^2}. \quad (13.4.22)$$

Продифференцируем теперь выражение (13.4.22) по переменной  $u$ :

$$\xi \frac{\partial^2 \Sigma_{es} \varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi + S + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_{es} \varphi}{\partial u^2} \right). \quad (13.4.23)$$

Выражение (13.4.23) подставим в первую часть уравнения (13.4.21) и ограничимся членами первого порядка малости. В результате будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ (\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma_c) \varphi - \gamma \nabla D \nabla \varphi - \gamma S \right] - \nabla D \nabla \varphi + \Sigma_c \varphi = S. \quad (13.4.24)$$

Уравнение (13.4.24) запишем в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial u} - \nabla D \nabla \varphi + \Sigma_c \varphi &= S; \\ q &= (\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma_c) \varphi - \gamma \nabla D \nabla \varphi - \gamma S. \end{aligned} \right\} \quad (13.4.25)$$

Система уравнений (13.4.25) была получена Б. Грейлингом и Д. Герцелем (см. [106]). Полагая во втором уравнении системы (13.4.25)  $\gamma = 0$ , приходим к известному диффузионно-возрастному приближению.

Так же как и в возрастном приближении, на внешней экстраполированной поверхности реактора необходимо поставить следующие граничные условия:

$$\varphi_0(\mathbf{r}, u) = 0 \quad \text{на } S \quad (13.4.26)$$

или

$$D(\nabla \varphi_0)_n + \varphi_0 = 0 \quad \text{на } S. \quad (13.4.27)$$

Соответственно на границах раздела зон реакторов требуется выполнение условий

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 - \text{непрерывно на } S. \\ D(\nabla\varphi_0)_n - \text{непрерывно на } S. \end{array} \right\} \quad (13.4.28)$$

Используя полученные результаты, можно записать полную систему основных уравнений реактора:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi = \frac{\partial q}{\partial u} - \chi(u) Q(\mathbf{r}); \\ q = (\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma_c) \varphi - \gamma \nabla D \nabla \varphi - \gamma \chi(u) Q(\mathbf{r}); \\ \nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi = -q(\mathbf{r}, u_T); \\ Q(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{u_T} \nu_f \Sigma_f \varphi du + \nu_{fT} \Sigma_{fT} \Phi \end{array} \right\} \quad (13.4.29)$$

при условии, что

$$\left. \begin{array}{l} D(\nabla \varphi)_n + \varphi = 0; \\ D_T(\nabla \Phi)_n + \Phi = 0 \end{array} \right\} \quad \text{на } S. \quad (13.4.30)$$

Соответствующая система сопряженных уравнений реактора представится в виде

$$\left. \begin{array}{l} \nabla D \nabla \varphi^* - \Sigma_c \varphi^* = -\xi \Sigma_s \frac{\partial q^*}{\partial u} - \nu_f \Sigma_f Q^*(\mathbf{r}); \\ q^* = (\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma_c) \varphi^* - \gamma \nabla D \nabla \varphi^* - \gamma \nu_f \Sigma_f Q^*(\mathbf{r}); \\ \varphi^*(\mathbf{r}, u_T) = \Phi^*(\mathbf{r}); \\ \nabla D_T \nabla \Phi^* - \Sigma_{cT} \Phi^* = -q^*(\mathbf{r}, u_T); \\ Q^*(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{u_T} \chi(u) \varphi^*(\mathbf{r}, u) du \end{array} \right\} \quad (13.4.31)$$

при условии, что

$$\left. \begin{array}{l} D(\nabla \varphi^*)_n + \varphi^* = 0; \\ D_T(\nabla \Phi^*)_n + \Phi^* = 0 \end{array} \right\} \quad \text{на } S. \quad (13.4.32)$$

# 14

## $P_n$ -приближение

### 14.1. Основные уравнения реактора в $P_n$ -приближении

При расчетах пространственно-энергетического распределения нейтронов в стационарном реакторе иногда  $P_1$ -приближение оказывается недостаточным, а непосредственное решение кинетического уравнения связано с весьма существенными трудностями. В этих случаях наиболее целесообразно пользоваться методом сферических гармоник, принципиальная схема применения которого к кинетическим уравнениям была подробно обсуждена на примере односкоростной задачи (см. гл. 5).

В настоящей главе будет приведен краткий вывод уравнений сферических гармоник для кинетического уравнения замедления. На основе полученных основных уравнений реактора будут сформулированы сопряженные уравнения.

Рассмотрим основное кинетическое уравнение реактора. В случае плоскопараллельной геометрии оно принимает вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 d\mu' \int dv' \varphi(z, v', \mu') w(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (14.1.1)$$

где функция  $\varphi(z, v, \mu)$  предполагается не зависящей от азимута  $\psi$ .

Функцию  $w(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$w(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) w_l(v' \rightarrow v) P_l(\mu_0), \quad (14.1.2)$$

где

$$w_l(v' \rightarrow v) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu_0 w(\mu_0, v' \rightarrow v) P_l(\mu_0). \quad (14.1.3)$$

Решение уравнения (14.1.1) будем искать в следующем виде:

$$\varphi(z, v, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n(z, v) P_n(\mu), \quad (14.1.4)$$

где

$$\varphi_n(z, v) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu \varphi(z, v, \mu) P_n(\mu). \quad (14.1.5)$$

Умножим почленно уравнение (14.1.1) на  $P_m(\mu)$  и результат проинтегрируем по  $\psi$  и  $\mu$ . Подставив в полученное выражение разложения (14.1.2), (14.1.4) и используя соотношения для полиномов Лежандра (5.1.5), получим систему интегро-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{m}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial z} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z} + \Sigma \varphi_m = \int dv' \varphi_m(z, v') w_m(v' \rightarrow v). \quad (14.1.6)$$

Для полной определенности задачи к системе уравнений (14.1.6) необходимо присоединить граничные условия. С этой целью будем считать, что решение задачи симметрично относительно оси  $z = 0$ , и потребуем, чтобы при  $z = 0$  выполнялись следующие условия:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = 0; \quad (m = 0, 2, 4, \dots). \quad (14.1.7)$$

На внешней границе слоя при  $z = \pm \frac{H}{2}$  поток извне падающих нейтронов равен нулю, то есть

$$\varphi\left(\frac{H}{2}, \mu\right) = 0 \quad (-1 < \mu < 0), \quad \varphi\left(-\frac{H}{2}, \mu\right) = 0 \quad (0 < \mu < 1). \quad (14.1.8)$$

Для получения требуемых граничных условий, как и в случае односкоростной задачи, точное соотношение (14.1.8) следует заменить системой приближенных условий

$$\int_{-1}^0 d\mu \mu^{2i+1} \varphi\left(\pm \frac{H}{2}, \mu\right) = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (14.1.9)$$



Подставив выражение (14.1.4) в соотношение (14.1.9) и произведя интегрирование, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (14.1.10)$$

где

$$a_{im} = (2m + 1) \int_{-1}^0 \mu^{2l+1} P_m(\mu) d\mu. \quad (14.1.11)$$

Отметим далее, что нас интересует только непрерывное во всем объеме реактора решение задачи. Это значит, что при переходе из одной зоны реактора в другую имеет место непрерывность всех компонентов  $\varphi_m$ .

Таким образом, задача на критический режим реактора плоскопараллельной геометрии сформулирована полностью. Для практического нахождения приближенного решения задачи необходимо в ряду (14.1.4) ограничиться заданным числом членов. Наилучшая сходимость приближенного решения задачи к точному осуществляется, если число членов брать четным.

Переходим к рассмотрению сферически-симметричных задач. Соответствующее кинетическое уравнение Больцмана в этом случае имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 d\mu' \int dv' \varphi w(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (14.1.12)$$

где функция  $\varphi(r, v, \mu)$  не зависит от азимута  $\psi$ . Будем предполагать, что на внешней поверхности реактора

$$\varphi(r, v, \mu) = 0; \quad (-1 < \mu < 0). \quad (14.1.13)$$

Решение уравнения (14.1.12) будем искать в виде

$$\varphi(r, v, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \varphi_n(r, v) P_n(\mu). \quad (14.1.14)$$

Подставив ряды (14.1.14) и (14.1.13) в уравнение (14.1.12), а также воспользовавшись соотношениями (5.1.5) и (5.1.18), придем к системе интегро-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2m+1} \left( \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial r} - \frac{m-1}{r} \varphi_{m-1} \right) + \frac{m+1}{2m+1} \left( \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial r} + \frac{m+2}{r} \varphi_{m+1} \right) + \\ & + \Sigma \varphi_m = \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v); \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (14.1.15)$$

Систему уравнений (14.1.15) удобно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2m+1} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m-1}} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{1}{r^{m+2}} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{m+1} + \Sigma \varphi_m = \\ & = \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v). \end{aligned} \quad (14.1.16)$$

К системе уравнений (14.1.15) необходимо присоединить граничные условия:

в центре шара

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = 0; \quad \varphi_m = 0; \quad (m = 0, 2, 4, 6, \dots); \quad (14.1.17)$$

на внешней границе реактора при  $r = R$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m = 0; \quad (i, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (14.1.18)$$

где коэффициенты  $a_{im}$  снова определяются соотношением (14.1.11).

Переходим к рассмотрению одномерного цилиндрического реактора. В этом случае кинетическое уравнение замедления имеет вид

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \Sigma \varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} \sin \vartheta' d\vartheta' \int dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v). \end{aligned} \quad (14.1.19)$$

Решение уравнения (14.1.19) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, v, \vartheta, \psi) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \varphi_{n0}(r, v) P_n(\mu) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r, v) \cos m\psi P_n^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (14.1.20)$$

Тогда, поступая аналогично тому, как в случае одногрупповой теории, приходим к системе уравнений реактора в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{n+1,1} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{n-1,1} + (2n+1) \Sigma \varphi_{n0} = \\ = (2n+1) \int dv' \varphi_{n0} w_n(v' \rightarrow v); \end{aligned} \quad (14.1.21)$$

при  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{(n-m)!}{(m+n-2)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n-1,m-1}}{r^{m-1}} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n+1,m-1}}{r^{m-1}} + \\ & + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n+1,m+1} - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1} + \\ & + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma \varphi_{nm} = 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int dv' \varphi_{nm} w_n(v' \rightarrow v), \end{aligned} \quad (14.1.22)$$

где

$$w_n(v' \rightarrow v) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu_0 w(\mu_0, v' \rightarrow v) P_n(\mu_0). \quad (14.1.23)$$

В качестве граничных условий примем

$$\sum_{n,m} a_{n,m}^{k,l} \varphi_{n,m} = 0 \text{ на } S, \quad (14.1.24)$$

где коэффициенты  $a_{n,m}^{k,l}$  те же, что и в формуле (5.2.17).

## 14.2. Сопряженные уравнения в $P_n$ -приближении

Рассмотрим систему основных уравнений реактора для плоско-параллельной геометрии (14.1.6), которую запишем в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial z} + (m+1) \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z} + (2m+1) \Sigma \varphi_m = \\ = (2m+1) \int dv' \varphi_m(z, v') w_m(v' \rightarrow v). \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

Систему сопряженных уравнений реактора получим следующим образом. Помножим уравнение (14.2.1) соответственно на  $\varphi_m^*$ , где  $\varphi_m^*$  — компонент некоторой системы функции. Результат проинтегрируем по  $v$  и по всему объему  $G$ , занятому реактором. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_m \int dz \int dv \varphi_m^* \left[ m \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial z} + (m+1) \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z} + (2m+1) \Sigma \varphi_m - \right. \\ \left. - (2m+1) \int dv' \varphi_m(z, v') w_m(v' \rightarrow v) \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

После интегрирования по частям, замены индексов суммирования и перемены порядков интегрирования выражение (14.2.2) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sum_m \int dv \varphi_m^* \left[ m \varphi_{m-1} + (m+1) \varphi_{m+1} \right]_{z=0}^{z=H} - \sum_m \int dz \int dv \varphi_m^* \times \\ \times \left[ -m \frac{\partial \varphi_{m-1}^*}{\partial z} - (m+1) \frac{\partial \varphi_{m+1}^*}{\partial z} + (2m+1) \Sigma \varphi_m^* - \right. \\ \left. - (2m+1) \int dv' \varphi^*(z, v') w_m(v \rightarrow v') \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.2.3)$$

Соотношение (14.2.3) будет удовлетворено, если

$$\begin{aligned} -m \frac{\partial \varphi_{m-1}^*}{\partial z} - (m+1) \frac{\partial \varphi_{m+1}^*}{\partial z} + (2m+1) \Sigma \varphi_m^* = \\ = (2m+1) \int dv' \varphi^*(z, v') w_m(v \rightarrow v') \end{aligned} \quad (14.2.4)$$

при условии, что

$$\sum_m \varphi_m^* [m\varphi_{m-1} + (m+1)\varphi_{m+1}] = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = H. \quad (14.2.5)$$

Систему уравнений (14.2.4) будем называть сопряженной системой уравнений реактора в приближении метода сферических гармоник. Соотношение (14.2.5) используем для получения соответствующих граничных условий для функций  $\varphi_m^*$ . С этой целью перепишем его в следующем виде:

$$\sum_m \varphi_m [m\varphi_{m-1}^* + (m+1)\varphi_{m+1}^*] = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = H. \quad (14.2.6)$$

Очевидно, соотношения (14.2.5) и (14.2.6) эквивалентны и переходят друг в друга в результате простой замены индексов суммирования.

Вспомним теперь, что на внешней границе реактора система основных уравнений удовлетворяет условиям (14.1.10):

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (14.2.7)$$

Соотношение (14.2.7) запишем в следующем виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{i,2m+1} \varphi_{2m+1} = - \sum_{m=0}^{\infty} a_{i,2m} \varphi_{2m}; \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (14.2.8)$$

Система уравнений (14.2.8) позволяет выразить нечетные моменты  $\varphi_{2m+1}$  через  $\varphi_{2m}$ . Предположим, что решение системы уравнений (14.2.8) имеет вид

$$\varphi_{2m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \varphi_{2n}, \quad (14.2.9)$$

где  $A_{m,n}$  — коэффициенты, которые находятся в результате решения системы (14.2.8) относительно нечетных моментов.

Запишем теперь равенство (14.2.6) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2m} [2m\varphi_{2m-1}^* + (2m+1)\varphi_{2m+1}^*] + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2m+1} \times \quad (14.2.10)$$

$$\times [(2m+1)\varphi_{2m}^* + (2m+2)\varphi_{2m+2}^*] = 0.$$

Исключим из соотношения (14.2.10) нечетные моменты  $\varphi_{2m+1}$  с помощью выражения (14.2.9):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2m} [2m\varphi_{2m-1}^* + (2m+1)\varphi_{2m+1}^*] + \sum_{m=0}^{\infty} [(2m+1)\varphi_{2m}^* + \\ + (2m+2)\varphi_{2m+2}^*] \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \varphi_{2n} = 0. \end{aligned} \quad (14.2.11)$$

Во втором слагаемом формулы (14.2.11) переставим порядки суммирования. В результате нетрудно получить

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2m} \{ 2m\varphi_{2m-1}^* + (2m+1)\varphi_{2m+1}^* + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,m} [(2n+1)\varphi_{2n}^* + \\ + (2n+2)\varphi_{2n+2}^*] \} = 0. \end{aligned} \quad (14.2.12)$$

Соотношение (14.2.12) будет выполнено, если потребовать, чтобы выражения, стоящие в фигурных скобках, были равны нулю, то есть

$$\begin{aligned} 2m\varphi_{2m-1}^* + (2m+1)\varphi_{2m+1}^* + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,m} [(2n+1)\varphi_{2n}^* + \\ + (2n+2)\varphi_{2n+2}^*] = 0; \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (14.2.13)$$

Полученные соотношения и являются граничными условиями для системы сопряженных уравнений реактора. Этих условий достаточно для нахождения решения. В самом деле, если  $N$  — номер приближения, то на одной границе мы получим  $\frac{N+1}{2}$  условий, а на двух границах —  $N+1$  условий. Таким образом, число граничных условий равно числу уравнений системы.

Для примера рассмотрим случай  $N=1$ , то есть  $P_1$ -приближения. В этом случае система (14.2.7) вырождается в одно уравнение

$$\varphi_0 - 2\varphi_1 = 0 \quad \text{на } S, \quad (14.2.14)$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi_0. \quad (14.2.15)$$

Следовательно,

$$A_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } n = 0, m = 0; \\ 0 & \text{при } n \neq 0, m \neq 0. \end{cases} \quad (14.2.16)$$

С учетом равенства (14.2.16) уравнение (14.2.13) приводит нас к равенству

$$\varphi_1^* + \frac{1}{2}\varphi_0^* = 0.$$

Отсюда приходим к известному граничному условию для сопряженных уравнений в  $P_1$ -приближении:

$$\varphi_0^* + 2\varphi_1^* = 0 \quad \text{на } S.$$

Аналогичным образом могут быть получены граничные условия для сопряженных уравнений в  $P_n$ -приближении.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что условия (14.2.13) эквивалентны граничным условиям, которые формально могут быть получены с помощью соотношений

$$\int_0^1 \mu^{2i+1} \varphi^*(z, \mu, v) d\mu = 0 \quad \text{на } S, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (14.2.17)$$

поэтому в дальнейшем мы будем граничные условия для сопряженных уравнений получать из соотношения (14.2.17).

Для дальнейших рассмотрений систему граничных условий (14.2.13) удобно записать в следующем виде:

$$\sum_m a_{im}^* \varphi_m^* = 0 \quad \text{на } S, \quad (14.2.18)$$

где  $a_{im}^*$  простым образом выражается через коэффициенты уравнений (14.2.17).

Итак, сопряженная задача для плоскопараллельной геометрии имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{m}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m-1}^*}{\partial z} - \frac{m+1}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m+1}^*}{\partial z} + \Sigma \varphi_m^* = \\ & = \int dv' \varphi^*(z, v') w_m(v \rightarrow v') \end{aligned} \quad (14.2.19)$$

при условии

$$\sum_m a_{im}^* \varphi_m^* = 0 \quad \text{на } S. \quad (14.2.20)$$

Переходим к рассмотрению сопряженных уравнений в случае сферической геометрии. Для этого будем исходить из уравнения (14.1.15), которое запишем в виде

$$\begin{aligned} mr^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m-1}} + (m+1) \frac{1}{r^{m+2}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+2} \varphi_{m+1} + \\ + (2m+1) \Sigma \varphi_m = (2m+1) \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v). \end{aligned} \quad (14.2.21)$$

Уравнение (14.2.21) умножим почленно на  $\varphi_m^*$ , результат просуммируем по  $m$  и проинтегрируем по переменной  $v$  по объему реактора  $G$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_m \int dv \int dr r^2 \varphi_m^* \left[ mr^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m-1}} + \frac{m+1}{r^{m+2}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+2} \varphi_{m+1} + \right. \\ \left. + (2m+1) \Sigma \varphi_m - (2m+1) \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.2.22)$$

Первые два члена в формуле (14.2.22) проинтегрируем по  $r$  по частям, а в последнем члене переменим порядки интегрирования по  $v$  и  $v'$ . Тогда выражение (14.2.22) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \sum_m \int dv \int dr r^2 \left[ -m \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_m^* - (m+1) r^m \varphi_{m+1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_m^*}{r^m} + \right. \\ \left. + (2m+1) \Sigma \varphi_m \varphi_m^* - (2m+1) \varphi_m \int dv' \varphi_m^* w_m(v \rightarrow v') \right] + \\ + \sum_m R^2 \int dv \varphi^*(R, v) [m \varphi_{m-1}(R, v) + (m+1) \varphi_{m+1}(R, v)] = 0, \end{aligned} \quad (14.2.23)$$

где  $R$  — радиус внешней границы реактора.

Соотношение (14.2.23) будет выполнено если потребуем, чтобы выполнялись следующие равенства:



$$\sum_m \int dv \int dr r^2 \left[ -m \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_m^* - (m+1) r^m \varphi_{m+1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_m^*}{r^m} + \right. \\ \left. + (2m+1) \Sigma \varphi_m \varphi_m^* - (2m+1) \varphi_m \int dv' \varphi_m^* w_m(v \rightarrow v') \right] = 0; \quad (14.2.24)$$

$$\sum_m \int dv \varphi^* [m \varphi_{m-1} + (m+1) \varphi_{m+1}] = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (14.2.25)$$

В соотношении (14.2.24) изменим индексы суммирования с таким расчетом, чтобы можно было вынести за знак квадратной скобки функцию  $\varphi_m$ . Тогда получим

$$\sum_m \int dv \int dr r^2 \varphi_m \left[ -m r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{m-1}^*}{r^{m-1}} - \frac{m+1}{r^{m+2}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+2} \varphi_{m+1}^* + \right. \\ \left. + (2m+1) \Sigma \varphi_m^* - (2m+1) \int dv' \varphi_m^* w_m(v \rightarrow v') \right] = 0. \quad (14.2.26)$$

Приравняв нулю выражение, стоящее в квадратных скобках, и поделив на  $2m+1$ , получим сопряженное уравнение реактора:

$$-\frac{m}{2m+1} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{m-1}^*}{r^{m-1}} - \frac{m+1}{2m+1} \frac{1}{r^{m+2}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+2} \varphi_{m+1}^* + \\ + \Sigma \varphi_m^* - \int dv' \varphi_m^* w_m(v \rightarrow v') = 0. \quad (14.2.27)$$

Для получения граничных условий на внешней поверхности реактора воспользуемся соотношением (14.2.25). Это соотношение будет выполнено, если положим

$$\sum_m \varphi_m^* [m \varphi_{m-1} + (m+1) \varphi_{m+1}] = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (14.2.28)$$

Полученное равенство совпадает с соответствующим равенством (14.2.5) для плоскопараллельной геометрии. Поступая далее таким же образом, как и выше, приходим к граничным условиям (14.2.18).

Таким образом, граничные условия для системы сопряженных уравнений так же, как и для основных, будут одними и теми же для плоскопараллельной и сферической геометрий.

Переходим к рассмотрению одномерной цилиндрической геометрии. В этом случае систему уравнений (14.1.21), (14.1.22) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n-1,m-1}}{r^{m-1}} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n+1,m-1}}{r^{m-1}} + \\ & + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n+1,m+1} - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1} + \\ & + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma^{(m)} \varphi_{nm} - 2(2n+1) \times \\ & \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int dv' \varphi_{n,m} w_n^{(m)}(v' \rightarrow v) = 0, \end{aligned} \quad (14.2.29)$$

где

$$\Sigma^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Sigma & \text{при } m = 0; \\ \Sigma & \text{при } m \neq 0; \end{cases} \quad w^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2} w_0 & \text{при } m = 0; \\ w_m & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Функции  $\Sigma^{(m)}$  и  $w^{(m)}$  введены в рассмотрение для единообразной записи системы уравнений (14.1.21), (14.1.22).

Далее поступим таким же образом, как и в плоском случае, с той только разницей, что суммирование следует производить по индексам  $m$  и  $n$  одновременно. В результате приходим к системе сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} & -\frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n-1,m-1}^*}{r^{m-1}} + \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n+1,m-1}^*}{r^{m-1}} - \\ & - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n+1,m+1}^* + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1}^* + \\ & + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma^{(m)} \varphi_{n,m} = 2(2n+1) \times \\ & \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int dv' \varphi_{n,m}^* w_n^{(m)}(v \rightarrow v') \end{aligned} \quad (14.2.30)$$

или, переходя от величин  $\Sigma^{(m)}$ ,  $w_n^{(m)}$  к  $\Sigma$  и  $w_n$ , будем иметь:  
при  $m = 0$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{n+1,1}^* + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{n-1,1}^* + (2n+1) \Sigma \varphi_{n,0}^* =$$

(14.2.31)

$$(2n+1) \int dv' \varphi_{n,0}^* w_n(v \rightarrow v');$$

при  $m \geq 1$ 

$$\begin{aligned} & -\frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n-1,m-1}^*}{r^{m-1}} + \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{n+1,m-1}^*}{r^{m-1}} - \\ & -\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{m+1} \varphi_{n+1,m+1}^* + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{\partial}{\partial r} \times \\ & \times r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1}^* + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma \varphi_{n,m} = \\ & = 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int dv' \varphi_{n,m}^* w_n(v \rightarrow v'). \end{aligned} \quad (14.2.32)$$

К системе (14.2.31), (14.2.32) необходимо присоединить граничные условия, которые получим с помощью соотношения, аналогичного (14.2.5):

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_m \varphi_{n,m}^* \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \varphi_{n-1,m-1} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \varphi_{n+1,m-1} + \right. \\ & \left. \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{n+1,m+1} - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{n-1,m+1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.2.33)$$

Далее, произведя преобразования аналогичные тем, которые были осуществлены в формулах (14.2.6)–(14.2.13), приходим к граничным условиям для системы сопряженных уравнений

$$\sum_{n,m} a_{n,m}^{*k,l} \varphi_{n,m}^* = 0 \quad \text{на } S. \quad (14.2.34)$$

### 14.3. $P_3$ -приближение

Сформулируем системы основных и сопряженных уравнений реактора в  $P_3$ -приближении.

1. *Плоскопараллельная геометрия.* В этом случае система основных уравнений реактора принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \Sigma \varphi_0 &= \int dv' \varphi_0 w_0(v' \rightarrow v); \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\varphi_2}{\partial z} + \Sigma \varphi_1 &= \int dv' \varphi_1 w_1(v' \rightarrow v); \\ \frac{2}{5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{3}{5} \frac{\varphi_3}{\partial z} + \Sigma \varphi_2 &= \int dv' \varphi_2 w_2(v' \rightarrow v); \\ \frac{3}{7} \frac{\varphi_2}{\partial z} + \Sigma \varphi_3 &= \int dv' \varphi_3 w_3(v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.1)$$

Граничные условия в центре реактора имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (14.3.2)$$

На внешних границах реактора

$$\left. \begin{aligned} 4\varphi_0 - 8\varphi_1 + 5\varphi_2 &= 0; \\ 10\varphi_0 - 24\varphi_1 + 25\varphi_2 - 16\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.3)$$

Далее, запишем систему сопряженных уравнений реактора в плоскопараллельной геометрии:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z} + \Sigma \varphi_0^* &= \int dv' \varphi_0^* w_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\varphi_2^*}{\partial z} + \Sigma \varphi_1^* &= \int dv' \varphi_1^* w_1(v \rightarrow v'); \\ -\frac{2}{5} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z} - \frac{3}{5} \frac{\varphi_3^*}{\partial z} + \Sigma \varphi_2^* &= \int dv' \varphi_2^* w_2(v \rightarrow v'); \\ -\frac{3}{7} \frac{\varphi_2^*}{\partial z} + \Sigma \varphi_3^* &= \int dv' \varphi_3^* w_3(v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.4)$$

В качестве граничных условий примем следующие в центре реактора:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (14.3.5)$$

На внешних границах реактора

$$\left. \begin{aligned} 4\varphi_0^* + 8\varphi_1^* + 5\varphi_2^* &= 0; \\ 10\varphi_0^* + 24\varphi_1^* + 25\varphi_2^* + 16\varphi_3^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.6)$$

2. *Сферически-симметричные системы.* В этом случае система основных уравнений реактора имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= \int dv' \varphi_0 w_0(v' \rightarrow v); \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \varphi_2 + \Sigma \varphi_1 &= \int dv' \varphi_1 w_1(v' \rightarrow v); \\ \frac{2}{5} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{3}{5} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \varphi_3 + \Sigma \varphi_2 &= \int dv' \varphi_2 w_2(v' \rightarrow v); \\ \frac{3}{7} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \Sigma \varphi_3 &= \int dv' \varphi_3 w_3(v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.7)$$

В качестве граничных условий примем следующие:

в центре реактора

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0; \quad (14.3.8)$$

на внешней поверхности реактора

$$\left. \begin{aligned} 4\varphi_0 - 8\varphi_1 + 5\varphi_2 &= 0; \\ 10\varphi_0 - 24\varphi_1 + 25\varphi_2 - 16\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.9)$$

Система сопряженных уравнений реактора для сферически симметричных областей имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_1^* + \Sigma \varphi_0^* &= \int dv' \varphi_0^* w_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} - \frac{2}{3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \varphi_2^* + \Sigma \varphi_1^* &= \int dv' \varphi_1^* w_1(v \rightarrow v'); \\ -\frac{2}{5} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r} - \frac{3}{5} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \varphi_3^* + \Sigma \varphi_2^* &= \int dv' \varphi_2^* w_2(v \rightarrow v'); \\ -\frac{3}{7} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r} + \Sigma \varphi_3^* &= \int dv' \varphi_3^* w_3(v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.10)$$

Выберем следующие граничные условия:  
в центре реактора

$$\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad (14.3.11)$$

на внешней границе реактора

$$\left. \begin{aligned} 4\varphi_0^* + 8\varphi_1^* + 5\varphi_2^* &= 0; \\ 10\varphi_0^* + 24\varphi_1^* + 25\varphi_2^* + 16\varphi_3^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.12)$$

3. *Одномерные цилиндрические системы.* В этом случае система основных уравнений реактора принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{11} + \Sigma \varphi_{00} &= \int dv' \varphi_{00} w_0(v' \rightarrow v); \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{31} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{11} + 5\Sigma \varphi_{20} &= 5 \int dv' \varphi_{20} w_2(v' \rightarrow v); \\ r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{11}}{r} - \frac{1}{6} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{31}}{r} + \frac{1}{12} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \varphi_{33} + \frac{5}{6} \Sigma \varphi_{22} &= \\ &= \frac{5}{6} \int dv' \varphi_{22} w_2(v' \rightarrow v); \\ \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_{22} + 3\Sigma \varphi_{11} &= \\ &= 3 \int dv' \varphi_{11} w_1(v' \rightarrow v); \\ \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial r} - \frac{1}{12} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_{22} + \frac{7}{6} \Sigma \varphi_{31} &= \frac{7}{6} \int dv' \varphi_{31} w_3(v' \rightarrow v); \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{22}}{r^2} + \frac{7}{15} \Sigma \varphi_{33} &= \frac{7}{15} \int dv' \varphi_{33} w_3(v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.13)$$

В качестве граничных условий примем следующие:  
в центре реактора

$$\frac{\partial \varphi_{00}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad (14.3.14)$$

на внешней границе реактора

$$\left. \begin{aligned} 16\varphi_{00} - 10\varphi_{20} + 5\varphi_{22} - 32\varphi_{11} &= 0; \\ -40\varphi_{00} + 250\varphi_{20} - 25\varphi_{22} + 128\varphi_{11} - 128\varphi_{31} &= 0; \\ 120\varphi_{00} - 150\varphi_{20} + 175\varphi_{22} - 384\varphi_{11} + 64\varphi_{31} - 32\varphi_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } S. \quad (14.3.15)$$

Система сопряженных уравнений реактора в одномерной цилиндрической геометрии имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{11}^* + \Sigma \varphi_{00}^* &= \int dv' \varphi_{00}^* w_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{31}^* + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varphi_{11}^* + 5\Sigma \varphi_{20}^* &= 5 \int dv' \varphi_{20}^* w_2(v \rightarrow v'); \\ -r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{11}^*}{r} + \frac{1}{6} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{31}^*}{r} - \frac{1}{12} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \varphi_{33}^* + \frac{5}{6} \Sigma \varphi_{22}^* &= \\ &= \frac{5}{6} \int dv' \varphi_{22}^* w_2(v \rightarrow v'); \\ -\frac{\partial \varphi_{00}^*}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{20}^*}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_{22}^* + 3\Sigma \varphi_{11}^* &= \\ &= 3 \int dv' \varphi_{11}^* w_1(v \rightarrow v'); \\ -\frac{\partial \varphi_{20}^*}{\partial r} + \frac{1}{12} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \varphi_{22}^* + \frac{7}{6} \Sigma \varphi_{31}^* &= \frac{7}{6} \int dv' \varphi_{31}^* w_3(v \rightarrow v'); \\ -r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi_{22}^*}{r^2} + \frac{7}{15} \Sigma \varphi_{33}^* &= \frac{7}{15} \int dv' \varphi_{33}^* w_3(v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.16)$$

В качестве граничных условий для сопряженных уравнений примем:

в центре системы

$$\frac{\partial \varphi_{00}^*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{20}^*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{22}^*}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad (14.3.17)$$

на внешней границе

$$\left. \begin{aligned} 16\varphi_{00}^* - 10\varphi_{20}^* + 5\varphi_{22}^* + 32\varphi_{11}^* &= 0; \\ 40\varphi_{00}^* - 250\varphi_{20}^* + 25\varphi_{22}^* + 128\varphi_{11}^* - 128\varphi_{31}^* &= 0; \\ 120\varphi_{00}^* - 150\varphi_{20}^* + 175\varphi_{22}^* + 384\varphi_{11}^* - 64\varphi_{31}^* + 32\varphi_{33}^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.18)$$

# 15

## Многогрупповые кинетические уравнения реактора

### 15.1. Основные положения

Наиболее эффективным методом расчета ядерных реакторов является многогрупповой метод. Сущность метода состоит в том, что весь интервал скоростей нейтронов разбивается на ряд частичных интервалов — групп, в пределах которых сечения ядерных процессов предполагаются не зависящими от скоростей нейтронов. В действительности, однако, сечения ядерных процессов, как правило, существенно зависят от скоростей нейтронов, в силу чего становится очевидной необходимость рационального усреднения физических констант многогруппового расчета.

Ввиду того, что любое усреднение всегда связано с дополнительными погрешностями в решении задачи, то необходимо пользоваться такими методами усреднения, которые бы давали минимальную погрешность в наиболее важной физической характеристике реактора.

Такой характеристикой реактора, например, является его критический размер; если реактор не критический, то таким является параметр  $K_{эфф}$  или любой из функционалов, определенных в главе 12.

В настоящей главе будут получены многогрупповые системы основных и сопряженных уравнений реактора и одновременно найден способ усреднения групповых констант.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Больцмана в следующем виде:

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (15.1.1)$$



Решение этого уравнения пусть удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (15.1.2)$$

Задачу (15.1.1), (15.1.2) будем называть невозмущенной.

Как известно, сопряженной задачей по отношению к данной является следующая:

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* = \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v \rightarrow v'); \quad (15.1.3)$$

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (15.1.4)$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу, которая отличается от задачи невозмущенной тем, что в ней величины  $\Sigma$  и  $w$  выбраны кусочно-постоянными функциями своих аргументов с возможными разрывами первого рода на границах групп. Решения возмущенных задач будем отмечать штрихом.

Тогда основное уравнение реактора будет иметь вид

$$\Omega \nabla \varphi' + \Sigma' \varphi' = \int d\Omega' \int dv' \varphi'(\mathbf{r}, v', \Omega') w'(\mu_0, v' \rightarrow v) \quad (15.1.5)$$

при условии, что

$$\varphi'(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (15.1.6)$$

и сопряженное уравнение —

$$-\Omega \nabla \varphi^{*'} + \Sigma' \varphi^{*'} = \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*'}(\mathbf{r}, v', \Omega') w'(\mu_0, v \rightarrow v') \quad (15.1.7)$$

при условии, что

$$\varphi^{*'}(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (15.1.8)$$

## 15.2. Формулы усреднения для групповых констант

Если основным результатом наших вычислений является критический размер реактора, то групповые константы  $\Sigma'$  и  $w'$  можно выбрать таким образом, чтобы в невозмущенной и возмущенной задачах значение критического размера осталось

неизменным. При выполнении этого условия возмущенную задачу будем называть «эквивалентной» невозмущенной.

Для нахождения групповых констант будем поступать следующим образом. Умножим уравнение (15.1.1) почленно на  $\varphi^{*'}$  и результат проинтегрируем по всей области определения решения задачи. Далее, умножим уравнение (15.1.7) на  $\varphi$  и результат также проинтегрируем по указанной области. Вычитая одно из полученных соотношений из другого, придем к следующему основному функционалу:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv (\Sigma - \Sigma') \varphi \varphi^{*'} + \\ & + \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^{*'} w'(\mu_0, v \rightarrow v') - \\ & - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi^{*'} \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi w(\mu_0, v' \rightarrow v) = 0. \end{aligned} \quad (15.2.1)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что при граничных условиях (15.1.2) и (15.1.8)

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv (\varphi^{*'} \mathbf{\Omega} \nabla \varphi + \mathbf{\Omega} \nabla \varphi^{*'}) = 0. \quad (15.2.2)$$

Изменив порядки интегрирования в последнем слагаемом формулы (15.2.3), получим

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv (\Sigma - \Sigma') \varphi \varphi^{*'} - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^{*'} \times \\ & \times [w(\mu_0, v \rightarrow v') - w'(\mu_0, v \rightarrow v')] = 0. \end{aligned} \quad (15.2.3)$$

Потребуем, чтобы оба слагаемых в соотношении (15.2.3) порознь обращались в нуль, то есть

$$\left. \begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv (\Sigma - \Sigma') \varphi \varphi^{*'} = 0; \\ & \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \int dv \varphi \int d\mathbf{\Omega}' \int dv' \varphi^{*'} [w(\mu_0, v \rightarrow v') - \\ & - w'(\mu_0, v \rightarrow v')] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.4)$$

Формулы (15.2.4) представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_n \sum_j \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma^j) \varphi \varphi^{*'} &= 0; \\ \sum_n \sum_j \sum_l \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} \times \\ &\times [w(\mu_0, v \rightarrow v') - \overset{j \rightarrow l}{w}] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.2.5)$$

где  $G_n$  — фиксированные зоны реактора, и потребуем, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma^j) \varphi \varphi^{*'} &= 0; \\ \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} \times \\ &\times [w(\mu_0, v \rightarrow v') - \overset{j \rightarrow l}{w}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.6)$$

Из соотношений (15.2.6) найдем величины  $\Sigma^j$  и  $\overset{j \rightarrow l}{w}$ . Они будут определяться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi \varphi^{*'}}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \varphi^{*'}}; \\ \overset{j \rightarrow l}{w} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} w(\mu_0, v \rightarrow v')}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'}}. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.7)$$

Существенной особенностью полученных формул является то, что они приводят к групповым величинам, усредненным как с потоком нейтронов в группе  $\varphi$ , так и с ценностью их в возмущенной задаче  $\varphi^{*'}$ .

Из формулы (15.2.7) следует, что для вычисления групповых констант требуется знание решения задачи, которое заранее неизвестно. Тем не менее формулы (15.2.7) можно использовать для получения групповых констант. В самом деле, формулы (15.2.7) представлены в виде дробных функционалов. Таким образом, если решения задачи  $\varphi$  и  $\varphi^{*}$  известны с некоторой погрешностью, то формулы (15.2.7) слабо чувствительны к погрешностям. А это значит, что для вычисления групповых констант можно пользоваться приближенными решениями.

В заключение необходимо обратить внимание на тот факт, что формулы (15.2.7) точны в пределе, когда  $\Sigma$  и  $w$  постоянны в пределах данной группы. Если же эти величины слабо изменяются в интервале группы, то использование приближенных решений  $\varphi$  и  $\varphi^{*}$  в качестве весовых функций должно привести к удовлетворительному результату при вычислении многогрупповой системы констант.

Приведем некоторые обобщения изложенной теории на случай более детального учета анизотропии рассеяния в многогрупповой системе констант. Формулы (15.2.7) дают возможность получить групповые величины  $w^{j \rightarrow l}$ , не зависящие от  $\Omega'$  и  $\Omega$ . В ряде случаев, однако, требуется более детальное рассмотрение спектра нейтронов в реакторе, так что использование для расчетов многогрупповой системы с эффективным изотропным законом рассеяния нейтронов не оказывается достаточным.

Для получения многогрупповой системы с анизотропным рассеянием будем поступать следующим образом.

Функцию рассеяния нейтронов представим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} w(\mu_0, v' \rightarrow v) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) w_m(v' \rightarrow v) P_m(\mu_0); \\ w^{j \rightarrow l}(\mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) w^{j \rightarrow l}_m P_m(\mu_0). \end{aligned} \right\} \quad (15.2.8)$$

Рассмотрим далее соотношения (15.2.6), которые теперь запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} & \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma^j) \varphi \varphi^{*'} = 0; \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} \times \\ & \quad \times [w_m(v \rightarrow v') - \overset{j \rightarrow l}{w_m}] P_m(\mu_0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.9)$$

Отсюда следует, что величины  $\Sigma^j \overset{j \rightarrow l}{w_m}$  можно определить следующими формулами:

$$\Sigma^j = \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi \varphi^{*'}}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \varphi^{*'}}; \quad (15.2.10)$$

$$\overset{j \rightarrow l}{w_m} = \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} w_m(v \rightarrow v') P_m(\mu_0)}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} P_m(\mu_0)}. \quad (15.2.11)$$

Если предположить, что функции  $\varphi$  и  $\varphi^{*'}$  не зависят от азимута, то выражения (15.2.11) можно существенно упростить, записав в виде

$$\overset{j \rightarrow l}{w_m} = \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m^{*'} w_m(v \rightarrow v')}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m^{*'}}; \quad (15.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &= \int d\Omega \varphi P_m(\mu); \\ \varphi_m^{*'} &= \int d\Omega \varphi^{*'} P_m(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (15.2.13)$$

Метод усредненных физических констант в пределах групп в виде (15.2.11) будем называть простейшим. Этот метод приводит к многогрупповой системе уравнений реактора, решение которой позволяет найти правильный критический размер ре-

актора. Однако средние по группам потоки нейтронов могут и отличаться от истинных, полученных при решении основного уравнения замедления. Для того чтобы как можно точнее приблизиться и к нейтронным потокам, допустимо вывод групповых констант несколько обобщить. Так, основное уравнение (15.1.1) следует умножить на  $A^*(v)\varphi^{*'}$ , а уравнение (15.1.7) на  $A^*(v)\varphi$  и далее совершить все преобразования, указанные при получении формулы (15.2.1). В результате этих преобразований приходим к следующим формулам усреднения:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma A^* \varphi \varphi^{*'}}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv A^* \varphi \varphi^{*'}}; \\ w_m^{j \rightarrow l} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' A^* \varphi^{*'} w_m(v' \rightarrow v) P_m(\mu_0)}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' A^* \varphi^{*'} P_m(\mu_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.14)$$

До сих пор вид функции  $A^*(v)$  не фиксировался. Если, в частности, положить  $A^* = 1$ , то приходим к простейшим формулам усреднения констант. В различных задачах функцию  $A^*(v)$  можно выбирать по-разному, исходя из физического существа задачи. Если мы имеем дело с задачей на критический размер, то в качестве величины  $A^*(v)$  можно, например, взять решение сопряженной задачи, проинтегрированное по объему реактора, то есть

$$A^*(v) = \int_G d\mathbf{r} \varphi_0^*(\mathbf{r}, v), \quad (15.2.15)$$

причем функцию  $\varphi_0^*(\mathbf{r}, v)$  можно найти с помощью решения приближенной задачи, например, в  $P_1$ -приближении.

Следует отметить, что в большинстве случаев удобнее всего выбрать  $A^*$  равным единице, особенно в тех случаях, когда число групп достаточно велико.

Так как мы будем предполагать, что число групп велико, то нам нет необходимости стремиться к небольшим уточнениям

в спектре нейтронов за счет существенного увеличения объема вычислительной работы. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что  $A^*(v) = 1$ .

### 15.3. Многогрупповая система основных и сопряженных уравнений реактора

Рассмотрим эквивалентную задачу для потока нейтронов. Если ради простоты опустить штрихи при функциях  $\varphi$  и величинах  $\Sigma$  и  $w(\Omega \rightarrow \Omega')$ , то задача определения критической массы и потока нейтронов будет сведена к решению кинетического уравнения

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) \quad (15.3.1)$$

при условии

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega n < 0. \quad (15.3.2)$$

Умножим уравнение (15.3.1) почленно на  $dv$  и проинтегрируем по переменной  $v$  в пределах группы  $v_{j-1} < v < v_j$ :

$$\Omega \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j = \int d\Omega' \int dv' \varphi \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (15.3.3)$$

Здесь

$$\varphi^j = \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi.$$

Рассмотрим интеграл в правой части уравнения (15.3.3):

$$\mathbf{A} \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (15.3.4)$$

Представив интеграл (15.3.4) в виде суммы интегралов по группам  $v_{l-1} < v' < v_l$ , нетрудно перейти к следующей формуле:

$$\mathbf{A} \varphi = \sum_l \int d\Omega' \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega) \overset{l \rightarrow j}{w}(\mu_0) \Delta v_j,$$

где

$$\Delta v_j = v_j - v_{j-1}. \quad (15.3.5)$$

Введем обозначение

$$\sum^{l \rightarrow j} (\mu_0) = \overset{l \rightarrow j}{w} (\mu_0) \Delta v_j. \quad (15.3.6)$$

Тогда многогрупповая система кинетических уравнений реактора запишется в виде

$$\Omega \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j = \sum_l \int d\Omega' \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega') \overset{l \rightarrow j}{\Sigma} (\mu_0) \quad (15.3.7)$$

с граничными условиями

$$\varphi^j(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (15.3.8)$$

Для получения многогрупповой системы сопряженных уравнений реактора будем исходить из эквивалентного сопряженного уравнения (15.1.7). Опустив штрихи при функциях  $\varphi^{*j}$  и физических параметрах, запишем

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* = \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v \rightarrow v'). \quad (15.3.9)$$

Для интервала скоростей  $v_{j-1} < v < v_j$  уравнение (15.3.9) можно записать в следующем виде:

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma^j \varphi^* = \sum_l \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') \overset{j \rightarrow l}{w} (\mu_0). \quad (15.3.10)$$

Анализ уравнения (15.3.10) показывает, что его решение на интервале  $v_{j-1} < v < v_j$  есть функция, слабо зависящая от скорости. Физически это означает, что ценность нейтронов в группе слабо зависит от скорости, если физические параметры оказываются постоянными по группе. Соответствующие функции будем обозначать  $\varphi^{*j}(\mathbf{r}, \Omega)$ . Тогда уравнение (15.3.10) перепишется так:

$$-\Omega \nabla \varphi^{*j} + \Sigma^j \varphi^{*j} = \sum_l \int d\Omega' \varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega') \overset{j \rightarrow l}{\Sigma} (\mu_0). \quad (15.3.11)$$

Граничными условиями для уравнений (15.3.11) будут следующие:



$$\varphi^{*j}(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (15.3.12)$$

Итак, мы пришли к многогрупповой системе сопряженных кинетических уравнений реактора. Нетрудно показать, что задача (15.3.11), (15.3.12) действительно является сопряженной по отношению к задаче (15.3.7), (15.3.8). Для этого достаточно проверить соотношение

$$(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*),$$

где  $\varphi$  и  $\varphi^*$  — вектор-функции, компонентами которых являются решения соответствующих многогрупповых задач.

В заключение приведем формулы для многогруппового расчета, учитывающие свойства функции  $\varphi^*$ .

Ввиду того, что сопряженная функция  $\varphi^{*l}$  не зависит от скорости нейтрона в пределах группы, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*j} \varphi^j}; \\ \Sigma^{j \rightarrow l}(\mu_0) &= \frac{\Delta v_j}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) w_m^{j \rightarrow l} P_m(\mu_0), \end{aligned} \right\} \quad (15.3.13)$$

где

$$w_m^{j \rightarrow l} = \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' w_m(v \rightarrow v') P_m(\mu_0)}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi P_m(\mu_0)}. \quad (15.3.14)$$

В формулах (15.3.13) и (15.3.14) величины  $w_m(v \rightarrow v')$  являются коэффициентами разложения функции  $w(\mu_0, v \rightarrow v')$  в ряд по полиномам Лежандра

$$w(\mu_0, v \rightarrow v') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) w_m(v \rightarrow v') P_m(\mu_0).$$

В том случае, когда величины  $\varphi^{*l}$  и  $\varphi$  не зависят от азимута, формулу (15.3.14) можно упростить, воспользовавшись теоремой сложения [337].

В результате будем иметь

$$w_m^{j \rightarrow l} = \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_m^{*l} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' w_m(v \rightarrow v')}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_m^{*l} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m}, \quad (15.3.14')$$

где  $\varphi_m^{*l}$  и  $\varphi_m$  — коэффициенты разложений соответствующих решений в ряды по полиномам Лежандра.

Величины  $\Sigma^j$  и  $\Sigma^{j \rightarrow l}$  можно представить в виде суммы соответствующих величин различных ядерных процессов:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \Sigma_c^j + \Sigma_{es}^j + \Sigma_{is}^j, \\ \Sigma^{j \rightarrow l}(\mu_0) &= \Sigma_{es}^{j \rightarrow l}(\mu_0) + \Sigma_{is}^{j \rightarrow l} + \Sigma_f^{j \rightarrow l}, \end{aligned} \right\} \quad (15.3.15)$$

причем новые величины также определяются формулами (15.3.13).

## 15.4. Дальнейшие обобщения метода групп

До сих пор мы интересовались однородными задачами на критический размер реактора. Однако во многих случаях приходится иметь дело с задачами неоднородными. Для решения таких задач можно воспользоваться многогрупповым методом, сформулированным в предыдущих параграфах главы. Однако соответствующие многогрупповые уравнения не будут в таком случае «наилучшими» с точки зрения существа задачи.

В самом деле, указанные многогрупповые уравнения построены таким образом, чтобы критический размер реактора, рассчитанный с помощью многогрупповой системы, был правильным. Что касается неоднородных задач, то они связаны с отысканием тех или иных линейных функционалов, обсужденных в главе 12. В этом случае, очевидно, многогрупповые системы уравнений желательно получить в предположении, что интересующий нас функционал в результате перехода от невозмущенной задачи к многогрупповой не изменится.

Итак, рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) &= f; \\ \varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.4.1)$$

где  $f$  — заданная функция источников нейтронов.

Пусть

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi) \quad (15.4.2)$$

— рассматриваемый линейный функционал. Тогда сопряженная задача по отношению к функционалу (15.4.2) будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) &= p; \\ \varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.4.3)$$

Задачи (15.4.1) и (15.4.2) будем называть невозмущенными.

Введем в рассмотрение возмущенные задачи, которые отличаются от невозмущенных тем, что функции  $\Sigma$  и  $w(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , входящие в соответствующие уравнения, заменяются величинами, не зависящими в пределах групп от скорости нейтрона.

Запишем формулу теории возмущений для функционала  $J_p[\varphi]$ :

$$\begin{aligned} \delta J_p[\varphi] = & - \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \left[ (\Sigma' - \Sigma) \varphi \varphi^* - \right. \\ & \left. - \varphi \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*'} [w(\mu_0, v \rightarrow v') - w'(\mu_0, v \rightarrow v')] \right], \end{aligned} \quad (15.4.4)$$

где штрихом отмечены функции, соответствующие возмущенной задаче.

Потребуем теперь, чтобы  $\delta J = 0$ . Рассуждая далее, так же как и в случае задачи на критический размер реактора, приходим к следующим задачам:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j - \sum_l \int d\Omega' \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega') \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) &= f^j; \\ \varphi^j(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.4.5)$$

где

$$f^j = \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}) \quad (15.4.6)$$

для основных уравнений, и

$$\left. \begin{aligned} -\boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi^{*j} + \Sigma^j \varphi^{*j} - \sum_l \int d\boldsymbol{\Omega}' \varphi^{*l}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \overset{j \rightarrow l}{\Sigma}(\mu_0) &= p^j; \\ \varphi^{*j}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \boldsymbol{\Omega} \mathbf{n} > 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.4.7)$$

где

$$p^j = \frac{1}{\Delta v_j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv p$$

для сопряженных уравнений.

Здесь величины  $\Sigma^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0)$  снова определяются формулами (15.3.13), где в качестве функции  $\varphi$  и  $\varphi^{*l}$  необходимо взять решения соответствующих неоднородных задач.

## 15.5. Многогрупповая теория возмущений

На основе полученных многогрупповых систем основных и сопряженных уравнений реактора можно сформулировать соответствующую теорию возмущений. Рассмотрим многогрупповую систему основных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j - \sum_l \int d\boldsymbol{\Omega}' \varphi^l \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) &= 0; \\ \varphi^j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \boldsymbol{\Omega} \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.5.1)$$

Эту систему будем называть невозмущенной.

Рассмотрим далее возмущенную систему, отличающуюся от (15.5.1) тем, что в ней величины  $\Sigma^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}$  заменены  $\Sigma'^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'$ , причем

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'^j &= \Sigma^j + \delta \Sigma^j; \\ \Sigma'^{l \rightarrow j}(\mu_0) &= \Sigma^{l \rightarrow j} + \delta \Sigma^{l \rightarrow j}. \end{aligned} \right\} \quad (15.5.2)$$

Запишем возмущенную систему уравнений реактора:

$$\left. \begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi^{*j} + \Sigma'^j \varphi^{*j} - \sum_l \int d\Omega' \varphi^{*l} \Sigma'^{j \rightarrow l}(\mu_0) &= 0; \\ \varphi^{*j}(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \quad \text{на } S \quad \text{при } \Omega \mathbf{n} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.5.3)$$

В качестве характеристического параметра задачи примем  $\lambda = \frac{1}{K_{\text{эфф}}}$ . В этом случае величины  $\Sigma^{l \rightarrow j}$  и  $\Sigma'^{l \rightarrow j}$  необходимо представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^{l \rightarrow j}(\mu_0) &= \Sigma_s^{l \rightarrow j}(\mu_0) + \lambda \Sigma_f^{l \rightarrow j}; \\ \Sigma'^{l \rightarrow j}(\mu_0) &= \Sigma'_s{}^{l \rightarrow j}(\mu_0) + \lambda' \Sigma'_f{}^{l \rightarrow j}, \end{aligned} \right\} \quad (15.5.4)$$

где  $\lambda' = \lambda + \delta \lambda$ , причем  $\delta \lambda$  — искомая величина.

Уравнения (15.5.1) почленно умножим на  $\varphi^{*j}$  и просуммируем по всем  $j$ , а уравнения (15.5.3) умножим на  $\varphi^j$  и также просуммируем по  $j$ . Полученные соотношения проинтегрируем по всему объему реактора, по всем телесным углам единичной сферы и вычтем одно из другого. Тогда, используя свойства сопряженности, а также граничные условия для функций  $\varphi^j$  и  $\varphi^{*j}$ , нетрудно прийти к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \sum_j \int d\mathbf{r} \int d\Omega \delta \Sigma \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*j} \int d\Omega' \varphi^l \times \\ \times \left[ \delta \Sigma_s^{l \rightarrow j}(\mu_0) + \lambda' \delta \Sigma_f^{l \rightarrow j} + \delta \lambda \Sigma'_f{}^{l \rightarrow j} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15.5.5)$$

Разрешив соотношение (15.5.5) относительно  $\delta \lambda$ , получим<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Формулы (15.5.6) и (15.5.7) получены в работе [363].

$$\delta\lambda = \left( \sum_j \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \delta\Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \varphi^{*j} \times \right. \\ \left. \times \int d\mathbf{\Omega}' \varphi^l \left[ \delta_{\Sigma_s}^{l \rightarrow j} (\mu_0) + \lambda' \delta_{\Sigma_f}^{l \rightarrow j} \right] \right) / \sum_j \sum_l \int d\mathbf{r} \varphi_0^j \varphi_0^{*j} \delta_{\Sigma_f}^{l \rightarrow j}, \quad (15.5.6)$$

где

$$\varphi_0^j = \int d\mathbf{\Omega} \varphi^j(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}).$$

Если возмущения физических параметров малы, то приходим к формуле малых возмущений:

$$\delta\lambda = \frac{\sum_j \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \delta\Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{\Omega} \varphi^{*j} \int d\mathbf{\Omega}' \varphi^l \delta_{\Sigma}^{l \rightarrow j} (\mu_0)}{\sum_j \sum_l \int d\mathbf{r} \varphi_0^j \varphi_0^{*j} \delta_{\Sigma_f}^{l \rightarrow j}}. \quad (15.5.7)$$

Аналогичным образом могут быть получены формулы теории возмущений для неоднородных уравнений.

# 16

## Многогрупповые уравнения реактора в $P_1$ -приближении

### 16.1. Уравнения реактора в $P_1$ -приближении

В главе 15 были получены многогрупповые кинетические уравнения реактора и формулы для усреднений физических величин. Соответствующие рассмотрения носили общетеоретический характер и позволили правильно понять основные особенности многогруппового представления. Однако в виду сложности математического алгоритма практическое применение разработанного в указанной главе метода не всегда оказывается оперативным. В большинстве практически интересных задач на расчет критических размеров достаточно ограничиться рассмотрением диффузионного или диффузионно-возрастного приближения. Естественно, что в этом случае существенно упрощается и сам многогрупповой метод. Более того, в тех случаях, когда эти приближенные методы по своему существу оказываются недостаточными для описания спектра потока и ценности нейтронов в реакторе, соответствующие решения все же могут быть использованы для усреднения физических величин и получения эффективной системы констант для многогрупповых кинетических уравнений.

Как было показано в § 13.1, система основных уравнений реактора в  $P_1$ -приближении имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= \int dv' \varphi_0(\mathbf{r}, v') w_0(v' \rightarrow v); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma \varphi_1 &= \int dv' \varphi_1(\mathbf{r}, v') w_1(v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (16.1.1)$$

Граничным условием для системы (16.1.1) является

$$2(\varphi_1)_n - \varphi_0 = 0 \text{ на } S. \quad (16.1.2)$$

Далее, запишем систему сопряженных уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \varphi_1^* + \Sigma \varphi_0^* &= \int dv' \varphi_0^*(\mathbf{r}, v') w_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{3} \nabla \varphi_0^* + \Sigma \varphi_1^* &= \int dv' \varphi_1^*(\mathbf{r}, v') w_1(v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (16.1.3)$$

На внешней границе реактора необходимо поставить условие

$$2(\varphi_1^*)_n + \varphi_0^* = 0 \text{ на } S. \quad (16.1.4)$$

Системы основных уравнений реактора (16.1.1), (16.1.2) и сопряженных (16.1.3), (16.1.4) в соответствии с принятой терминологией будем называть невозмущенными.

Рассмотрим возмущенную задачу, отличающуюся от невозмущенной тем, что в ней величины  $\Sigma$  и  $w$  выбраны кусочно-постоянными функциями скорости с возможными разрывами первого рода на границах групп. Так же как и раньше, решение возмущенной задачи будем отмечать штрихом.

Рассмотрим, например, возмущенную систему сопряженных уравнений, которая имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \varphi_1^{*'} + \Sigma'_0 \varphi_0^{*'} &= \int dv' \varphi_0^{*'}(\mathbf{r}, v') w'_0(v \rightarrow v'); \\ -\frac{1}{3} \nabla \varphi_0^{*'} + \Sigma'_1 \varphi_1^{*'} &= \int dv' \varphi_1^{*'}(\mathbf{r}, v') w'_1(v \rightarrow v'), \end{aligned} \right\} \quad (16.1.5)$$

предположено, что  $\Sigma'_0 \neq \Sigma'_1$ .

Граничным условием для системы (16.1.5) будет следующее:

$$2(\varphi_1^{*'})_n + \varphi_0^{*'} = 0 \text{ на } S. \quad (16.1.6)$$

Как было указано в § 15.3, групповые константы  $\Sigma'_0, \Sigma'_1, w'_0$  и  $w'_1$  можно выбрать таким образом, чтобы при переходе от невозмущенной задачи к возмущенной значение критического размера реактора осталось тем же.

Для нахождения групповых констант будем поступать следующим образом.

Умножим уравнение (16.1.1) соответственно на  $\varphi_0^{*'}$  и  $\varphi_1^{*'}$ , результат сложим и проинтегрируем по всему объему реактора



и по всем возможным скоростям нейтронов. Далее умножим уравнения (16.1.5) соответственно на  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  и также результат сложим и проинтегрируем по указанной области определения переменных. Вычитая одно из полученных выражений из другого, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \int dv (\Sigma - \Sigma'_0) \varphi_0 \varphi_0^{*'} + \int d\mathbf{r} \int dv (\Sigma - \Sigma'_1) \varphi_1 \varphi_1^{*'} + \\ + \int d\mathbf{r} \int dv \varphi_0 \int dv' \varphi_0^{*'} [w_0(v \rightarrow v') - w'_0(v \rightarrow v')] + \\ + \int d\mathbf{r} \int dv \varphi_1 \int dv' \varphi_1^{*'} [w_1(v \rightarrow v') - w'_1(v \rightarrow v')] = 0. \end{aligned} \quad (16.1.7)$$

Здесь мы воспользовались простейшими преобразованиями, аналогичными рассмотренным в § 15.3.

Очевидно, равенство (16.1.7) будет выполнено, если все слагаемые порознь приравнять нулю, то есть

$$\left. \begin{aligned} \int d\mathbf{r} \int dv (\Sigma - \Sigma'_0) \varphi_0 \varphi_0^{*'} &= 0; \\ \int d\mathbf{r} \int dv (\Sigma - \Sigma'_1) \varphi_1 \varphi_1^{*'} &= 0; \\ \int d\mathbf{r} \int dv \varphi_0 \int dv' \varphi_0^{*'} [w_0(v \rightarrow v') - w'_0(v \rightarrow v')] &= 0; \\ \int d\mathbf{r} \int dv \varphi_1 \int dv' \varphi_1^{*'} [w_1(v \rightarrow v') - w'_1(v \rightarrow v')] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.1.8)$$

В свою очередь, равенства (16.1.8) будут удовлетворены, если положить

$$\left. \begin{aligned} \int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma_0^j) \varphi_0 \varphi_0^{*'} &= 0; \\ \int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma_1^j) \varphi_1 \varphi_1^{*'} &= 0; \\ \int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_0^{*'} [w_0(v \rightarrow v') - w'_0(v \rightarrow v')] &= 0; \\ \int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_1^{*'} [w_1(v \rightarrow v') - w'_1(v \rightarrow v')] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.9)$$

где  $G_n$  — фиксированная область реактора;  $v_j$  — границы групп.

Решая равенства (16.1.9) относительно неизвестных  $\Sigma_0^j, \Sigma_1^j$ ,  $w'_0(v \rightarrow v') = {}^{j \rightarrow l} w_0$  и  $w'_1(v \rightarrow v') = {}^{j \rightarrow l} w_1$ , приходим к следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_0 \varphi_0^{*'}}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0 \varphi_0^{*'}}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_1 \varphi_1^{*'}}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1 \varphi_1^{*'}}; \end{aligned} \right\} \quad (16.1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} w_0^{j \rightarrow l} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_0^{*'} w_0(v \rightarrow v')}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_0^{*'}}; \\ w_1^{j \rightarrow l} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_1^{*'} w_1(v \rightarrow v')}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1 \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_1^{*'}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.1.10)$$

Таким образом, мы пришли к формулам для усреднения констант в пределах групп.

В § 15.3 было показано, что сопряженное решение возмущенной задачи можно считать не зависящим от скорости  $v$  и в данном случае является только функцией  $\mathbf{r}$ .

Учтя этот факт и поменяв местами индексы  $l$  и  $j$ , запишем формулы (16.1.10) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_0^{*'} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_0}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_0^{*'} \varphi_0^j}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_1^{*'} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_1}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_1^{*'} \varphi_1^j}; \end{aligned} \right\} \quad (16.1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} w_0^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_0^{*'} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_0 w_0^j(v)}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_0^{*'} \varphi_0^l \Delta v_j}; \\ w_1^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_1^{*'} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_1 w_1^j(v)}{\int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi_1^{*'} \varphi_1^l \Delta v_j}, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^j &= \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0, & \varphi_1^j &= \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1; \\ w_0^j(v) &= \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv' w_0(v \rightarrow v'); \\ w_1^j(v) &= \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv' w_1(v \rightarrow v'), \end{aligned} \right\} \quad (16.1.12)$$

а  $\varphi_0^{*j}$  и  $\varphi_1^{*j}$  — решения сопряженных уравнений, не зависящие от  $v$ .

Переходим к получению многогрупповых уравнений реактора.

С этой целью рассмотрим систему основных уравнений (16.1.1), в которой будем считать, что величины  $\Sigma$ ,  $w_0(v' \rightarrow v)$  и  $w_1(v' \rightarrow v)$  заменены групповыми  $\Sigma_0^j, \Sigma_1^j, w_0^{l \rightarrow j}$  и  $w_1^{l \rightarrow j}$ , полученными с помощью формул (16.1.11). Интегрируя уравнения (16.1.1) по  $dv$  в пределах группы  $v_{j-1} \leq v \leq v_j$  и осуществляя преобразования, аналогичные приведенным в § 15.2, приходим к следующей многогрупповой системе основных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \Sigma_0^j \varphi_0^j &= \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_0^l \varphi_0^l; \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_1^j \varphi_1^j &= \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_1^l \varphi_1^l, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^{l \rightarrow j} &= w_0^{l \rightarrow j} \Delta v_j; \\ \Sigma_1^{l \rightarrow j} &= w_1^{l \rightarrow j} \Delta v_j. \end{aligned} \right\} \quad (16.1.14)$$

Граничные условия для системы (16.1.13) будут следующие:

$$2(\varphi_1^j)_n - \varphi_0^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (16.1.15)$$

Система сопряженных уравнений реактора в этом случае будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \varphi_1^{*j} + \Sigma_0^j \varphi_0^{*j} &= \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_0^{*l} \varphi_0^{*l}; \\ -\frac{1}{3} \nabla \varphi_0^{*j} + \Sigma_1^j \varphi_1^{*j} &= \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_1^{*l} \varphi_1^{*l} \end{aligned} \right\} \quad (16.1.16)$$

при условии

$$2(\varphi_1^{*j})_n + \varphi_0^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (16.1.17)$$

В заключение формулы для  $\Sigma_0^j$ ,  $\Sigma_1^j$ ,  $\Sigma_0^{j \rightarrow l}$  и  $\Sigma_1^{j \rightarrow l}$  представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma_0 \overline{\varphi_0^j}(v)}{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0^j(v)}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \Sigma_1 \overline{\varphi_1^j}(v)}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_1^j(v)}; \\ \Sigma_0^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv w_0^j(v) \overline{\varphi_0^j}(v)}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_0^j(v)}; \\ \Sigma_1^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv w_1^j(v) \overline{\varphi_1^j}(v)}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_1^j(v)}, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varphi_0^j}(v) &= \overline{\varphi_0^{*j}(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}, v)}; \\ \overline{\varphi_1^j}(v) &= \overline{\varphi_1^{*j}(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}, v)}, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.19)$$

а чертой сверху отмечено усреднение по объему  $G_n$ .

В заключение обратим внимание на то, что если в формулах (16.1.11) объемы  $G_n$  все более уменьшать, устремляя их в пределе к нулю, то мы приходим к формулам усреднения в каждой точке объема реактора. Соответствующие формулы будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_0}{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_0}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_1}{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_1}; \\ \Sigma_0^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_0 w_0^j(v)}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_0}; \\ \Sigma_1^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_1 w_1^j(v)}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \varphi_1}, \end{aligned} \right\} \quad (16.1.20)$$

где функции  $w_0^j(v)$  и  $w_1^j(v)$  определяются формулами (16.1.12).

В результате приходим к системам уравнений (16.1.13) и (16.1.16) с переменными коэффициентами.

## 16.2. Метод усреднения физических констант в надтепловой области

Формулы (16.1.18) и (16.1.19) точны. Рассмотрим теперь на основе этих формул различные приближенные формулы усреднения. Для этого начнем рассмотрение с анализа уравне-

ний (16.1.1). Анализ второго уравнения показывает, что член в правой части мал по сравнению с каждым членом левой части уравнения. Вынося функцию  $\varphi_1(\mathbf{r}, v')$  за знак интеграла при  $v' = v$ , приходим к известному транспортному приближению

$$\frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \Sigma_{tr} \varphi_1 = 0, \quad (16.2.1)$$

где

$$\Sigma_{tr} = \Sigma - \int dv' w_1(v' \rightarrow v). \quad (16.2.2)$$

Если учесть, что согласно нормировке

$$\int dv' w_1(v' \rightarrow v) = \Sigma_{es} \overline{\mu_0}, \quad (16.2.3)$$

то

$$\Sigma_{tr} = \Sigma - \Sigma_{es} \overline{\mu_0}. \quad (16.2.4)$$

Разрешим уравнение (16.2.1) относительно функции  $\varphi_1$ . Тогда получим

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}} \nabla \varphi_0. \quad (16.2.5)$$

При рассмотрении возмущенной системы сопряженных уравнений реактора аналогичные соображения приводят нас к следующей формуле:

$$\varphi_1^{*'} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}'} \nabla \varphi_0^{*'}, \quad (16.2.6)$$

где штрихом отмечен тот факт, что соответствующие функции в пределах группы не зависят от скорости нейтрона.

Подставляя выражения (16.2.5) и (16.2.6) в формулы усреднения (16.1.18), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
\Sigma_0^j &= \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \overline{\varphi_0^{*j} \varphi_0}}{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \overline{\varphi_0^{*j} \varphi_0}}; \\
\Sigma_1^j &= \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma D \nabla \overline{\varphi_0^{*j} \nabla \varphi_0}}{\int_{v_{j-1}}^{v_j} dv D \nabla \overline{\varphi_0^{*j} \nabla \varphi_0}}; \\
\Sigma_0^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv w_0^j(v) \overline{\varphi_0^{*j} \varphi_0}}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv \overline{\varphi_0^{*j} \varphi_0}}; \\
\Sigma_1^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv w_1^j(v) D \nabla \overline{\varphi_0^{*j} \nabla \varphi_0}}{\int_{v_{l-1}}^{v_l} dv D \nabla \overline{\varphi_0^{*j} \nabla \varphi_0}},
\end{aligned} \right\} \quad (16.2.7)$$

где  $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$  — коэффициент диффузии.

Очевидно, что спектр нейтронов в данной зоне реактора может быть представлен в виде

$$\varphi_0(\mathbf{r}, u) = \varphi(u) F(\mathbf{r}, u), \quad (16.2.8)$$

где  $\varphi(u)$  — средний по данной зоне реактора поток нейтронов, а  $F(\mathbf{r}, u)$  — медленно меняющаяся в пределах группы функция.

Подставляя соотношение (16.2.8) в формулы (16.2.7) и переходя в полученных формулах от переменной  $v$  к  $u$ , будем иметь



$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma_0^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma \varphi(u) \overline{\varphi_0^{*j} F}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi(u) \overline{\varphi_0^{*j} F}}; \\
 \Sigma_1^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma D\varphi(u) \overline{\nabla \varphi_0^{*j} \nabla F}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du D\varphi(u) \overline{\nabla \varphi_0^{*j} \nabla F}}; \\
 \Sigma_0^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_0^j(u) \varphi(u) \overline{\varphi_0^{*j} F}}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du \varphi(u) \overline{\varphi_0^{*j} F}}; \\
 \Sigma_1^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_1^j(u) D\varphi(u) \overline{\nabla \varphi_0^{*j} \nabla F}}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du D\varphi(u) \overline{\nabla \varphi_0^{*j} \nabla F}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (16.2.9)$$

Так как функция  $F(\mathbf{r}, u)$  предполагалась медленно меняющейся по летаргии в пределах группы, то в формулах (16.2.9) она всюду может быть заменена

$$F^j(\mathbf{r}) = \int_{u_{j-1}}^{u_j} F(\mathbf{r}, u) du. \quad (16.2.10)$$

В результате формулы (16.2.9) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma \varphi(u)}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi(u)}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma D \varphi(u)}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du D \varphi(u)}; \\ {}^{l \rightarrow j} \Sigma_0 &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_0^j(u) \varphi(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du \varphi(u)}; \\ {}^{l \rightarrow j} \Sigma_1 &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_1^j(u) D \varphi(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du D \varphi(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.11)$$

На основании вышеизложенного следует, что формулы (16.2.11) позволяют найти приближенные значения группо-вых констант в пределах каждой зоны реактора. Заметим, что если размеры зоны реактора устремлять к нулю, то формулы (16.2.11) переходят в точные формулы (16.1.20).

Формулы (16.2.11) дают возможность найти усредненные физические константы в надтепловой области. Следует отметить, что формулы (16.2.11) оказываются удовлетворительными для всех элементов, включая и водород.

В заключение рассмотрим нормировку функций  $\Sigma_0^{l \rightarrow j}$  и  $\Sigma_1^{l \rightarrow j}$ , определенных формулами (16.2.11). Сначала представим их в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{l \rightarrow j} &= \sum_{0es}^{l \rightarrow j} + \sum_{0is}^{l \rightarrow j} + \sum_{0f}^{l \rightarrow j}; \\ \sum_1^{l \rightarrow j} &= \sum_{1es}^{l \rightarrow j}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.12)$$

Очевидно, что величины  $\sum_{0\nu}^{l \rightarrow j}$  и  $\sum_{1es}^{l \rightarrow j}$  также определяются соответствующими формулами (16.2.11). Суммируя эти выражения по индексу  $j$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \sum_{0\nu}^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du \varphi(u) \sum_j w_{0\nu}^j(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du \varphi(u)}; \\ \sum_j \sum_{1es}^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du D\varphi(u) \sum_j w_1^j(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du D\varphi(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.13)$$

Учитывая тот факт, что вследствие нормировки

$$\left. \begin{aligned} \sum_j w_{0\nu}^j(u) &= \Sigma_\nu; \\ \sum_j w_1^j(u) &= \Sigma_{es} \bar{\mu}_0; \end{aligned} \right\} \quad (16.2.14)$$

$$\sum_j w_{0f}^j(u) = \nu_f \Sigma_f, \quad (16.2.15)$$

приходим к следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{0es}^l; \\ \sum_j \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{1es}^l \bar{\mu}_0; \\ \sum_j \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{is}^l; \\ \sum_j \Sigma_{0f}^{l \rightarrow j} &= \nu_f^l \Sigma_f^l. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.16)$$

Следует особо подчеркнуть необходимость выполнения соотношений (16.2.16) при ведении расчетов по многогрупповой схеме.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что если все нейтроны тепловых энергий ( $v < v_{\text{гр}}$ ) объединены в одну группу, то необходимо найти сечения перехода нейтрона из группы  $j$  в тепловую.

Обозначим тепловую группу индексом  $j = m + 1$ . Тогда нам необходимо определить выражения  $\Sigma_{0es}^{l \rightarrow m+1}$  и  $\Sigma_{1es}^{l \rightarrow m+1}$ . Соответствующие выражения найдем следующим образом.

Формулы (16.2.16) являются нормированными соотношениями для перехода нейтронов из фиксированной группы во все остальные. Эти формулы были получены в предположении, что все группы нейтронов являются группами замедления. Насамом деле такая модель нереальна. В области скоростей ( $v < v_{\text{гр}}$ ) механизм рассеяния нейтронов существенно отличается от механизма рассеяния в области ( $v > v_{\text{гр}}$ ). Тем не менее нормирование соотношений (16.2.16) и в этом случае должны иметь место. Однако для этого необходимо ввести в рассмотрение группу  $j = m + 1$ . Тогда соотношения (16.2.16) переписутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{0es}^l; \\ \sum_{j=1}^{m+1} \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{1es}^l \bar{\mu}_0; \\ \sum_{j=1}^{m+1} \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{is}^l; \\ \sum_{j=1}^{m+1} \Sigma_{0f}^{l \rightarrow j} &= \nu_f^l \Sigma_f^l. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.17)$$

Из первых двух равенств можно определить интересующие нас величины

$$\Sigma_{0es}^{l \rightarrow m+1} \quad \text{и} \quad \Sigma_{1es}^{l \rightarrow m+1}.$$

В самом деле, разрешив соотношения относительно неизвестных, получим

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0es}^{l \rightarrow m+1} &= \Sigma_{0es}^l - \sum_{j=1}^m \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j}; \\ \Sigma_{1es}^{l \rightarrow m+1} &= \Sigma_{1es}^l \bar{\mu}_0 - \sum_j^m \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.18)$$

### 16.3. Дальнейшие преобразования формул для усредненных групповых констант

В § 16.1 и 16.2 даны общие формулы для усреднения физических констант в пределах группы. Рассмотрим сначала формулы усреднения (16.2.11) для групп замедления. Анализ формул для  $\Sigma_0^j$  и  $\Sigma_1^j$  показывает, что они имеют простой вид и могут быть непосредственно использованы для расчетов. Что касается соответствующих формул для величин  $\Sigma_0^{l \rightarrow j}$  и  $\Sigma_1^{l \rightarrow j}$ , то они требуют предварительного рассмотрения. Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} + \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} + \Sigma_{0f}^{l \rightarrow j}; \\ \Sigma_1^{l \rightarrow j} &= \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j}, \end{aligned} \right\} \quad (16.3.1)$$

начнем наше рассмотрение с анализа формул для  $\Sigma_{0es}^{l \rightarrow j}$  и  $\Sigma_{1es}^{l \rightarrow j}$ , предварительно записав их в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_{0es}^j(u) \varphi(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du \varphi(u)}; \\ \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du w_{1es}^j(u) D\varphi(u)}{\int_{u_{l-1}}^{u_l} du D\varphi(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.2)$$

Сначала предположим, что среднее приращение летаргии на столкновение меньше интервала группы, то есть

$$r < \Delta u_j, \quad (16.3.3)$$

где

$$\Delta u_j = u_j - u_{j-1}.$$

Принимая во внимание тот факт, что функции  $w_{0es}(u \rightarrow u')$  и  $w_{1es}(u \rightarrow u')$  отличны от нуля только на интервале  $u < u' < u + r$ , выражения  $\Sigma_{0es}^{l \rightarrow j}$  представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma_{0es}^{j \rightarrow j} &= \frac{\left( \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_u^{u+r} du' g_{0es}(u \rightarrow u') - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{u_j}^{u_j+r} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_{u-r}^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u') \right)}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi(u)}; \\
 \Sigma_{0es}^{(j-1) \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_{j-1}+r} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_{u-r}^{u_{j-1}} du' g_{0es}(u \rightarrow u')}{\int_{u_{j-2}}^{u_{j-1}} du \varphi(u)},
 \end{aligned} \right\} \quad (16.3.4)$$

причем все остальные величины  $\Sigma_{0es}^{l \rightarrow j}$  равны нулю.

Из условия нормирования функции  $w_{0es}(u \rightarrow u')$  следует, что

$$\int_u^{u+r} du' g_{0es}(u \rightarrow u') = 1,$$

поэтому соотношения (16.3.4) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma_{0es}^{j \rightarrow j} &= \Sigma_0^j - \Sigma_{03}^j; \\
 \Sigma_{0es}^{(j-1) \rightarrow j} &= \Sigma_{03}^{j-1},
 \end{aligned} \right\} \quad (16.3.5)$$

где

$$\Sigma_{03}^j = \frac{\int_{u_j}^{u_j+r} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_{u-r}^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u')}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi(u)}, \quad (16.3.6)$$

а величина  $\Sigma_0^j$  определена соответствующей формулой из (16.2.11).

Учитывая, что

$$g_{0es}(u \rightarrow u') = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u'-u)}, \quad (16.3.7)$$

будем иметь

$$\Sigma_{03}^j = \frac{(M+1)^2}{4M} \frac{\int_{u_j}^{u_j+r} du' \Sigma_{es} \varphi(u') \int_{u'-r}^{u_j} du e^{-(u'-u)}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi(u)}. \quad (16.3.8)$$

Если  $r \ll 1$ , то функцию  $\Sigma_{es} \varphi(u)$  приближенно можно вынести из-под знака интеграла в (16.3.8) при летаргии  $u_j$ . Тогда получим

$$\Sigma_{03}^j = \frac{\xi \Sigma_{es}(u_j) \varphi(u_j)}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \varphi(u) du}, \quad (16.3.9)$$

где  $\xi$  — среднее приращение летаргии на одно столкновение, равное

$$\xi = \frac{(M+1)^2}{2M} [1 - (1+r)e^{-r}]. \quad (16.3.10)$$

Переходим теперь к рассмотрению величин  $\Sigma_{1es}^{j \rightarrow l}$ . Аналогичные рассуждения приводят нас к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{1es} &= \Sigma_{1es}^j \bar{\mu}_0 - \Sigma_{13}^j, \\ \Sigma_{1es} &\stackrel{(j-1) \rightarrow j}{=} \Sigma_{13}^{j-1}; \end{aligned} \right\} \quad (16.3.11)$$

$$\Sigma_{13}^j = \frac{\int_{u_j}^{u_j+r} du \Sigma_{es} D \varphi(u) \int_{u-r}^{u_j} du' g_{1es}(u \rightarrow u')}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du D \varphi(u)}; \quad (16.3.12)$$



$$g_{1es}(u \rightarrow u') = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u'-u)} \left( \frac{(M+1)}{2} e^{-\frac{u'-u}{2}} - \frac{(M-1)}{2} e^{\frac{u'-u}{2}} \right). \quad (16.3.13)$$

Здесь, кроме того, мы воспользовались нормированным соотношением функции  $w_{1es}$ :

$$\int_u^{u+r} du g_{1es}(u \rightarrow u') = \bar{\mu}_0.$$

Используя предположение о малости  $r$  по сравнению с единицей и вынося функции  $\Sigma_{es} D\varphi(u)$  из-под знака интеграла при  $u = u_j$ , получаем

$$\Sigma_{13}^j = \frac{\overline{\Delta u \mu_0} \Sigma_{es}(u_j) D(u_j) \varphi(u_j)}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du D\varphi(u)}, \quad (16.3.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta u \mu_0} &= \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u_j}^{u_j+r} du \int_{u-r}^{u_j} du' e^{-(u'-u)} \mu_0(u' - u); \\ \mu_0(u) &= \frac{(M+1)}{2} e^{-\frac{u}{2}} - \frac{(M-1)}{2} e^{-\frac{u}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.15)$$

Нетрудно убедиться с помощью замены переменных интегрирования, что величина  $\overline{\Delta u \mu_0}$  не зависит от номера  $j$  и фиксирована для ядер данного сорта.

Итак, если интервалы групп намного больше максимального приращения летаргии  $r$ , то групповые константы для упругих переходов из группы в группу имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0es}^{j \rightarrow j} &= \Sigma_{0es}^j - \Sigma_{03}^j, & \Sigma_{0es}^{(j-1) \rightarrow j} &= \Sigma_{03}^{j-1}; \\ \Sigma_{1es}^{j \rightarrow j} &= \Sigma_{1es}^j \bar{\mu}_0 - \Sigma_{13}^j, & \Sigma_{1es}^{(j-1) \rightarrow j} &= \Sigma_{13}^{j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.16)$$

В том случае, когда максимальное приращение летаргии больше ширины группы, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0es}^{j \rightarrow j} &= \frac{1}{\varphi^j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_u^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u'); \\ \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} &= \frac{1}{\varphi^l} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \Sigma_{es} \varphi(u) \int_{u_{j-1}}^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u'), \end{aligned} \right\} \quad (16.3.17)$$

где

$$\varphi^l = \int_{u_{l-1}}^{u_l} \varphi(u) du.$$

Следует иметь в виду, что интегралы в формулах (16.3.17) необходимо вычислять с учетом того факта, что функция  $g_{0es}(u \rightarrow u')$  отлична от нуля только в пределах интервала  $u \leq u' \leq u + r$ . В зависимости от рассматриваемого случая можно вывести соответствующую систему формул для сечений  $\Sigma_{0es}^{l \rightarrow j}$ , учитывающих указанное выше свойство функций  $g_{0es}(u' \rightarrow u)$ .

Формулы (16.3.17) несколько упростим в предположении, что приближенно можно принять

$$\Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} = \Sigma_{0es}^l \frac{l \rightarrow j}{g_0}, \quad (16.3.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{0es}^{j \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_u^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u'); \\ g_{0es}^{l \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_l} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \int_{u_{j-1}}^{u_j} du' g_{0es}(u \rightarrow u'). \end{aligned} \right\} \quad (16.3.19)$$

Аналогичные преобразования можно осуществить для получения функций  $\Sigma_{1es}^{l \rightarrow j}$ . В результате нетрудно получить

$$\Sigma_{1es}^{l \rightarrow j} = \Sigma_{1es}^l \frac{l \rightarrow j}{g_{1es}}, \quad (16.3.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{1es}^{j \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_u^{u_j} du' g_{1es}(u \rightarrow u'); \\ g_{1es}^{l \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_l} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \int_{u_{j-1}}^{u_j} du' g_{1es}(u \rightarrow u'). \end{aligned} \right\} \quad (16.3.21)$$

Если рассеяние происходит на ядрах водорода, то формулы для функций  $g_{0es}^{l \rightarrow j}$  и  $g_{1es}^{l \rightarrow j}$  существенно упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} g_{0es}^{j \rightarrow j} &= 1 - \frac{1 - e^{-\Delta u_j}}{\Delta u_j}; \\ g_{0es}^{l \rightarrow j} &= (1 - e^{-\Delta u_l})(1 - e^{-\Delta u_j}) \frac{e^{-(u_{j-1} - u_l)}}{\Delta u_l}; \\ g_{1es}^{j \rightarrow j} &= \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{1 - e^{-\frac{3}{2} \Delta u_l}}{\Delta u_j} \right); \\ g_{1es}^{l \rightarrow j} &= \frac{4}{9} \left( 1 - e^{-\frac{3}{2} \Delta u_j} \right) \left( 1 - e^{-\frac{3}{2} \Delta u_l} \right) \frac{e^{-\frac{3}{2}(u_{j-1} - u_l)}}{\Delta u_l}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.22)$$

Анализ функций  $g_{0es}^{l \rightarrow j}$  и  $g_{1es}^{l \rightarrow j}$  показывает, что они могут быть представлены в следующем простейшем виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{0es}^{l \rightarrow j} &= \alpha_0^j \beta_0^l; \\ g_{1es}^{l \rightarrow j} &= \alpha_1^j \beta_1^l, \end{aligned} \right\} \quad (16.3.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^j &= (1 - e^{-\Delta u_j}) e^{-u_{j-1}}; \\ \beta_0^l &= \frac{1 - e^{-\Delta u_l}}{\Delta u_l} e^{u_l}; \\ \alpha_1^j &= \frac{2}{3} \left( 1 - e^{-\frac{3}{2} \Delta u_j} \right) e^{-\frac{3}{2} u_{j-1}}; \\ \beta_1^l &= \frac{3}{2} \frac{1 - e^{-\frac{3}{2} \Delta u_l}}{\Delta u_l} e^{\frac{3}{2} u_l}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.24)$$

Формулами (16.3.23) удобно пользоваться при составлении разнообразных программ расчета спектра нейтронов в реакторе.

Переходим к рассмотрению групповых констант, связанных с неупругим рассеянием нейтронов.

Если предположить, что функция  $g_{0is}(u \rightarrow u')$  изменяется в пределах группы слабо, то приближенно можно записать

$$\Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} = \Sigma_{0is}^l g_{0is}^{l \rightarrow j}, \quad (16.3.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{0is}^{j \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_u^{u_j} du' g_{0is}(u \rightarrow u'); \\ g_{0is}^{l \rightarrow j} &= \frac{1}{\Delta u_j} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \int_{u_{j-1}}^{u_j} du' g_{0is}(u \rightarrow u'). \end{aligned} \right\} \quad (16.3.26)$$

Величины  $g_{0is}^{j \rightarrow l}$  подсчитываются исходя из конкретной модели упругого рассеяния. В большинстве случаев эти величины находятся в результате ядерно-физических экспериментов.

Групповые константы, связанные с делением нейтронов, находятся аналогичным образом:

$$\Sigma_{0f}^{l \rightarrow j} = \nu_f^l \Sigma_f^l g_{0f}^{l \rightarrow j}, \quad (16.3.27)$$

где

$$g_{0f}^{l \rightarrow j} = \frac{1}{\Delta u_l} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \int_{u_{j-1}}^{u_j} du' g_{0f}(u \rightarrow u'). \quad (16.3.28)$$

Ввиду того, что функция  $g_{0f}^{j \rightarrow l}$  не зависит от  $u$ , а является функцией только  $u'$ , то есть

$$g_{0f}(u \rightarrow u') = \chi(u'), \quad (16.3.29)$$

выражение (16.3.28) принимает следующий вид:

$$g_{0f}^{l \rightarrow j} = \chi^j, \quad (16.3.30)$$

где

$$\chi^j = \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \chi(u). \quad (16.3.31)$$

## 16.4. Простейшие методы усреднения физических констант

Полученные в предыдущих параграфах формулы для усреднения физических констант в пределах групп предполагают известными усредненные по законам реактора спектры потока нейтронов  $\varphi(u)$ . Для получения соответствующих функций необходимо знать приближенное решение задачи. В настоящем параграфе мы укажем способы усреднения по спектру нейтронов в бесконечной однородной среде. При этом можно рассмотреть три разных способа.

1. Поглощение нейтронов отсутствует. Источники нейтронов распределены по спектру деления, а неупругое рассеяние несущественно. В этом случае поток нейтронов находится в результате решения следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} &= \chi(u) & q(-\infty) &= 0; \\ q &= \xi \Sigma_{es} \varphi(u). \end{aligned} \right\} \quad (16.4.1)$$

Решение этой задачи дается в виде

$$\varphi(u) = \frac{\eta(u)}{\xi \Sigma_{es}}, \quad (16.4.2)$$

где

$$\eta(u) = \int_{-\infty}^u \chi(u) du. \quad (16.4.3)$$

2. Источники нейтронов распределены по спектру деления. Учитывается захват нейтронов. Неупругое рассеяние можно считать несущественным. Задача решается в возрастном приближении:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} + \frac{\Sigma_c}{\xi \Sigma_{es}} q &= \chi(u); \\ q &= \xi \Sigma_{es} \varphi(u); \\ q(-\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.4.4)$$

Решение этой задачи (16.4.4) имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{\eta(u)}{\xi \Sigma_{es}}, \quad (16.4.5)$$

где

$$\eta(u) = \int_{-\infty}^u du' \chi(u') \frac{p(u)}{p(u')}; \quad (16.4.6)$$

$$p(u) = e^{-\int_{-\infty}^u \frac{\Sigma_c}{\xi \Sigma_{es}} du'}. \quad (16.4.7)$$

3. Источники нейтронов распределены по спектру деления, неупругое рассеяние несущественно. Задача решается в возрастном приближении с учетом второго энергетического момента:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{du} + \frac{\Sigma_c}{\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma} q &= \chi(u); \\ q &= (\xi \Sigma_{es} + \gamma \Sigma) \varphi(u); \\ q(-\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.4.8)$$

Решение задачи (16.4.8) имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{\eta(u)}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma}, \quad (16.4.9)$$

где

$$\eta(u) = \int_{-\infty}^u du' \chi(u') \frac{p(u)}{p(u')}; \quad (16.4.10)$$

$$p(u) = e^{-\int_{-\infty}^u \frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_{es} + \gamma\Sigma} du'}. \quad (16.4.11)$$

Усреднение физических констант в надтепловой области по формулам (16.4.2), (16.4.5) и (16.4.9) оказывается удовлетворительным для большого числа задач.

Если неупругое рассеяние является определяющим фактором в процессе замедления, то для нахождения функции  $\varphi(u)$  необходимо решить общую энергетическую задачу

$$(\Sigma_c + \Sigma_s)\varphi = \mathbf{A}\varphi + \chi(u), \quad (16.4.12)$$

где интегральный оператор  $\mathbf{A}$  определяется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\varphi = & \int_{u-r}^u du' \Sigma_{es}(u') \varphi(u') g_{0es}(u \rightarrow u') + \\ & + \int_{-\infty}^u du' \Sigma_{is}(u') \varphi(u') g_{0is}(u \rightarrow u'). \end{aligned} \quad (16.4.13)$$

Существенным недостатком изложенных способов усреднения является то, что они не учитывают утечек нейтронов из одной зоны реактора в другую. Для более правильного усреднения физических констант необходимо знать пространственно-энергетическое распределение нейтронов по всем зонам реактора. Этот вопрос рассмотрен в рамках диффузионно-возрастной теории в следующей главе.

## 16.5. Приведение многогрупповых уравнений реактора к виду, удобному для расчетов

Многогрупповые уравнения реактора в  $P_1$ -приближении представлены в виде (16.1.13) и (16.1.16).

Рассмотрим сначала систему основных уравнений реактора, представив ее в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \Sigma_{0y}^j \varphi_0^j &= q_0^j + \chi^j Q(\mathbf{r}); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= q_1^j; \end{aligned} \right\} \quad (16.5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0y}^j &= \Sigma_0^j - \Sigma_{0is}^{j \rightarrow j}; \\ \Sigma_{1y}^j &= \Sigma_1^j - \Sigma_{1es}^{j \rightarrow j}; \\ q_0^j &= \sum_{l=1}^{j-1} \left( \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} + \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} \right) \varphi_0^l; \\ q_1^j &= \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{1es}^{l \rightarrow j} \varphi_1^l; \\ Q &= \sum_{j=1}^m \nu_f^j \Sigma_f^j \varphi_0^j + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.2)$$

Величину  $\Sigma_{0y}^j$  называют сечением увода из группы  $j$ , а  $q_0^j$  — плотностью замедления нейтронов в группу  $j$ .

Функция  $\Phi_0(\mathbf{r})$  является решением уравнений тепловой группы нейтронов:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1 + \Sigma_{cT} \Phi_0 &= q_{0T}; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_{trT} \Phi_1 &= q_{1T}, \end{aligned} \right\} \quad (16.5.3)$$



где

$$q_{0T} = \sum_{l=1}^m \Sigma_{0es}^{l \rightarrow m+1} \varphi_0^l;$$

$$q_{1T} = \sum_{l=1}^m \Sigma_{1es}^{l \rightarrow m+1} \varphi_1^l,$$

а  $\Sigma_{cT}, \nu_f \Sigma_{fT}, \Sigma_{trT}$  — эффективные константы одногрупповой теории для группы тепловых нейтронов.

Если максимальная потеря энергии меньше  $\Delta u_j$  (то есть  $M \gg 1$ ), а неупругое рассеяние несущественно, то в этом случае формулы (16.5.2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0y}^j &= \Sigma_{0c}^j + \Sigma_{03}^j; \\ \Sigma_{1y}^j &= \Sigma_{1c}^j + \Sigma_{13}^j + \Sigma_{1es}^j (1 - \bar{\mu}_0); \\ q_0^j &= \Sigma_{03}^{j-1} \varphi_0^{j-1}; \\ q_1^j &= \Sigma_{13}^{j-1} \varphi_1^{j-1}; \\ Q &= \sum_{j=1}^m \nu_f^j \Sigma_0^j \varphi_0^j + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.3')$$

Если же неупругое рассеяние оказывается существенным, тогда:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{0y}^j &= \Sigma_{0c}^j + \Sigma_{03}^j + \Sigma_{0is}^j (1 - \frac{j \rightarrow j}{g_{0is}}); \\ \Sigma_{1y}^j &= \Sigma_{1c}^j + \Sigma_{13}^j + \Sigma_{1es}^j (1 - \mu_0); \\ q_0^j &= \Sigma_{03}^{j-1} \varphi_0^{j-1} + \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{0is}^l \frac{l \rightarrow j}{g_{0is}} \varphi_0^l; \\ q_1^j &= \Sigma_{13}^{j-1} \varphi_1^{j-1}; \\ Q &= \sum_{j=1}^m \nu_f^j \Sigma_f^j \varphi_0^j + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.4)$$

Таким образом, полная система основных уравнений реактора в многогрупповом представлении имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \Sigma_{0y} \varphi_0^j &= q_0^j + \chi^j Q(\mathbf{r}); \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= q_1^j; \\ \nabla \Phi_1 + \Sigma_{0T} \Phi_0 &= q_{0T}; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_{1T} \Phi_1 &= q_{1T}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.5)$$

В качестве граничных условий к системе (16.5.5) необходимо присоединить следующие:

$$\left. \begin{aligned} 2(\varphi_1^j)_n - \varphi_0^j &= 0; \\ 2(\Phi_1)_n - \Phi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{на } S. \quad (16.5.6)$$

Переходим к рассмотрению системы сопряженных уравнений реактора (16.1.16'). Запишем ее в виде, удобном для проведения расчетов:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \varphi_1^{*j} + \Sigma_{0y}^j \varphi_0^{*j} &= q_0^{*j} + \nu_f^j \Sigma_f^j Q^*(\mathbf{r}); \\ -\frac{1}{3} \nabla \varphi_0^{*j} + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^{*j} &= q_1^{*j}; \\ -\nabla \Phi_1^* + \Sigma_{cT} \Phi_0^* &= \nu_f \Sigma_{fT} Q^*(\mathbf{r}); \\ -\frac{1}{3} \nabla \Phi_0^* + \Sigma_{trT} \Phi_1^* &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.5.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_0^{*j} &= \sum_{l=j+1}^m \left( \Sigma_{0es}^{j \rightarrow l} + \Sigma_{0is}^{j \rightarrow l} \right) \varphi_0^{*l} + \Sigma_{0es}^{j \rightarrow m+1} \Phi_0^*; \\ q_1^{*j} &= \sum_{l=j+1}^m \Sigma_{1es}^{j \rightarrow l} \varphi_1^{*l} + \Sigma_{1es}^{j \rightarrow m+1} \Phi_1^*; \\ Q^* &= \sum_{j=1}^m \chi^j \varphi_0^{*j}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.8)$$

Если  $M \gg 1$  и неупругое рассеяние несущественно, то в этом случае

$$\left. \begin{aligned} q_0^{*j} &= \Sigma_{03}^{j+1} \varphi_0^{*j+1}; \\ q_1^{*j} &= \Sigma_{13}^{j+1} \varphi_1^{*j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (16.5.9)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} q_0^{*m} &= \Sigma_{0es}^{m \rightarrow m+1} \Phi_0^*; \\ q_1^{*m} &= \Sigma_{1es}^{m \rightarrow m+1} \Phi_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (16.5.10)$$

Если неупругое рассеяние существенно, то

$$\left. \begin{aligned} q_0^{*j} &= \Sigma_{03}^{j+1} \varphi_0^{*j+1} + \sum_{l=j+1}^m \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j} \varphi_0^{*l}; \\ q_1^{*j} &= \Sigma_{13}^{j+1} \varphi_1^{*j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (16.5.11)$$

причем величины  $q_0^{*m}$  и  $q_1^{*m}$  снова вычисляются по формулам (16.5.10).

## 16.6. Учет резонансных эффектов

При расчетах ядерных реакторов зачастую приходится иметь дело с резонансным поглощением нейтронов и резонансным делением.

Введем в рассмотрение вероятность  $P_j$  того, что нейтрон избежит резонансное поглощение в группе  $(v_{j-1}, v_j)$ . Тогда учет резонансного поглощения приближенно сводится к тому, что плотность замедления нейтронов в группу  $j$  необходимо умножить на вероятность избежания резонансного захвата  $P_j$ . Физически это соответствует такой модели замедления нейтронов, когда все резонансы из интервала  $(v_{j-1}, v_j)$  сосредоточены на границе  $v = v_{j-1}$ . Такая модель вполне удовлетворена при большом числе групп.

Далее введем в рассмотрение вероятность того, что нейтрон поглотится, вызвав деление. Эту величину обозначим  $R_f^j$ . Тогда можно подсчитать число нейтронов, испытавших при переходе в группу  $j$  резонансный захват с делением. Каж-

дый такой захват, сопровождаемый появлением  $\nu_f$  вторичных нейтронов, рожденных вследствие резонансного поглощения, будет равен

$$\delta Q_R^j = \nu_f^j R_f^j q_0^j. \quad (16.6.1)$$

Это значит, что полное число вторичных нейтронов, рожденных при захвате на всех резонансах, найдется суммированием выражения (16.6.1) по всем группам, то есть

$$Q_R = \sum_j \nu_f^j R_f^j q_0^j. \quad (16.6.2)$$

Запишем теперь систему основных уравнений реактора при наличии резонансных эффектов:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \Sigma_{0y}^j \varphi_0^j &= P_j q_0^j + \chi^j (Q + \delta Q_R); & \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= q_1^j; \\ \nabla \varphi_1 + \Sigma_{cT} \Phi_0 &= P_T q_{0T}; & \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_{trT} \Phi_1 &= q_{1T}, \end{aligned} \right\} \quad (16.6.3)$$

где  $P_T = P_m$  — вероятность нейтрону избежать резонансного поглощения при переходе из группы  $j = m$  в тепловую. Рассмотрим выражение

$$P_j q_0^j = P_j \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{0s}^{l \rightarrow j} \varphi_0^l, \quad (16.6.4)$$

где

$$\Sigma_{0s}^{l \rightarrow j} = \Sigma_{0es}^{l \rightarrow j} + \Sigma_{0is}^{l \rightarrow j}.$$

Выражение (16.6.4) можно записать в следующем виде:

$$P_j q_0^j = \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{0s}^{*l \rightarrow j} \varphi_0^l, \quad (16.6.5)$$

где

$$\Sigma_{0s}^{*l \rightarrow j} = P_j \Sigma_{0s}^{l \rightarrow j}. \quad (16.6.6)$$

Далее, рассмотрим сумму

$$Q + \delta Q_R = \sum_{l=1}^m \nu_f^l \Sigma_f^l \varphi_0^l + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi + \sum_{l=1}^m \nu_f^l R_f^l q_0^l. \quad (16.6.7)$$

Выражение (16.6.7) преобразуем к следующему виду:

$$Q + \delta Q_R = \sum_{l=1}^m \nu_f \Sigma_f^{*l} \varphi_0^l + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi, \quad (16.6.8)$$

где

$$\nu_f \Sigma_f^{*l} = \nu_f^l \Sigma_f^l + \sum_{j=l+1}^m \nu_f^j R_f^j \Sigma_{0s}^{j \rightarrow l}. \quad (16.6.9)$$

Таким образом, приближенный учет резонансных эффектов сводится в конечном итоге к замене величин  $\Sigma_{0s}^{l \rightarrow j}$  на  $\Sigma_{0s}^{*l \rightarrow j}$  и  $\nu_f^j \Sigma_f^j$  на  $\nu_f \Sigma_f^{*j}$ . В дальнейшем будем пользоваться системой основных уравнений реактора (16.5.5), предполагая, что в случае резонансных эффектов в ней произведена эта замена.

Аналогичным образом в случае резонансных эффектов должна быть произведена замена соответствующих величин и в системе сопряженных уравнений реактора (16.5.7).

В заключение остановимся на расчетах величин  $P_j$  и  $P_f^j$ . Для одиночного резонанса

$$P_j^{(k)} = e^{-\frac{N}{\xi \Sigma_c} J_{\text{эфф}}^k}, \quad (16.6.10)$$

где  $J_{\text{эфф}}^k$  — эффективный резонансный интеграл на резонансе с номером  $k$ ;  $N$  — число ядер резонансного поглотителя в единице объема. Если  $\alpha_k$  — вероятность того, что резонансно поглощенный нейтрон вызовет деление, то

$$R_{fk}^j = \frac{1 - P_j^{(k)}}{1 + \alpha_k}. \quad (16.6.11)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \prod_k P_j^{(k)}; \\ R_f^j &= \prod_k R_{fk}^j. \end{aligned} \right\} \quad (16.6.12)$$

## 17

## Многогрупповая система уравнений реактора в диффузионно-возрастном приближении

### 17.1. Многогрупповая система основных и сопряженных уравнений

Разработанный в предыдущей главе многогрупповой метод позволяет находить приближенное решение задачи на расчет критической массы, спектра потока и ценности нейтронов в реакторе с учетом неупругих эффектов и особенностей замедлителя на водороде. В тех случаях, когда масса ядер замедления много больше единицы и эффекты неупругого рассеяния пренебрежимо малы, системы основных и сопряженных уравнений замедления принимают особенно простой вид и соответствуют диффузионно-возрастному приближению.

Так, пренебрегая малыми величинами, систему основных уравнений можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + (\Sigma_c^j + \Sigma_3^j) \varphi_0^j &= \Sigma_3^{j-1} \varphi_0^{j-1} + \chi^j Q; \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_{tr}^j \varphi_1^j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17.1.1)$$

где

$$\Sigma_c^j = \Sigma_{0c}^j; \quad \Sigma_3^j = \Sigma_{03}^j; \quad \Sigma_{tr}^j = \Sigma_{s1}^j (1 - \bar{\mu}_0) + \Sigma_{1c},$$

а величины  $\Sigma_{0c}^j$ ,  $\Sigma_{03}^j$ ,  $\Sigma_{1c}$ ,  $\Sigma_{s1}^j$  определяются формулами, рассмотренными в главе 16.

Исключая из системы уравнений (17.1.1) функции  $\varphi_1^j$ , приходим к диффузионным уравнениям вида

$$\nabla D^j \nabla \varphi^j - (\Sigma_c^j + \Sigma^j) \varphi^j = -\Sigma^{j-1} \varphi^{j-1} - \chi^j Q, \quad (17.1.2)$$

где

$$\varphi^j = \varphi_0^j.$$

Требуется найти решение системы уравнений (17.1.2), непрерывное вместе с потоком  $D^j \nabla \varphi^j$  и удовлетворяющее на внешней границе условию

$$2D^j(\nabla \varphi^j)_n + \varphi^j = 0 \quad \text{на } S_s. \quad (17.1.3)$$

Если реактор имеет большие размеры по сравнению с  $l_{tr}^j$ , то условие (17.1.3) можно заменить приближенным

$$\varphi^j = 0 \quad \text{на } S, \quad (17.1.4)$$

где  $S_s$  — экстраполированная поверхность реактора, отстоящая от реальной границы на расстояние  $d = \frac{2}{3} \bar{l}_{tr}$  (здесь  $\bar{l}_{tr}$  — величина, усредненная по потоку нейтронов, вылетающих из реактора).

Соответствующая система уравнений для тепловой группы может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \Phi_1 + \Sigma_{cT} \Phi_0 &= \Sigma_3^m \varphi^m; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0 + \Sigma_{trT} \Phi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.1.5)$$

Исключая из системы (17.1.5) величину  $\Phi_1$ , приходим к диффузионному уравнению

$$\nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi = -\Sigma_3^m \varphi^m, \quad (17.1.6)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}); \quad \varphi^m(\mathbf{r}) = \varphi_0^m(\mathbf{r}).$$

На внешней границе реактора требуется, чтобы выполнялось условие

$$2D_T(\nabla \Phi_0)_n + \Phi_0 = 0 \quad \text{на } S. \quad (17.1.7)$$

Таким образом, основная система уравнений реактора для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla D^j \nabla \varphi^j - \Sigma_y^j \varphi^j &= -\Sigma_3^{j-1} \varphi^{j-1} - \chi^j Q(\mathbf{r}); \\ \nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi &= -\Sigma_3^m \varphi^m; \\ Q(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^m \nu_f \Sigma_f^j \varphi^j + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (17.1.8)$$

где

$$\Sigma_y^j = \Sigma_c^j + \Sigma_3^j. \quad (17.1.9)$$

Решение системы уравнений ищется в классе непрерывных функций  $\varphi^j$  и  $\Phi$ , вместе с непрерывными потоками  $D^j \nabla \varphi^j$  и  $D_T \nabla \Phi$ , удовлетворяющих граничным условиям на  $S$

$$\left. \begin{aligned} 2D^j (\nabla \varphi^j)_n + \varphi^j &= 0; \\ 2D_T (\nabla \Phi)_n + \Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.1.10)$$

Переходим теперь к рассмотрению сопряженных уравнений реактора. Для этого рассмотрим вектор-функции

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \dots \\ \varphi^m \\ \Phi \end{vmatrix}; \quad \varphi^* = \begin{vmatrix} \varphi^{*1} \\ \varphi^{*2} \\ \dots \\ \varphi^{*m} \\ \Phi^* \end{vmatrix}$$

и определим их скалярное произведение следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*) = \int d\mathbf{r} \sum_{j=1}^m \varphi^j \varphi^{*j} + \int d\mathbf{r} \Phi \Phi^*. \quad (17.1.11)$$

Систему уравнений (17.1.8) запишем в виде

$$\mathbf{L}\varphi = 0. \quad (17.1.12)$$

Тогда с помощью тождества Лагранжа

$$(\varphi^*, \mathbf{L}\varphi) = (\varphi, \mathbf{L}^* \varphi^*)$$

нетрудно прийти к системе сопряженных уравнений

$$\mathbf{L}^* \varphi^* = 0. \quad (17.1.13)$$

В скалярном виде эта система запишется следующим образом:



$$\left. \begin{aligned} \nabla D^j \nabla \varphi^{*j} - \Sigma_y^j \varphi^{*j} &= -\Sigma_3^j \varphi^{*j+1} - \nu_f^j \Sigma_f^j Q^*(\mathbf{r}); \\ \nabla D_T \nabla \Phi^* - \Sigma_{cT} \Phi^* &= -\nu_f \Sigma_{fT} Q^*(\mathbf{r}); \\ Q^*(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^m \chi^j \varphi^{*j}. \end{aligned} \right\} \quad (17.1.14)$$

Решение системы сопряженных уравнений принадлежит классу непрерывных функций  $\varphi^{*j}$  и  $\Phi^*$ , вместе с потоками  $D^j \nabla \varphi^{*j}$  и  $D_T \nabla \Phi^*$ , удовлетворяющих на внешней границе реактора  $S$  условиям

$$\left. \begin{aligned} 2D^j (\nabla \varphi^{*j})_n + \varphi^{*j} &= 0; \\ 2D_T (\nabla \Phi^*)_n + \Phi^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.1.15)$$

Кроме того, при рассмотрении системы (17.1.14) следует положить

$$\varphi^{*m+1} = \Phi^*. \quad (17.1.16)$$

В заключение отметим, что резонансные эффекты, так же как и в § 16.6, можно учесть заменой

$$\Sigma_3^j \text{ на } \Sigma_3^{*j} = P_j \Sigma_3^j$$

и

$$\nu_f^j \Sigma_f^j \text{ на } \nu_f \Sigma_f^{*j} = \nu_f^{j+1} R_f^{j+1} \Sigma_3^j.$$

## 17.2. Приближенный расчет спектра нейтронов в реакторе

Рассмотрим приближенный метод расчета пространственно-энергетического распределения нейтронов в реакторе. Этот метод родственен методу групп. Результаты расчетов по данному методу могут иметь как самостоятельный интерес при решении вопроса о критической массе реактора, так и использоваться для наиболее корректного группового усреднения физических констант.

Рассмотрим уравнение замедления нейтронов в диффузионно-возрастном приближении, записав его предварительно в следующем виде:

$$\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\Sigma_c}{\xi \Sigma_s} q = \nabla D \nabla \varphi + \chi(u) Q(\mathbf{r}), \quad (17.2.1)$$

где

$$q = \xi \Sigma_s \varphi$$

— плотность замедления.

Пусть весь интервал лётаргии разбит на частичные интервалы шириной  $\Delta u_j$ . Проинтегрируем уравнение (17.2.1) в пределах  $(u_{j-1}, u)$ , предполагая правую часть уравнения известной. Тогда получим

$$q = p^j(u) q_{j-1} + \int_{u_{j-1}}^u \nabla D \nabla \varphi \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du' + \chi^j(u) Q(\mathbf{r}), \quad (17.2.2)$$

где

$$q_j = q(\mathbf{r}, u_j); \quad p^j(u) = e^{-\int_{u_{j-1}}^u \frac{\Sigma_c}{\xi \Sigma_s} du};$$

$$\chi^j(u) = \int_{u_{j-1}}^u \chi(u') \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du'.$$

Полагая в решении (17.2.2)  $u = u_j$ , будем иметь

$$q_j = p^j q_{j-1} + \int_{u_{j-1}}^{u_j} \nabla D \nabla \varphi \frac{p^j}{p^j(u')} du' + \chi^j Q(\mathbf{r}), \quad (17.2.3)$$

где

$$p^j = p^j(u_j); \quad \chi^j = \chi^j(u_j).$$

Для фиксирования зоны реактора выражение

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \nabla D \nabla \varphi \frac{p^j}{p^j(u')} du' \quad (17.2.4)$$

можно преобразовать с учетом следующих предположений. Предположим, что

$$\varphi(\mathbf{r}, u) = \frac{\eta(u)}{\xi \Sigma_s} \psi(\mathbf{r}, u), \quad (17.2.4')$$

где  $\psi(\mathbf{r}, u)$  — медленно меняющаяся функция на интервале  $\Delta u_j$ ,

$$\text{а } \eta(u) = \int_{-\infty}^u \chi(u) du.$$

Подставим выражение (17.2.4') в соотношение (17.2.4) и вынесем из-под знака интервала функцию  $\psi(\mathbf{r}, u)$ , положив  $u = u_j$ :

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} D \frac{p^j}{p^j(u')} \nabla^2 \varphi du' = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{D\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j}{p^j(u')} du' \nabla^2 \psi_j.$$

Из соотношения (17.2.4') следует, что

$$\varphi^j = \frac{\eta_j}{\xi \Sigma_{sj}} \psi_j.$$

Таким образом,

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} D \frac{p^j}{p^j(u')} \nabla^2 \varphi du' = \frac{\xi \Sigma_{sj}}{\eta_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{D\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j}{p^j(u')} du' \nabla^2 \varphi_j.$$

С учетом последнего выражения, равенство (17.2.3) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\nabla D^j \nabla \varphi_j - \Sigma^j \varphi_j = -f^j, \quad (17.2.5)$$

где

$$\varphi_j = \varphi(\mathbf{r}, u_j);$$

$$\left. \begin{aligned} D^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{D\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j}{p^j(u)} du}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j}{p^j(u)} du}; & \Sigma^j &= \frac{\eta_j}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j}{p^j(u)} du}; \\ f^j &= \Sigma^f \left[ p^j \frac{\xi \Sigma_{sj1}}{\xi \Sigma_{sj}} \varphi^{j-1} + \frac{\chi^j}{\xi \Sigma_{sj}} Q(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17.2.6)$$

При выводе системы уравнений (17.2.5) предполагалось, что на границе раздела зон реактора имеет место условие непрерывности потока нейтронов

$$J = -D^j (\nabla \varphi^j)_n \quad (17.2.7)$$

и на внешней границе реактора  $S$

$$2D^j(\nabla\varphi^j)_n + \varphi^j = 0. \quad (17.2.8)$$

К системе (17.2.5) необходимо присоединить уравнения для потока тепловых нейтронов

$$\nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi = -f_T, \quad (17.2.9)$$

где

$$f_T = \Sigma^m \varphi^m$$

при условии, что на границах раздела зон реактора функции  $\Phi$  и  $D_T(\nabla\Phi)_n$  остаются непрерывными, а на внешней границе выполняется следующее соотношение:

$$2D(\nabla\Phi)_n + \Phi = 0. \quad (17.2.10)$$

Таким образом, система основных уравнений реактора имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla D^j \nabla \varphi^j - \Sigma^j \varphi^j &= -f^j; \\ \nabla D_T \nabla \Phi - \Sigma_{cT} \Phi &= -f_T. \end{aligned} \right\} \quad (17.2.11)$$

Переходим к вычислению функции  $Q(\mathbf{r})$ :

$$Q(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \int_{u_{j-1}}^{u_j} \nu_f \Sigma_f \varphi du + \nu_f \Sigma_{fT} \Phi. \quad (17.2.12)$$

Для получения наилучшей аппроксимации функции  $\varphi$  в пределах интервала летаргии  $(u_{j-1}, u)$  воспользуемся формулой (17.2.2). С этой целью рассмотрим интеграл в правой части этого выражения и представим его приближенно в следующем виде:

$$\int_{u_{j-1}}^u \nabla D \nabla \varphi \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du' = \int_{u_{j-1}}^u \frac{D\eta}{\xi \Sigma_s} \frac{p^j(u)}{p^j(u')} \nabla^2 \psi du'.$$

Функцию  $\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, u)$  заменим  $\nabla^2 \varphi_j$ . Тогда нетрудно получить

$$\int_{u_{j-1}}^u \nabla D \nabla \varphi \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du' = A^j(u) \nabla D^j \nabla \varphi_j, \quad (17.2.13)$$

где

$$A^j(u) = \frac{p^j(u)}{D^j \eta_j} \xi \Sigma_{sj} \int_{u_{j-1}}^u \frac{D \eta}{\xi \Sigma_s} \frac{du'}{p^j(u')}. \quad (17.2.14)$$

Подставив выражение (17.2.13) в формулу (17.2.2), получим

$$q = p^j(u) q^{j-1} + A^j(u) \nabla D^j \nabla \varphi_j + \chi^j(u) Q. \quad (17.2.15)$$

Перейдя от функции  $q$  к  $\varphi$  и исключив выражение  $\nabla D^j \nabla \varphi_j$  с помощью уравнения (17.2.5), получим следующую интерполяционную формулу:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, u) = & \frac{1}{\xi \Sigma_s} \left\{ \left[ p^j(u) - p^j \frac{A^j(u)}{A^j} \right] \xi \Sigma_{sj-1} \varphi_{j-1} + \right. \\ & \left. + \frac{A^j(u)}{A^j} \xi \Sigma_{sj} \varphi_j + \left[ \chi^j(u) - \chi^j \frac{A^j(u)}{A^j} \right] Q \right\}. \end{aligned} \quad (17.2.16)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \alpha^j(u) &= \frac{\xi \Sigma_{sj-1}}{\xi \Sigma_s} \left[ p^j(u) - p^j \frac{A^j(u)}{A^j} \right]; \\ \beta^j(u) &= \frac{\xi \Sigma_{sj}}{\xi \Sigma_s} \frac{A^j(u)}{A^j}; \\ \Delta^j(u) &= \left( \chi^j(u) - \chi^j \frac{A^j(u)}{A^j} \right) \frac{1}{\xi \Sigma_s}. \end{aligned} \right\} \quad (17.2.17)$$

Тогда формула (17.2.16) запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, u) = \alpha^j(u) \varphi^{j-1} + \beta^j(u) \varphi^j + \Delta^j(u) Q. \quad (17.2.18)$$

Подставив выражение (17.2.18) в формулу (17.2.12), будем иметь

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{j=1}^{m+1} a_f^j \varphi^j, \quad (17.2.19)$$

где

$$a_f^j = \begin{cases} a_{f1}^{j+1} + a_{f2}^j, & j = 1, 2, \dots, m-1; \\ a_{f2}^j & j = m; \\ \nu_f \Sigma_{fT} & j = m+1; \end{cases} \quad (17.2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{f1}^j &= \xi \Sigma_{s,j-1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\nu_f \Sigma_f}{\xi \Sigma_s} \left[ p^j(u) - p^j \frac{A^j(u)}{A^j} \right] du; \\ a_{f2}^j &= \xi \Sigma_{sj} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\nu_f \Sigma_f}{\xi \Sigma_s} \frac{A^j(u)}{A^j} du; \\ \varepsilon &= \sum_{j=1}^m \int_{u_{j-1}}^{u_j} \nu_f \Sigma_f \Delta^j(u) du. \end{aligned} \right\} \quad (17.2.21)$$

В заключение остановимся на вопросе об учете резонансного захвата.

Пусть в группе  $(u_{j-1}, u_j)$  содержится  $n$  резонансов. Вероятность нейтрону избежать захвата на резонансе с номером  $k$  равна  $P_f^{(k)}$ . Введем в рассмотрение функцию

$$P_j(u) = \prod_{\nu=1}^k P_f^{(\nu)}(u_{\nu-1} < u < u_{\nu}),$$

где  $u_k$  — летаргия, соответствующая резонансу с номером  $k$ . Тогда учет резонансного захвата производится простой заменой функции

$$P^j(u) \quad \text{на} \quad P_j(u)p^j(u).$$

Учет резонансного деления может быть произведен следующим образом. Пусть  $q(\mathbf{r}, u_k)$  — плотность замедления нейтронов при летаргии  $u_k - 0$ , равная

$$q(\mathbf{r}, u_k) = \xi \Sigma_s \varphi(\mathbf{r}, u) \Big|_{u=u_k-0}. \quad (17.2.22)$$

Тогда число вторичных нейтронов, рожденных при резонансном захвате на резонансе с номером  $k$ , будет равно

$$\delta Q_j^{(k)} = \nu_f \frac{1 - P_j^{(k)}}{1 + \alpha_k} q(\mathbf{r}, u_k) \quad (17.2.23)$$

и

$$\delta Q_j = \sum_k \nu_f \xi \Sigma_s(u_k) \frac{1 - P_j^{(k)}}{1 + \alpha_k} \varphi(\mathbf{r}, u_k). \quad (17.2.24)$$

Следовательно,

$$\delta Q = \sum_j \sum_k \nu_f \xi \Sigma_s(u_k) \frac{1 - P_j^{(k)}}{1 + \alpha_k} \varphi(\mathbf{r}, u_k). \quad (17.2.25)$$

Таким образом, полное число вторичных нейтронов деления найдется в виде суммы  $Q + \delta Q$ .

### 17.3. Усреднение физических констант по спектру нейтронов в реакторе

Приближенный расчет пространственно-энергетического распределения нейтронов в реакторе, изложенный в предыдущем параграфе, позволяет существенно уточнить систему групповых констант с учетом конкретных особенностей спектра нейтронов в различных зонах реактора.

С этой целью будем считать, что решение задачи  $\varphi(\mathbf{r}, u_j)$  получено при фиксированных значениях  $u_j$ , а интерполирование функции  $\varphi(\mathbf{r}, u)$  в пределах интервала  $(u_{j-1}, u_j)$  осуществляется с помощью формулы

$$\varphi(\mathbf{r}, u) = \alpha^j(u) \varphi^{j-1} + \beta^j(u) \varphi^j + \Delta^j(u) Q. \quad (17.3.1)$$

Проинтегрируем выражение (17.3.1) по объему данной зоны реактора. Тогда получим:

$$\varphi(u) = \alpha^j(u) \bar{\varphi}^{j-1} + \beta^j(u) \bar{\varphi}^j + \Delta^j(u) \bar{Q}, \quad (17.3.2)$$

где

$$\bar{\varphi}^j = \int_{G_n} d\mathbf{r} \varphi^j(\mathbf{r}). \quad (17.3.3)$$

Рассмотрим групповые константы, определяемые формулами (16.2.11):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{\Sigma \varphi(u)}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{\varphi(u)}}; & \Sigma_1^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{\Sigma D \varphi(u)}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{D \varphi(u)}}; \\ \Sigma_{03}^j &= \frac{\xi \Sigma_s \overline{\varphi(u)}|_{u=u_j}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{\varphi(u)}}; & \Sigma_{13}^j &= \frac{\overline{\Delta u \mu_0 \Sigma_s D \varphi(u)}|_{u=u_j}}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \overline{D \varphi(u)}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3.4)$$

Подставляя выражение (17.3.2) в формулы (17.3.4), приходим к групповым константам, усредненным по реальному спектру, действующему в каждой зоне реактора. В соответствии с этим для фиксированной зоны реактора будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^j &= \frac{(\Sigma \alpha)^j \bar{\varphi}_{j-1} + (\Sigma \beta)^j \bar{\varphi}_j + (\Sigma \Delta)^j \bar{Q}}{\alpha^j \bar{\varphi}_{j-1} + \beta^j \bar{\varphi}_j + \Delta^j \bar{Q}}; \\ \Sigma_1^j &= \frac{(\Sigma \alpha D)^j \bar{\varphi}_{j-1} + (\Sigma \beta D)^j \bar{\varphi}_j + (\Sigma \Delta D)^j \bar{Q}}{(\alpha D)^j \bar{\varphi}_{j-1} + (\beta D)^j \bar{\varphi}_j + (\Delta D)^j \bar{Q}}; \\ \Sigma_{03}^j &= \frac{\xi \Sigma_{sj} \bar{\varphi}_j}{\alpha^j \bar{\varphi}_{j-1} + \beta^j \bar{\varphi}_j + \Delta^j \bar{Q}}; \\ \Sigma_{13}^j &= \frac{\overline{\Delta u \mu_0 \Sigma_{sj} D_j \varphi_j}}{(\alpha D)^j \bar{\varphi}_{j-1} + (\beta D)^j \bar{\varphi}_j + (\Delta D)^j \bar{Q}}, \end{aligned} \right\} \quad (17.3.5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\bar{a} = \int_{G_n} da; \quad a^j = \int_{u_{j-1}}^{u_j} a du; \quad a_j = a(u_j). \quad (17.3.6)$$

Величина  $\Sigma_f^j$  усредняется по первой формуле из системы (17.3.5). Учет резонансов в многогрупповой системе производится методами, изложенными выше (см. § 16.6).

Для более точного усреднения многогрупповых констант необходимо воспользоваться решением многогрупповой системы сопряженных уравнений. С этой целью необходимо поступать следующим образом. Сначала, пользуясь формулами усреднения (17.3.5), находим первое приближение к форму-



лам для групповых констант. С помощью полученной системы групповых констант найдем решение сопряженной системы уравнений реактора и произведем усреднение констант по формулам (16.1.18). Получим второе приближение для групповых констант и т.д. Этот процесс последовательных приближений сходится очень быстро. Для практических целей вполне достаточно ограничиться первой или второй итерацией.

## 17.4. Расчет эффективной добавки

Как было отмечено раньше, при расчетах ядерных реакторов можно использовать условие равенства нулю потока и ценности нейтронов на внешней экстраполированной поверхности реактора. Однако экстраполированная граница, вообще говоря, зависит от номера группы.

Для того чтобы воспользоваться преимуществами простейших граничных условий на внешней экстраполированной поверхности, необходимо сделать предположение о независимости экстраполированной границы реактора от номера группы. Оказывается, что можно ввести в рассмотрение такую экстраполированную поверхность, не зависящую от летаргии нейтрона, которая не нарушает критического состояния реактора<sup>1)</sup>. Разность между экстраполированной и истинной границами реактора будем называть эффективной добавкой.

Рассмотрим систему основных и сопряженных уравнений реактора в виде (17.1.8) и (17.1.14).

Как известно, граничными условиями для этих систем будут

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \varphi^j)_n + \frac{1}{\gamma^j} \varphi^j &= 0; \\ (\nabla \varphi^{*j})_n + \frac{1}{\gamma^j} \varphi^{*j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17.4.1)$$

где

$$\gamma^j = 2D^j = \frac{2}{3} l_{tr}^j. \quad (17.4.2)$$

Наряду с указанными системами основных и сопряженных уравнений рассмотрим возмущенные системы, которые отли-

<sup>1)</sup>Эта задача была поставлена и решена В. В. Орловым.

чаются от первых только тем, что в граничных условиях возмущенных систем вместо величин  $\gamma^j$  принята величина  $\gamma$ , не зависящая от  $j$ . Дальнейшая задача будет состоять в вычислении такой величины  $\gamma$ , чтобы соответствующее возмущенное граничное условие не привело к нарушению критического состояния реактора. В дальнейшем величину  $\gamma$  будем связывать с эффективной добавкой.

Рассмотрим возмущенную систему основных уравнений, решение которой будем отмечать штрихом. Заметим, что она формально совпадает с системой невозмущенных уравнений (17.1.8). Умножим два первых уравнения возмущенной системы на  $\varphi^{*j}$ , а невозмущенной — на  $\varphi'^j$ . Просуммируем каждое из полученных выражений по всем  $j$ , вычтем одно из другого и результат проинтегрируем по всему объему реактора. Тогда получим

$$\sum \int_G d\mathbf{r} (\varphi'^j \nabla D^j \nabla \varphi^{*j} - \varphi^{*j} \nabla D^j \nabla \varphi'^j) = 0. \quad (17.4.3)$$

Все остальные члены обратятся в нуль.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_G d\mathbf{r} \varphi^{*j} \nabla D \nabla \varphi'^j &= - \int_G d\mathbf{r} D^j \nabla \varphi^{*j} \nabla \varphi'^j - D^j \int_S ds \varphi^{*j} (\nabla \varphi'^j)_n; \\ \int_G d\mathbf{r} \varphi'^j \nabla D^j \nabla \varphi^{*j} &= - \int_G d\mathbf{r} D^j \nabla \varphi'^j \nabla \varphi^{*j} - D^j \int_S ds \varphi'^j (\nabla \varphi^{*j})_n; \end{aligned}$$

выражение (17.4.3) приведем к виду

$$\sum_j D^j \int_S ds [\varphi'^j (\nabla \varphi^{*j})_n - \varphi^{*j} (\nabla \varphi'^j)_n] = 0. \quad (17.4.4)$$

Принимая во внимание граничные условия, получим

$$\sum_j D^j \int_S ds \left( \frac{1}{\gamma^j} \varphi^{*j} \varphi'^j - \frac{1}{\gamma} \varphi^{*j} \varphi'^j \right) = 0. \quad (17.4.5)$$

Разрешим соотношение (17.4.5) относительно  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\sum_j \gamma^j \int_S ds \varphi^{*j} \varphi'^j}{\sum_j \int_S ds \varphi^{*j} \varphi'^j}. \quad (17.4.6)$$

Формула (17.4.6) впервые была получена В. В. Орловым.

Если предположить, что поверхность  $S$  симметрична, то

$$\gamma = \frac{\sum_j \gamma^j \varphi^{*j}(r_s) \varphi'^j(r_s)}{\sum_j \varphi^{*j}(r_s) \varphi'^j(r_s)}. \quad (17.4.7)$$

Формула (17.4.7) может быть несколько упрощена. Г. А. Илясовой было показано, что с хорошей точностью величину  $\gamma$  можно найти по формуле (17.4.7), положив  $\varphi^{*j}(r_s) = 1$ .

Аналогичные рассуждения можно провести в рамках общего диффузионного приближения. В результате оказывается, что формула (17.4.7) является хорошим приближением к соответствующей формуле диффузионного приближения.

Если воспользоваться гипотезой о линейной экстраполяции, то, очевидно, эффективная добавка  $\delta$  найдется в виде  $\delta = \gamma$ .

# 18

## Многогрупповая система уравнений реактора в $P_n$ -приближении

### 18.1. Основные и сопряженные уравнения в $P_n$ -приближении

В настоящей главе будут сформулированы системы основных и сопряженных уравнений реактора в  $P_n$ -приближении. Соответствующие уравнения могут быть представлены в векторно-матричной форме. В результате задача о критическом размере реактора сводится к последовательному решению односкоростных уравнений, решение которых производится с помощью конечно-разностных методов, сформулированных в главах 8 и 9.

Системы основных и сопряженных уравнений позволяют сформулировать многогрупповую теорию возмущений. Будет показано, что усреднение физических констант в пределах групп может быть произведено с помощью системы основных и сопряженных уравнений реактора в диффузионном приближении. Это обстоятельство существенным образом упрощает вычислительный алгоритм.

Рассмотрим систему основных уравнений реактора (14.1.6) в плоскопараллельной геометрии в  $P_n$ -приближении, которую перепишем в виде

$$\frac{m}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial z} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z} + \Sigma \varphi_m = \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) \quad (18.1.1)$$

при условии (14.1.10)

$$\sum_{m=0}^n a_{im} \varphi_m = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}), \quad (18.1.2)$$

где  $a_{im}$  — коэффициенты, определяемые формулой (14.1.11). Задачу (18.1.1), (18.1.2) будем называть невозмущенной.

Введем в рассмотрение многогрупповую систему сопряженных уравнений, которую будем называть возмущенной:

$$-\frac{m}{2m+1} \frac{d\varphi_{m-1}^{*j}}{dz} - \frac{m+1}{2m+1} \frac{d\varphi_{m+1}^{*j}}{dz} + \Sigma_m^j \varphi_m^{*l} = \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_m^{j \rightarrow l} \varphi_m^{*l} \quad (18.1.3)$$

при условии

$$\sum_{m=0}^n a_{im}^* \varphi_m^{*j} = 0 \quad \text{на } S, \quad \left( \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \\ j = 1, 2, \dots, m+1 \end{array} \right), \quad (18.1.4)$$

где  $\Sigma_m^j$  и  $\Sigma_m^{j \rightarrow l}$  — пока произвольные величины;  $a_{im}^*$  — коэффициенты, определяемые формулами (14.2.18).

Для получения групповых констант  $\Sigma_m^j$  и  $\Sigma_m^{j \rightarrow l}$  поступим следующим образом. Умножим почленно уравнение (18.1.1) на  $(2m+1)\varphi_m^{*j}$ , а уравнение (18.1.3) — на  $(2m+1)\varphi_m$ . Вычтем полученные выражения одно из другого, а результат проинтегрируем по объему реактора и по всему интервалу скоростей. Тогда, воспользовавшись тем, что функция  $\varphi_m^*(r, v)$  кусочно-постоянная на интервале скоростей, соответствующее выражение приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_j \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int d\mathbf{r} \left\{ \varphi_m^{*j} \left[ m \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial z} + (m+1) \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z} + (2m+1) \Sigma \varphi_m - \right. \right. \\ \left. \left. -(2m+1) \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) \right] - \varphi_m \left[ -m \frac{d\varphi_{m-1}^{*j}}{dz} - \right. \right. \\ \left. \left. -(m+1) \frac{d\varphi_{m+1}^{*j}}{dz} + (2m+1) \Sigma_m^j \varphi_m^{*j} - (2m+1) \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_m^{j \rightarrow l} \varphi_m^{*l} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (18.1.5)$$

Проинтегрировав по частям и используя граничные условия (18.1.2), соотношение (18.1.5) перепишем в виде

$$\sum_m (2m+1) \sum_j \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int d\mathbf{r} \left\{ (\Sigma - \Sigma_m^j) \varphi_m \varphi_m^{*j} - \right. \\ \left. - \left[ \varphi_m^{*j} \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) - \varphi_m \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_m^{*l} \varphi_m^{*l} \right] \right\} = 0. \quad (18.1.6)$$

Приняв во внимание, что

$$\sum_j \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m^{*j} \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) = \sum_l \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v)$$

и

$$\sum_j \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_m^{*l} \varphi_m^{*l} = \sum_j \varphi_m^{*j} \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_m^{*l} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m,$$

равенство (18.1.6) перепишем следующим образом:

$$\sum_m (2m+1) \sum_j \int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \left\{ \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma_m^j) \varphi_m - \right. \\ \left. - \left[ \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) - \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_m^{*l} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m \right] \right\} = 0. \quad (18.1.7)$$

Если теперь совершить тождественное преобразование

$$\int dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) = \sum_l \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v),$$

то окончательно будем иметь

$$\sum_m (2m+1) \sum_j \int d\mathbf{r} \left\{ \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma_m^j) \varphi_m - \right. \\ \left. - \varphi_m^{*j} \sum_l \left[ \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) - \Sigma_m^{*l} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m \right] \right\} = 0. \quad (18.1.8)$$

Равенство (18.1.8) будет удовлетворено, если

$$\left. \begin{aligned} \int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma_m^j) \varphi_m &= 0; \\ \int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \left[ \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m w_m(v' \rightarrow v) - \sum_m^{l \rightarrow j} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.1.9)$$

где интегрирование производится по фиксированным зонам реактора.

Соотношение (18.1.9) разрешим относительно величин  $\sum_m^{l \rightarrow j}$  и  $\Sigma_m^j$ . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_m^j &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_m}{\int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_m}; \\ \sum_m^{l \rightarrow j} &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' w_m(v' \rightarrow v) \varphi_m}{\int d\mathbf{r} \varphi_m^{*j} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_m}. \end{aligned} \right\} \quad (18.1.10)$$

Здесь индексы  $m, j, l$  изменяются в следующих пределах<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; \\ j &= 1, 2, \dots, m+1; \\ l &= 1, 2, \dots, m+1. \end{aligned} \right\} \quad (18.1.11)$$

После того как групповые константы получены, можно сформулировать многогрупповую систему основных и сопряженных уравнений реактора в  $P_n$ -приближении.

В самом деле, многогрупповая система сопряженных уравнений имеет вид (18.1.3) при условии (18.1.4). Система основных уравнений может быть получена с помощью системы уравнений, сопряженных обычными методами, так как основные уравнения будут сопряженными в смысле Лагранжа системе (18.1.3).

<sup>1)</sup>Здесь следует различать индекс сферической гармоники  $m$  и индекс номера на тепловой группы, также обозначенной через  $m$ .

В результате нетрудно прийти к основной системе уравнений реактора:

$$\frac{m}{2m+1} \frac{d\varphi_{m-1}^j}{dz} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{d\varphi_{m+1}^j}{dz} + \Sigma_m^j \varphi_m^j = \sum_l \overset{l \rightarrow j}{\Sigma_m} \varphi_m^l \quad (18.1.12)$$

при условии

$$\sum_{m=0}^n a_{im} \varphi_m^j = 0 \quad \text{на } S \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (18.1.13)$$

Многогрупповая система сопряженных уравнений реактора имеет вид (18.1.3), (18.1.4).

Выше был рассмотрен случай плоскопараллельной задачи. В других геометриях многогрупповая система уравнений реактора сохранит тот же вид, только

$$\nabla \mathbf{J}_m = m \frac{d\varphi_{m-1}^j}{dz} + (m+1) \frac{d\varphi_{m+1}^j}{dz}$$

необходимо заменить соответствующим выражением в рассматриваемой геометрии.

В результате приходим к следующим многогрупповым системам уравнений реактора. В случае сферической геометрии система основных уравнений реактора принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{m}{2m+1} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{m-1}^j}{r^{m-1}} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{1}{r^{m+2}} \frac{d}{dr} r^{m+2} \varphi_{m+1}^j + \\ + \Sigma_m^j \varphi_m^j = \sum_l \overset{l \rightarrow j}{\Sigma_m} \varphi_m^l \end{aligned} \quad (18.1.14)$$

при условии

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m^j = 0 \quad \text{на } S, \quad (18.1.15)$$

где  $a_{im}$  определяются соотношениями (14.1.11). Система сопряженных уравнений запишется следующим образом:



$$\begin{aligned}
& -\frac{m}{2m+1} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{m-1}^{*j}}{r^{m-1}} - \frac{m+1}{2m+1} \frac{1}{r^{m+2}} \frac{d}{dr} r^{m+2} \varphi_{m+1}^{*j} + \\
& + \Sigma_m^j \varphi_m^{*j} = \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_m^l \varphi_m^{*l} \quad (18.1.16)
\end{aligned}$$

при условии

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im}^* \varphi_m^{*j} = 0 \quad \text{на } S, \quad (18.1.17)$$

где  $a_{im}^*$  определяются так же, как и в формуле (14.2.20).

Многогрупповая система констант  $\Sigma_m^j$  и  $\Sigma_m^{l \rightarrow j}$  для областей со сферической симметрией снова определяется формулами (18.1.10).

Наконец, в случае одномерной цилиндрической геометрии система основных уравнений реактора принимает вид:

при  $m = 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{n+1,1}^j - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{n-1,1}^j + (2n+1) \Sigma_n^j \varphi_{n0}^j = \\
& = (2n+1) \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_{n,0}^l \varphi_{n,0}^l; \quad (18.1.18)
\end{aligned}$$

при  $m \geq 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{(n+m)!}{(m+n-2)!} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n-1,m+1}^j}{r^{m-1}} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n+1,m-1}^j}{r^{m-1}} + \\
& + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{d}{dr} r^{m+1} \varphi_{n+1,m+1}^j - \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{d}{dr} r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1}^j + \\
& + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma_{nm}^j \varphi_{nm}^j = 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_{n,m}^l \varphi_{n,m}^l \quad (18.1.19)
\end{aligned}$$

при условии, что

$$\sum_{n,m} a_{n,m}^{k,l} \varphi_{n,m}^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.1.20)$$

Многогрупповая система сопряженных уравнений запишется следующим образом:

при  $m = 0$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{n+1,1}^{*j} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{n-1,1}^{*j} + (2n+1) \Sigma_n^j \varphi_{n,0}^j = \\
& = (2n+1) \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_{n,0} \varphi_n^{*l}; \quad (18.1.21)
\end{aligned}$$

при  $m \geq 0$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n-1,m-1}^{*j}}{r^{m-1}} + \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} r^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n+1,m-1}^{*j}}{r^{m-1}} - \\
& -\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{d}{dr} r^{m+1} \varphi_{n+1,m-1}^{*j} + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{d}{dr} r^{m+1} \varphi_{n-1,m+1}^{*j} + \\
& + 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Sigma_{n,m}^j \varphi_{n,m}^{*j} = 2(2n+1) \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_{n,m} \varphi_{n,m}^{*l} \quad (18.1.22)
\end{aligned}$$

при условии, что

$$\sum_{n,m} a_{n,m}^{*k,l} \varphi_{n,m}^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.1.23)$$

Многогрупповая система констант  $\Sigma_{n,m}^j$  и  $\Sigma_{n,m}^{l \rightarrow j}$  определяется следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned}
\Sigma_{n,m}^j &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_{n,m}^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi_{n,m}}{\int d\mathbf{r} \varphi_{n,m}^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi_{n,m}}; \\
\Sigma_{n,m}^{l \rightarrow j} &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_{n,m}^{*j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' w_m(v' \rightarrow v) \varphi_{n,m}}{\int d\mathbf{r} \varphi_{n,m}^{*j} \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi_{n,m}}.
\end{aligned} \right\} \quad (18.1.24)$$

## 18.2. Приведение уравнений реактора к виду, удобному для расчетов

Рассмотрим систему основных уравнений реактора в  $P_n$ -приближении для областей плоскопараллельной геометрии (18.1.12).

Тогда

$$\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^j}{dz} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^j}{dz} + \Sigma_n^j \varphi_n^j = \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_n^l \varphi_n^l \quad (18.2.1)$$

при граничных условиях (18.1.13)

$$\sum_n a_{in} \varphi_n^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.2.2)$$

Здесь ради удобства мы перешли от индекса  $m$  к  $n$ .

Систему многогрупповых уравнений (18.2.1) удобно записать в следующем виде:

$$\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^j}{dz} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^j}{dz} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^j = \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{ns}^{l \rightarrow j} \varphi_n^l + \delta_{n0} \chi^j Q(z), \quad (18.2.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{n,y}^j &= \Sigma_n^j - \Sigma_{ns}^{j \rightarrow j}; \\ Q(z) &= \sum_{j=1}^m \nu_f^j \Sigma_f^j \varphi_0^j; \end{aligned} \right\} \quad (18.2.4)$$

$\chi^j$  — спектр деления с нормировкой

$$\sum_{j=1}^m \chi^j = 1; \quad (18.2.5)$$

$\delta_{n0}$  — символ Кронекера.

Решение системы уравнений реактора (18.2.3) вместе с граничными условиями (18.2.2) ищется с помощью метода последовательных приближений, который формулируется следующим образом. Задаемся «начальным» распределением функции числа вторичных нейтронов  $Q(z)$ , затем, последовательно решая систему уравнений для каждой группы, по второй из формул (18.2.4) находим новое приближенное значение для  $Q(z)$  и т. д. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока отношение последующего приближенного значения функции  $Q^{(k)}(z)$  к предыдущему  $Q^{(k-1)}(z)$  не окажется величиной, не зависящей от  $z$ . Полученная таким образом величина будет эффективным коэффициентом размножения реактора  $K$ . Таким образом,

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(z)}{Q^{(k-1)}(z)}. \quad (18.2.6)$$

С учетом сформулированного метода последовательно-го приближения решение многогрупповой системы основных уравнений реактора существенно упрощается и сводится к последовательному решению систем односкоростных уравнений

$$\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^j}{dz} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^j}{dz} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^j = f_n, \quad (18.2.7)$$

где

$$f_n^j = \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{ns}^{l \rightarrow j} \varphi_n^l + \delta_{n0} \chi^j Q(z) \quad (18.2.8)$$

— заданная функция для данного итерационного шага.

Таким образом, многогрупповую задачу в  $P_n$ -приближении мы привели к последовательному решению одnogрупповых задач (18.2.7), (18.2.2), решение которых производится с помощью метода матричной факторизации, изложенной в главах 8 и 9.

Переходим к рассмотрению системы сопряженных уравнений реактора (18.1.3), которую запишем в виде

$$-\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^{*j}}{dz} - \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^{*j}}{dz} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^{*j} = \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_n^{*l} \varphi_n^{*l} \quad (18.2.9)$$

при условии (18.1.4)

$$\sum_n a_{in}^* \varphi_n^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.2.10)$$

Систему уравнений (18.2.9) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^{*j}}{dz} - \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^{*j}}{dz} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^{*j} = \\ = \sum_{l=j+1}^{m+1} \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} + \delta_{n0} \nu_f^j \Sigma_f^j Q^*(z), \end{aligned} \quad (18.2.11)$$

где

$$Q^*(z) = \sum_{j=1}^m \chi^j \varphi_0^{*j}, \quad (18.2.12)$$

а индексом  $m+1$  отмечена тепловая группа нейтронов. Обозначения других величин, используемых в (18.2.11) и (18.2.12), выбраны в соответствии с формулами (18.2.4), (18.2.5).

Решение многогрупповой системы уравнений реактора в  $P_n$ -приближении производится с помощью метода последова-

тельных приближений, который определяется следующим образом. Задается «начальное» приближение функции  $Q^*(z)$ , с помощью последовательного решения системы (18.2.11)  $j = m+1, m, m-1$  рассчитывается пространственно-энергетическое распределение ценности и составляется новое приближенное значение величины  $Q^*(z)$  по формуле (18.2.12). Метод последовательных приближений приводит нас к величине  $K$  по формуле

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{*(k)}(z)}{Q^{*(k-1)}(z)}. \quad (18.2.13)$$

Таким образом, в каждом шаге итерационного процесса многогрупповая задача сводится к последовательному решению одnogрупповых задач следующего вида:

$$-\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^{*j}}{dz} - \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^{*j}}{dz} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^{*j} = f_n^{*j}, \quad (18.2.14)$$

где

$$f_n^{*j} = \sum_{l=j+1}^{m+1} \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} + \delta_{n0} \nu_f^j Q^*(z) \quad (18.2.15)$$

при условии (18.2.10).

Сформулированная односкоростная задача также решается методом матричной факторизации. Заметим, что одnogрупповая задача (18.2.14), (18.2.10) формально приводится к задаче вида (18.2.7), (18.2.2) заменой  $z$  на  $-z$ .

Переходим к рассмотрению основных и сопряженных уравнений для сферически-симметричных реакторов. Не повторяя рассуждений, рассматриваемых выше, сформулируем окончательные результаты.

Системы основных уравнений запишем в следующем виде:

$$\frac{n}{2n+1} r^{n-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n-1}^j}{r^{n-1}} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \frac{d}{dr} r^{n+2} \varphi_{n+1}^j + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^j = f_n^j, \quad (18.2.16)$$

где

$$f_n^j = \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{ns}^{l \rightarrow j} \varphi_n^l + \delta_{n0} \chi^j Q(r). \quad (18.2.17)$$

К системе уравнений (18.2.16) присоединим граничные условия (18.1.13):

$$\sum_n a_{in} \varphi_n^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.2.18)$$

Аналогичным образом приходим к сопряженной задаче

$$-\frac{n}{2n+1} r^{n-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{n-1}^{*j}}{r^{n-1}} - \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \frac{d}{dr} r^{n+2} \varphi_{n+1}^{*j} + \Sigma_{ny}^j \varphi_n^{*j} = f_n^{*j}, \quad (18.2.19)$$

где

$$f_n^{*j} = \sum_{l=j+1}^{m+1} \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} + \nu_f^j \Sigma_f^j Q^*(r). \quad (18.2.20)$$

К системе уравнений (18.2.19) присоединим граничные условия (18.1.17):

$$\sum_n a_{in}^* \varphi_n^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.2.21)$$

Аналогичным образом могут быть записаны системы основных и сопряженных уравнений для одномерных цилиндрических реакторов.

В заключение отметим, что учет резонансных эффектов в рамках многогруппового метода осуществляется аналогично тому, как это выполнено в случае  $P_1$ -приближения (см. § 16.6).

### 18.3. $P_2$ -приближение

При расчетах критических масс и спектра нейтронов в ядерных реакторах большое применение получило  $P_2$ -приближение, основные положения которого были рассмотрены в главе 5 (см. § 5.4). Важным достоинством этого метода является то, что он позволяет относительно правильно описать поток нейтронов на больших расстояниях от активной зоны. Это имеет существенное значение для расчета захватного  $\gamma$ -излучения в реакторе, а также для расчета защиты от нейтронного излучения.

Многогрупповую систему основных уравнений в  $P_2$ -приближении сформулируем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1^j}{dz} + \Sigma_{0y}^j \varphi_0^j &= f_0^j; \\ \frac{1}{3} \frac{d\varphi_0^j}{dz} + \frac{2}{3} \frac{d\varphi_2^j}{dz} + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= f_1^j; \\ \frac{2}{5} \frac{d\varphi_1^j}{dz} + \Sigma_{2y}^j \varphi_2^j &= f_2^j, \end{aligned} \right\} \quad (18.3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_n^j &= \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{ns}^j \varphi_n^l + \delta_{n0} \chi^j Q(z); \\ Q(z) &= \sum_{j=1}^{m+1} \nu_f^j \Sigma_f^j \varphi_0^j. \end{aligned} \right\} \quad (18.3.2)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_0^j = \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j} \right) \varphi_0^j + \frac{2}{5 \Sigma_{2y}^j} (5 f_2^j - 2 f_0^j). \quad (18.3.3)$$

Тогда, исключив функции  $\varphi_0^j$  из системы уравнений (18.3.1), придем к новой системе уравнений в  $P_2$ -приближении:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1^j}{dz} + \frac{\Sigma_{0y}^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}} \Phi_0^j &= \frac{f_0^j + 2 \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j} f_2^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}; \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^j}{dz} + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= f_1^j. \end{aligned} \right\} \quad (18.3.4)$$

Если учесть, что

$$\Phi_0^j = \varphi_0^j + 2\varphi_2^j,$$

то, согласно анализу в главе 5, необходимо предположить непрерывность функций  $\Phi_0^j(z)$  и  $\varphi_1^j(z)$  во всем объеме реактора. При этом считается, что функция  $\varphi_0^j(z)$  допускает разрывы непрерывности при переходе из одной зоны реактора в другую. Величину  $\varphi_0^j$ , необходимую для расчета  $f_0^j$ , найдем из формулы (18.3.3):

$$\varphi_0^j = \frac{\Phi_0^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}} - \frac{2}{5\Sigma_{2y}^j} \frac{5f_2^j - 2f_0^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}, \quad (18.3.5)$$

а величину  $\varphi_2^j$ , необходимую для расчета  $f_2^j$ , — из третьего уравнения системы (18.3.1):

$$\varphi_2^j = \frac{1}{\Sigma_{2y}^j} \left( f_2^j - \frac{2}{5} \frac{d\varphi_1^j}{dz} \right).$$

Исключив из полученного соотношения производную  $\frac{d\varphi_1^j}{dz}$  с помощью первого уравнения системы (18.3.1), окончательно получим

$$\varphi_2^j = \frac{1}{\Sigma_{2y}^j} \left( f_2^j - \frac{2}{5} f_0^j + \frac{2}{5} \Sigma_{0y}^j \varphi_0^j \right). \quad (18.3.6)$$

Указанный алгоритм распространим на другие геометрии следующим образом.

Запишем систему уравнений (18.3.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \frac{\Sigma_{0y}^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}} \Phi_0^j &= \frac{f_0^j + 2 \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j} f_2^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= f_1^j, \end{aligned} \right\} \quad (18.3.7)$$

где связь функций  $\Phi_0^j$  с  $\varphi_0^j$  и  $\varphi_2^j$  устанавливается соотношениями (18.3.5), (18.3.6).

Система уравнений (18.3.7) может быть записана в виде, формально совпадающим с системой многогрупповых уравнений в  $P_1$ -приближении:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + (\Sigma_{0y}^j)^{\text{эфф}} \Phi_0^j &= (f_0^j)^{\text{эфф}}; \\ \frac{1}{3} \nabla \Phi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= f_1^j, \end{aligned} \right\} \quad (18.3.8)$$



где

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma_{0y}^j)^{\text{эфф}} &= \frac{\Sigma_{0y}^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}; \\ (f_0^j)^{\text{эфф}} &= \frac{f_0^j + 2 \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j} f_2^j}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.3.9)$$

В системе уравнений (18.3.8) присоединим следующие граничные условия:

$$2(\varphi_1^j)_n - \kappa^j \Phi_0^j = 0 \quad \text{на } S, \quad (18.3.10)$$

где

$$\kappa^j = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{0y}^j}{\Sigma_{2y}^j}}.$$

## 18.4. Эффективные методы расчета многогрупповых констант

В § 18.1 были получены формулы для расчета многогрупповой системы констант в виде (18.1.10). Если от переменной  $v$  перейти к летаргии  $u$ , то система констант (18.1.10) может быть определена следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n^j &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_n^{*j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma_n \varphi_n}{\int d\mathbf{r} \varphi_n^{*j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi_n}; \\ \Sigma_n^{l \rightarrow j} &= \frac{\int d\mathbf{r} \varphi_n^{*j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_{u_{l-1}}^{u_l} du' w_n(u' \rightarrow u) \varphi_n}{\int d\mathbf{r} \varphi_n^{*j} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du' \varphi_n}, \end{aligned} \right\} \quad (18.4.1)$$

где интегрирование по  $\mathbf{r}$  производится в пределах фиксированной зоны реактора.

Если в пределах данной зоны реактора функции  $\varphi_n^{*j}$  изменяются слабо, то формулы (18.4.1) можно упростить, приняв всюду

$$\varphi_n^{*j} = 1. \quad (18.4.2)$$

Это предположение будет выполняться тем лучше, чем на большее количество расчетных зон разбивается реактор.

Обратим внимание на следующий факт. Формулы (18.4.1) для  $n = 0$  и  $n = 1$  переходят в соответствующие формулы для  $P_1$ -приближения. Это значит, что появляется возможность использования в расчетах констант, предварительно найденных в рамках диффузионного или  $P_1$ -приближения.

Итак, если предположить, что

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n^j &= 0; \\ \Sigma_n^{l \rightarrow j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (18.4.3)$$

то для расчета реактора в  $P_n$ -приближении достаточно знать многогрупповую систему констант в  $P_1$ -приближении.

Если предположение (18.4.3) не является удовлетворительным, то приближенные значения для величин  $\Sigma_n^j$  и  $\Sigma_n^{l \rightarrow j}$  можно получить с помощью формул (18.4.1) в предположении, что  $\varphi_n = 1$ , то есть

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n^j &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \Sigma_n du}{\Delta u_j}; \\ \Sigma_n^{l \rightarrow j} &= \frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_{u_{l-1}}^{u_l} du' w_n(u' \rightarrow u)}{\Delta u_l}. \end{aligned} \right\} \quad (18.4.4)$$

Для получения более точных значений групповых констант можно воспользоваться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n^j &= \frac{\int d\mathbf{r} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \Sigma_n \varphi_0}{\int d\mathbf{r} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \varphi_0}; \\ \Sigma_n^{l \rightarrow j} &= \frac{\int d\mathbf{r} \int_{u_{j-1}}^{u_j} du \int_{u_{l-1}}^{u_l} du' w_n(u' \rightarrow u) \varphi_0}{\int d\mathbf{r} \int_{u_{l-1}}^{u_l} du' \varphi_0}, \\ &(n = 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (18.4.5)$$

Если количество групп велико, то различные способы усреднения дают примерно одинаковые значения для групповых констант.

В заключение отметим, что для расчета спектра нейтронов с летаргией  $u < u$  в большинстве случаев достаточно знать физические константы только при  $n = 0, 1$ , полагая при  $n \geq 2$   $\Sigma_n^j \approx \Sigma_0^j$ ,  $\Sigma_n^{l \rightarrow j} = 0$ .

## 18.5. Теория возмущений

При расчетах критических масс реакторов в  $P_n$ -приближении появляется необходимость в оценке малых эффектов, не поддающихся непосредственному расчету. Оценить такие эффекты можно с помощью теории малых возмущений, развив ее в рамках метода сферических гармоник. Для получения формул

теории возмущений рассмотрим систему основных уравнений реактора. Ради простоты вывод формул теории возмущений проиллюстрируем на задачах с плоскопараллельной геометрией.

Итак, рассмотрим систему основных уравнений

$$\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^j}{dz} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^j}{dz} + \Sigma_n^j \varphi_n^j - \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_n^l \varphi_n^l = 0 \quad (18.5.1)$$

при условии

$$\sum_n a_{in} \varphi_n^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.5.2)$$

Задачу (18.5.1), (18.5.2) будем называть невозмущенной.

Введем в рассмотрение возмущенную систему сопряженных уравнений реактора, которая отличается от невозмущенной системы (18.1.3) тем, что групповые константы  $\Sigma_n^j$  и  $\Sigma_n^{j \rightarrow l}$  в ней заменены соответственно  $\Sigma_n^{'j} = \Sigma_n^j + \delta \Sigma_n^j$  и  $\Sigma_n^{'l \rightarrow j} = \Sigma_n^{l \rightarrow j} + \delta \Sigma_n^{l \rightarrow j}$ . Эта система запишется следующим образом:

$$-\frac{n}{2n+1} \frac{d\varphi_{n-1}^{*j}}{dz} - \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\varphi_{n+1}^{*j}}{dz} + \Sigma_n^{'j} \varphi_n^{*j} - \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_n^{'l} \varphi_n^{*l} = 0 \quad (18.5.3)$$

при условии

$$\sum_n a_{in}^* \varphi_n^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (18.5.4)$$

Умножим уравнение (18.5.1) почленно на  $(2n+1)\varphi_n^{*j}$ , результат просуммируем по  $n, j$  и проинтегрируем по всему объему реактора. Тогда приходим к соотношению

$$\sum_n \sum_j \int dz \varphi_n^{*j} \left[ n \frac{d\varphi_{n-1}^j}{dz} + (n+1) \frac{d\varphi_{n+1}^j}{dz} + (2n+1) \Sigma_n^j \varphi_n^j - (2n+1) \sum_l^{l \rightarrow j} \Sigma_n^l \varphi_n^l \right] = 0. \quad (18.5.5)$$

Далее умножим уравнение (18.5.3) на  $(2n+1)\varphi_n^j$ , результат просуммируем по  $n, j$  и проинтегрируем по всему объему реактора. Тогда получим

$$\sum_n \sum_j \int dz \varphi_n^j \left[ -n \frac{d\varphi_{n-1}^{*j}}{dz} - (n+1) \frac{d\varphi_{n+1}^{*j}}{dz} + \right. \\ \left. + (2n+1) \Sigma_n^j \varphi_n^{*j} - (2n+1) \sum_l^{j \rightarrow l} \Sigma_n^l \varphi_n^{*l} \right] = 0. \quad (18.5.6)$$

Вычтем из соотношения (18.5.5) соотношение (18.5.6) и воспользуемся свойством сопряженности дифференциальных операторов и граничными условиями (18.5.2), (18.5.4). Тогда после интегрирования по частям и перемены индексов суммирования по  $l, j$  приходим к соотношению

$$\sum_n (2n+1) \sum_j \int dz \left( \delta \Sigma_n^j \varphi_n^j \varphi_n^{*j} - \varphi_n^j \sum_l \delta \Sigma_n^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} \right) = 0. \quad (18.5.7)$$

Учитывая, что имеет место равенство

$$\Sigma_n^{j \rightarrow l} = \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} + \nu_f^j \Sigma_f^j \chi^l \delta_{n0},$$

и вводя формальный параметр  $\lambda = \frac{1}{K_{эфф}}$  так, что

$$\Sigma_n^{j \rightarrow l} = \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} + \lambda \nu_f^j \Sigma_f^j \chi^l \delta_{n0}$$

соотношение (18.5.7) запишется в следующем виде:

$$\sum_n (2n+1) \sum_j \int dz \left( \delta \Sigma_n^j \varphi_n^j \varphi_n^{*j} - \varphi_n^j \sum_l \delta \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} \right) + \\ + \sum_j \int dz \delta (\lambda \nu_f^j \Sigma_f^j) \varphi_0^j \sum_l \chi^l \varphi_n^{*l} = 0. \quad (18.5.8)$$

Рассмотрим выражение

$$\delta (\lambda \nu_f^j \Sigma_f^j) = \lambda' (\nu_f^j \Sigma_f^j)' - \lambda \nu_f^j \Sigma_f^j$$

и представим его в виде

$$\delta (\lambda \nu_f^j \Sigma_f^j) = \delta \lambda (\nu_f^j \Sigma_f^j)' + \lambda \delta (\nu_f^j \Sigma_f^j). \quad (18.5.9)$$

С учетом равенства (18.5.9) соотношение (18.5.8) примет вид

$$\sum_n (2n+1) \sum_j \int dz \left( \delta \Sigma_n^j \varphi_n^j \varphi_n^{*j} - \varphi_n^j \sum_l \delta \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} \right) + \\ + \sum_j \int dz \left[ \delta \lambda (\nu_f^j \Sigma_f^j)' + \lambda \delta (\nu_f^j \Sigma_f^j) \right] \varphi_n^j Q^{*'}(z) = 0, \quad (18.5.10)$$

где

$$Q^{*'}(z) = \sum_l \chi^l \varphi_0^{*l}(z). \quad (18.5.11)$$

Разрешая соотношение (18.5.10) относительно  $\delta \lambda$ , приходим к формуле теории возмущений:

$$\delta \lambda = - \frac{1}{\int dz Q Q^{*'}} \sum_j \int dz \left[ \sum_n \left( \delta \Sigma_n^j \varphi_n^j \varphi_n^{*j} - \varphi_n^j \sum_l \delta \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} \right) + \right. \\ \left. + \lambda \delta (\nu_f^j \Sigma_f^j) \varphi_n^j Q^{*'}(z) \right], \quad (18.5.12)$$

где

$$Q' = \sum_j (\nu_f^j \Sigma_f^j)' \varphi_0^j. \quad (18.5.13)$$

Если в формуле (18.5.12)  $\varphi_n^{*j}$  заменить  $\varphi_n^j$  и в формуле (18.5.13)  $(\nu_f^j \Sigma_f^j)'$  на  $\nu_f^j \Sigma_f^j$ , то мы придем к формуле малых возмущений.

Аналогичным образом могут быть получены формулы теории возмущений для других геометрий. Мы ограничимся записью формулы малых возмущений для сферически-симметричных систем, учитывая их практическое значение в расчетах. Соответствующая формула имеет вид

$$\delta \lambda = - \frac{1}{\int dz Q Q^*} \times \\ \times \int dr \left[ \sum_j \sum_n \left( \delta \Sigma_n^j \varphi_n^j \varphi_n^{*j} - \varphi_n^j \sum_l \delta \Sigma_{ns}^{j \rightarrow l} \varphi_n^{*l} \right) - \lambda \delta Q Q^* \right], \quad (18.5.14)$$

где

$$\delta Q = \sum_j \delta (\nu_f^j \Sigma_f^j) \varphi_n^j. \quad (18.5.15)$$

Если в формуле (18.5.14) положить  $dr = dz$ , то она перейдет в формулу теории малых возмущений для плоскопараллельной геометрии.

# 19

## Проекционно-сеточный метод и $P_{NI}$ -уравнения

### 19.1. Формулировка задачи переноса и некоторые обозначения

Некоторые математические методы решений односкоростных задач переноса будут рассмотрены в последующих главах. Введем новые обозначения. Некоторые из них стали привычными в математической литературе, а другие удобны для математических преобразований. Пусть  $R_3(x_1, x_2, x_3)$  — трехмерное евклидово пространство;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — точка этого пространства с координатами  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\mathbf{r}$  — вектор, выходящий из начала координат в точку  $\mathbf{x}$  [иногда для координат точек пространства  $R_3$  будем пользоваться и другими обозначениями:  $(x, y, z)$ ]. Пусть  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  — единичный вектор;  $\sum_{i=1}^3 \Omega_i^2 = 1$ , а  $\Omega$  — поверхность единичной сферы в  $R_3$  с центром в начале координат. Тогда  $\Omega$  обозначает переменную точку  $\Omega$  со сферическими координатами  $\vartheta, \psi$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ):

$$\Omega_1 = \sin \vartheta \cos \psi; \Omega_2 = \sin \vartheta \sin \psi; \Omega_3 = \cos \vartheta.$$

Элемент поверхности сферы  $\Omega$  выразится формулой

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

Пусть  $\omega$  — вектор  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ;  $\omega \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i$ , а  $R_3 \times \Omega$  — декартово произведение пространств  $R_3$  и  $\Omega$ , состоящее из пар  $(\mathbf{x}, \Omega)$ , где  $\Omega$  пробегает  $\Omega$ , а  $\mathbf{x} \in R_3$ . Пусть  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  — функция, определенная на множестве  $D \times \Omega$ , где  $D$  — область в  $R_3$ , в которой будем рассматривать процесс переноса нейтронов. Предполагаем, что

$D$  — открытое ограниченное выпуклое множество в  $R_3$  и что начало координат  $R_3$  принадлежит  $D$ . Пусть  $\bar{D}$  — замыкание  $D$ ;  $\Gamma = \bar{D} \setminus D$  — граница  $D$ ;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ . Пусть в  $D$  и  $\Omega$  введены меры Лебега и соответствующие им процессы интегрирования, в частности,

$$S\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \Omega') d\Omega', \quad (19.1.1)$$

где

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \Omega') d\Omega' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\mathbf{x}, \psi', \vartheta') d\Omega'.$$

Под выражением  $\Omega \nabla \varphi$  будем понимать равенство

$$\Omega \nabla \varphi = \sum_1^3 \Omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

и обозначим  $\mu_0 = \Omega \Omega' = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \Omega'_i$ , где  $\Omega, \Omega' \in \Omega$ .

Пусть  $l(\mathbf{x})$  — измеримая, положительная и ограниченная в  $D$  функция, такая, что

$$0 < a_0 < \inf \text{vrai } l(\mathbf{x}) \leq l(\mathbf{x}) \leq \sup \text{vrai } l(\mathbf{x}) < \bar{a} < \infty,$$

а  $g(\mathbf{x}, \mu_0)$  — индикатриса рассеяния, для которой  $Sg = 1$ .

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$ , определенное в области  $D$ :

$$l(\mathbf{x}) \Omega \nabla \varphi + \varphi = c(\mathbf{x}) \bar{S} \varphi + f_1(\mathbf{x}, \Omega), \quad (19.1.2)$$

где

$$\bar{S} \varphi = S(g\varphi). \quad (19.1.3)$$

Пусть  $\Sigma = l^{-1}$ ;  $\Sigma_s = c/l$ ;  $f(\mathbf{x}, \Omega) = f_1(\mathbf{x}, \Omega)/l$ . Тогда (19.1.2) запишется в виде

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \Sigma_s \bar{S} \varphi + f(\mathbf{x}, \Omega). \quad (19.1.4)$$

Будем рассматривать кинетическое уравнение, заданное как формулой (19.1.2), так и формулой (19.1.4). Функцию  $f_1(\mathbf{x}, \Omega)$  предполагаем принадлежащей некоторому подпространству функций. Дополнительные требования на  $g$  и  $f_1$  наложим позже.

Краевые задачи для уравнения (19.1.2), соответствующие физическим задачам для реактора и ячеек, можно сформу-



лизовать следующим образом. Требуется найти в области  $D$  решение  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  уравнения (19.1.2), удовлетворяющее на границе  $\Gamma$  условиям

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega)|_{\Gamma} = \int_{n\Omega' > 0} R(\mathbf{x}, \Omega, \Omega') \varphi(\mathbf{x}, \Omega') d\Omega' + V \quad \text{при } n\Omega < 0, \quad (19.1.5)$$

где  $V$  — положительная функция, определенная на  $\Gamma$ . Функция  $R(\mathbf{x}, \Omega, \Omega')$  характеризует возврат в область  $D$  вылетающих из области нейтронов. Пусть однородная задача (19.1.2), (19.1.5) имеет только нулевое решение. Значение  $R \equiv 0$  соответствует случаю, когда извне в область  $D$  действует источник нейтронов  $V$ , а вылетающие из области  $D$  нейтроны не задерживаются границей  $\Gamma$ . Обычно краевое условие (19.1.5) рассматривают в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega)|_{\Gamma} = 0 \quad \text{при } n\Omega < 0. \quad (19.1.6)$$

При условии (19.1.6) в работах В. С. Владимирова [71, 76] решены такие вопросы, как существование, единственность, гладкость и непрерывная зависимость от функций  $l, c, g, f_1$  решений задачи (19.1.2), исследованы свойства собственных значений и функций однородной задачи. Ниже мы воспроизведем некоторые построения и результаты этих работ.

Зафиксируем некоторое направление  $\Omega \in \Omega$ ; обозначим  $\pi_{\Omega}$  ортогональную проекцию  $D$  на плоскость, перпендикулярную направлению  $\Omega$  и проходящую через фиксированную точку  $O$ . Пусть  $P$  обозначает переменную точку  $\pi_{\Omega}$ . Рассмотрим прямую  $P + \xi\Omega$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ) и обозначим  $\pi_{\Omega P}$  множество, получающееся от пересечения этой прямой с областью  $D$ ;  $\pi_{\Omega P}$  почти для всех точек  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_{\Omega}$  является открытым интервалом:

$$\pi_{\Omega P} = \{P + \xi\Omega : \zeta(\Omega, P) < \xi < \eta(\Omega, P)\}. \quad (19.1.7)$$

Для каждого  $\Omega$  эта формула дает разложение множества  $D$  на декартово произведение двумерного множества  $\pi_{\Omega}$  и одномерного множества  $\pi_{\Omega P} : D = \pi_{\Omega} \times \pi_{\Omega P}$ , выражающее взаимно однозначное преобразование точек  $\mathbf{x} \in D$  в точки  $(P, \xi)$  из  $\pi_{\Omega} \times \pi_{\Omega P}$  по формуле  $\mathbf{x} = P + \xi\Omega$ . Дифференциальное выражение левой части (19.1.2) может быть записано в точке  $(\mathbf{x}, \Omega) = (P, \Omega, \xi)$  в виде

$$A\varphi = l(\mathbf{x})\Omega\nabla\varphi + \varphi = l(P + \xi\Omega)\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(P + \xi\Omega, \Omega) + \varphi(P + \xi\Omega, \Omega). \quad (19.1.8)$$

Пусть

$$\Gamma_{-\Omega} = \{P + \zeta(P, \Omega)\Omega, P \in \pi_\Omega\}; \quad \Gamma_\Omega = \{P + \eta(P, \Omega)\Omega, P \in \pi_\Omega\}.$$

Рассмотрим краевую задачу (19.1.2), (19.1.6), тогда  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega) = 0$ , если  $(\mathbf{x}, \Omega) \in \Omega \times \Gamma_{-\Omega}$ .

Определим класс функций  $\tilde{D}_0$ , который будет областью задания оператора  $A$ , определенного формулой (19.1.8). К классу  $\tilde{D}_0$  отнесем функции  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$ , которые обладают следующими свойствами.

1. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  функция  $\varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$  абсолютно непрерывна на замкнутом множестве  $\bar{\pi}_{\Omega P}$ .

2. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  функция  $\varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям:  $\varphi(P + \xi\Omega, \Omega) = 0$ .

3.  $A\varphi \in \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H}$  — гильбертово пространство функций  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{D \times \Omega} l^{-1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \Omega')\psi(\mathbf{x}, \Omega')d\Omega' d\mathbf{x} \quad (19.1.9)$$

и нормой  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$ .

Из условий 1-3 следует, что почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  существует производная  $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(P + \xi\Omega, \Omega)$  (соответственно  $\Omega, \nabla\varphi$ ) почти всюду на  $\pi_{\Omega P}$  (соответственно на  $D \times \Omega$ ), что  $\tilde{D}_0 \subset \mathcal{H}$  и

$$\|\varphi\| \leq [1 - \exp(-a_0^{-1}d)]\|A\varphi\|,$$

где  $d$  — диаметр области  $D$ . Многоскоростные задачи с  $R \neq 0$  исследованы в работе Т. А. Гермогеновой [102].

Пусть операторы задачи (19.1.2), (19.1.5) таковы, что для достаточно гладких функций  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned}
& \|\varphi\|^2 - (c\bar{S}\varphi, \varphi) \geq C_0\|\varphi\|^2, \quad C_0 > 0; \\
& \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \left( \varphi^2 - \left( \int_{\Gamma_\Omega} R\varphi d\Omega' \right)^2 \right) d\Omega d\Gamma \geq 2C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \varphi^2 d\Omega d\Gamma; \\
& \|f_1\| < \infty; \quad \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} V^2 d\Omega d\Gamma < \infty; \\
& \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' \mathbf{n})^{-1} \left( \int_{\Gamma_\Omega} (\Omega \mathbf{n}) V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma < \infty,
\end{aligned} \right\} \quad (19.1.10)$$

где  $C_1 > 0$  при  $V \neq 0$  и  $C_1 \geq 0$  при  $V = 0$ , а  $\bar{\Gamma}_\Omega = \Omega \times \Gamma_\Omega$ ;  $R = (\mathbf{x}, \Omega, \Omega') = R(\mathbf{x}, -\Omega, -\Omega')$ ;  $V(\mathbf{x}, \Omega) = V(\mathbf{x}, -\Omega)$ .

Пусть  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  достаточно гладкое решение (19.1.2), (19.1.5); получим при условиях (19.1.10) априорную оценку для  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$ . Уравнение (19.1.2), умноженное на  $l^{-1}\varphi$ , проинтегрируем по  $D \times \Omega$ . Тогда, учитывая (19.1.5), пользуясь формулой интегрирования по частям и теоремой Фубини, получаем

$$\frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \left( \varphi^2 - \left( \int_{\Gamma_\Omega} R\varphi d\Omega' \right)^2 \right) d\Omega d\Gamma + \|\varphi\|^2 - (c\bar{S}\varphi, \varphi) = \quad (19.1.11)$$

$$= (\varphi, f_1) + \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} V^2 d\Omega d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \Omega') \int_{\Gamma_\Omega} \Omega \mathbf{n} V R d\Omega d\Omega' d\Gamma.$$

Левая часть (19.1.11) согласно (19.1.10) больше, чем

$$C_0\|\varphi\|^2 + C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \varphi^2 d\Omega d\Gamma.$$

Слагаемые в правой части (19.1.11) оценим сверху:

$$|(\varphi, f_1)| \leq \frac{C_0}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{1}{2} C_0 \|f_1\|^2,$$

а при  $V \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \Omega') \int_{\Gamma_\Omega} \Omega \mathbf{n} V R d\Omega d\Omega' d\Gamma &\leq \frac{C_1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \varphi^2 d\Omega d\Gamma + \\ &+ \frac{1}{2} C_1^{-1} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' \mathbf{n})^{-1} \left( \int_{\Gamma_\Omega} \Omega \mathbf{n} V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_0 \|\varphi\|^2 + C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} \varphi^2 d\Omega d\Gamma &\leq C_0^{-1} \|f_1\|^2 + \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega \mathbf{n} V^2 d\Omega d\Gamma + \\ &+ C_1^{-1} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' \mathbf{n})^{-1} \left( \int_{\Gamma_\Omega} \Omega \mathbf{n} V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma. \end{aligned}$$

Это и есть априорная оценка. Из нее следует единственность достаточно гладких решений задачи (19.1.2), (19.1.5). Для одномерных задач, а также для положительных функций  $\varphi, V, R$  требования (19.1.10) можно ослабить.

Пусть индикатриса рассеяния  $g(\mathbf{x}, \mu)$  представима в виде

$$g(\mathbf{x}, \mu) = \sum_{j=0}^N b_j(\mathbf{x}) \Theta_j(\mu_0), \quad (19.1.12)$$

где  $N$  — некоторое целое число;  $\Theta_j(\mu_0)$  — четные суммируемые на  $[-1, 1]$  функции, а  $b_j(\mathbf{x})$  — измеримые, ограниченные почти всюду на  $D$  функции. В этих условиях, используя прием В. С. Владимирова [41], можно перейти от уравнения (19.1.2) для функции  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  к другому уравнению для функции

$$u(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{\varphi(\mathbf{x}, \Omega) + \varphi(\mathbf{x}, -\Omega)}{2}. \quad (19.1.13)$$

Для этого, записывая (19.1.2) для функции  $\varphi(\mathbf{x}, -\Omega)$ , получаем уравнение

$$-l\Omega \nabla \varphi(\mathbf{x}, -\Omega) + \varphi(\mathbf{x}, -\Omega) = c\bar{S}\varphi + f_1(\mathbf{x}, -\Omega).$$

Складывая с (19.1.2) и вычитая его из (19.1.2), получаем два уравнения для функций  $u$  и  $v$ :

$$l\Omega\nabla v + u = c\bar{S}u + \frac{f_1(\mathbf{x}, \Omega) + f_1(\mathbf{x}, -\Omega)}{2}; \quad (19.1.14)$$

$$l\Omega\nabla u + v = \frac{f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega)}{2},$$

где

$$v = \frac{\varphi(\mathbf{x}, \Omega) - \varphi(\mathbf{x}, -\Omega)}{2}.$$

Исключая из этих уравнений  $v$ , приходим к уравнению

$$- [l\Omega\nabla]^2 u + u = c\bar{S}u + F(\mathbf{x}, \Omega), \quad (19.1.15)$$

где

$$F(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{f_1(\mathbf{x}, \Omega) + f_1(\mathbf{x}, -\Omega)}{2} - l\Omega\nabla \frac{f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega)}{2}$$

— четная относительно  $\Omega$  функция. По функции  $u$  — решению (19.1.15) — функция  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  — решение (19.1.2) — определяется формулой

$$\varphi = u - l\Omega\nabla u + \frac{f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega)}{2}. \quad (19.1.16)$$

Уравнение (19.1.15) будем изучать в фазовой области  $D \times \Omega$  фазового пространства  $R_3 \times \Omega$ , предполагая, что  $u$  принадлежит некоторому классу  $C$ , каждая функция которого удовлетворяет почти всюду на границе  $\Gamma \times \Omega$  краевому условию вида

$$Bu = \psi_1. \quad (19.1.17)$$

В частности, краевое условие (19.1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} u - l\Omega\nabla u = & \int_{\mathbf{n}\Omega' > 0} R(\mathbf{x}, \Omega, \Omega')(u - l\Omega'\nabla u) d\Omega' + \\ & + V - \frac{1}{2}(f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega, \Omega)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{n}\Omega' > 0} R(\mathbf{x}, \Omega, \Omega')(f_1(\mathbf{x}, \Omega') - f_1(\mathbf{x}, -\Omega')) d\Omega'. \end{aligned}$$

Краевую задачу (19.1.15), (19.1.17) по нахождению функции  $u(\mathbf{x}, \Omega)$  запишем в операторной форме

$$L_0 u = \bar{S}_0 u + F, \quad (19.1.18)$$

где операторы  $L_0 = -[l\Omega\nabla]^2 + I$ ,  $L = -[l\Omega\nabla]^2$ ,  $\bar{S}_0 = c\bar{S}$  считаем заданными на функциях класса  $C$ . Предполагается, что решение задачи (19.1.18) единственно и существует при любой функции  $F$  из некоторого заданного класса.

Так, если  $R = V = 0$ ,  $f_1(\mathbf{x}, -\Omega)$ , то область задания операторов задачи (19.1.18) при  $\|f_1\| < \infty$  определяется следующими условиями.

1. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_\Omega$  функции

$$u(P + \xi\Omega, \Omega), \quad l(P + \xi\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \xi\Omega, \Omega)$$

абсолютно непрерывны на замкнутом множестве  $\bar{\pi}_{\Omega P}$ .

2. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_\Omega$  функция  $u(P + \xi\Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(P + \xi\Omega, \Omega) &= l(P + \xi\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \xi\Omega, \Omega); \\ u(P + \eta\Omega, \Omega) &= -l(P + \eta\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \eta\Omega, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (19.1.19)$$

3.  $A_0 u \in \mathcal{H}$ , где  $A_0$  — дифференциальное выражение

$$A_0 u = -[\Omega l \nabla]^2 u + u.$$

Линейное множество функций, удовлетворяющее условиям 1–3, обозначим  $D_0$ . Краевые условия (19.1.19) для гладких границ запишем в виде

$$\text{sign}(\mathbf{n}\mathbf{t}) l \frac{\partial u(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial t} + u(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \Big|_{\Gamma \times \Omega} = 0, \quad (19.1.20)$$

где  $\partial/\partial t$  — дифференцирование как функции по направлению единичного вектора  $\mathbf{t}$ .

Множество функций  $D_0$  содержится в  $\mathcal{H}$ . Линейное дифференциальное выражение  $A_0$  вместе с областью задания  $D_0$  определяет в (19.1.18) линейный оператор  $L_0$ . Введем в  $D_0$  метрику:

$$[u, v] = (L_0 u, v) = \int_{\Gamma \times \Omega} |(\Omega, n)| u v d\Omega d\Gamma + (l\Omega \nabla u, l\Omega \nabla v) + (u, v); \quad (19.1.21)$$

$$[u]^2 = [u, u]. \quad (19.1.22)$$

Это пространство функций обозначим  $H_0$ . Очевидно, что  $\|u\| \leq [u]$ .

Краевую задачу (19.1.15), (19.1.20) можно записать в операторной форме:

$$L_0 u = \bar{S}_0 u + F, \quad u \in D_0. \quad (19.1.23)$$

Пусть

$$\|F\| < \infty; \quad (\bar{S}_0 + \varphi, \varphi) \geq 0; \quad |c| < 1. \quad (19.1.24)$$

Тогда функция  $u \in H_0$ , реализующая минимум функционала

$$G(v) = [v]^2 - (\bar{S}_0, v, v) - 2(v, F), \quad (19.1.25)$$

будет решением краевой задачи (19.1.23). При  $|c| < c_0 < 1$  найдутся две такие постоянные  $d_1, d_2 > 0$ , зависящие от  $c_0$ , что для любой функции  $u \in H_0$  будут выполнены неравенства

$$d_1[v]^2 \leq [v]^2 - (\bar{S}_0, v, v) \leq d_2[v]^2. \quad (19.1.26)$$

А. Дэвисом, С. Капланом [424, 459], Т. А. Гермогеновой [102], А. Басликом [415] были получены функционалы типа (19.1.25) и для общей индикатрисы рассеяния.

Если функция  $cg \neq 0$  и удовлетворяет условиям (19.1.12), (19.1.24), то оператор  $L_0^{-1}\bar{S}_0$  задачи (19.1.23) будет вполне непрерывным, положительным и самосопряженным в  $H_0$  и  $\|L_0^{-1}\bar{S}_0\| \leq \bar{\Theta}$ , где

$$\bar{\Theta} = \bar{g}(1 - \exp(-da_0^{-1})); \quad \|\bar{S}_0\| \leq \bar{g} = \sup_{x \in D} \text{vrai} |cS|g| |.$$

Множество характеристических чисел  $\lambda_k$  задачи

$$L_0 u = \lambda \bar{S}_0 u \quad (19.1.27)$$

бесконечно,  $\lambda_k > 0$ , и если  $u_k$  является собственной функцией, соответствующей значению  $\lambda_k$ , то  $(\bar{S}_0 u_k, u_j) = \delta_{kj}$  и система  $\bar{S}_0 u_k$  полна в области значений оператора  $\bar{S}_0$ .

Пусть  $u_0 = \bar{S}_0 u$ . Тогда уравнение (19.1.23) примет вид

$$u_0 = \bar{S}_0 L_0^{-1}(u_0 + F) \quad (19.1.28)$$

(это интегральное уравнение Пайерлса [486]), в котором оператор  $\bar{S}_0 L_0^{-1}$  является положительным вполне непрерывным оператором, симметризуемым слева оператором  $\bar{S}_0$ .

В работах В. С. Владимирова [71, 78], В. И. Агошкова [12, 401] изложенные результаты распространены на более общие пространства функций. Аналогичным исследованиям для многоскоростных уравнений переноса посвящены работы С. Б. Шихова [385–387] и Т. А. Гермогеновой [102, 103].

## **19.2. Формулировка проекционно-сеточного алгоритма на основе минимизации функционала**

В последние десятилетия проекционные методы получили качественно новое развитие, что обусловлено и успехами в теории аппроксимации, и имевшейся глубокой теоретической базой данных методов. Это привело к развитию теории и широкому практическому использованию новой формы проекционных методов — проекционно-сеточных (метод конечных элементов), которые можно рассмотреть как классические проекционные методы, но использующие базисные функции с финитными носителями. Проекционно-сеточные методы вобрали в себя лучшие черты проекционных (слабые требования на гладкость решения и исходных данных, необходимых для обоснования и исследования алгоритма; сохранение в приближенной задаче «хороших» свойств точной задачи — симметричности, положительной определенности аппроксимируемых операторов и т. п.; более точное описание интегральных характеристик решения и др.) и разностных методов (разреженность матриц, сравнительная простота решения систем алгебраических уравнений). Кроме того, использование локальных базисных функций позволило в большинстве случаев автоматизировать процесс приближенного решения задачи с помощью современных ЭВМ.

К настоящему времени имеется весьма обширная научная литература, посвященная различным вопросам теории и практики проекционно-сеточных методов. Библиографию можно найти в работах О. Зенкевича [524], Г. Стренга, Дж. Фикса [346], Л. А. Оганесяна, В. Я. Ривкинда, Л. А. Руховца [295], Г. И. Марчука и В. И. Агошкова [238]. Ряд работ по проекционно-сеточным методам посвящен использованию их для решения задач теории переноса (С. Юкаи [508], В. И. Лебедева [203],



П. Лесэна, П. Равьяра [466], М. Борисевича, Р. Станкевича [412], Г.И. Марчука, В.И. Агошкова [4, 237]), в которых отмечены многие трудности, специфические для задач теории переноса, обладающих рядом «неприятных» особенностей. Это прежде всего существенная многомерность таких задач.

Имеются значительные трудности, связанные с вопросами обоснования проекционно-сеточных методов к решению задач теории переноса и получения количественных оценок скоростей сходимости. Одной из трудностей следует признать и проблему аппроксимации границ и граничных условий. К известной проблеме аппроксимации геометрической границы области здесь добавляется задача отыскания и приближения «освещенных» и «теневых» частей границы, что вызвано зависимостью граничных условий от угловых переменных.

Отметим, наконец, что многие задачи теории переноса обладают несамосопряженными операторами, при этом часто в них возникает необходимость одновременного решения как прямой, так и сопряженной задач. Перечисленные (далеко не все) обстоятельства делают теорию и практическое использование проекционно-сеточных методов в задаче переноса нейтронов значительно более трудными, с одной стороны, но и привлекательными — с другой.

Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  со скалярным произведением (19.1.9) и задачу (19.1.23), где  $\bar{S}_0 = c(x)\bar{S}$ ;  $\bar{S}\varphi = \int_{\Omega} g(\mu_0)\varphi(x, \Omega')d\Omega'$ . Предполагается, что выполнены ограничения (19.1.24), в силу чего оператор задачи (19.1.23) будет симметричным и положительно определенным. Пусть  $H_0$  — энергетическое пространство, соответствующее оператору  $L_0$ . Скалярное произведение  $[u, v]$  и норма  $[u] = [u, u]^{1/2}$  определяются согласно (19.1.21), (19.1.22). При введенных ограничениях для любых  $u, v \in H_0$  выполнены соотношения (19.1.26) и

$$|[u, v] - (\bar{S}_0 u, v)| \leq d_2[u][v]. \quad (19.2.1)$$

Тогда, согласно теоремам функционального анализа, можно гарантировать, что задача о минимизации функционала  $G(v)$  (19.1.25) однозначно разрешима в  $H_0$ . Функция  $u \in H_0$ , реализу-

ющая минимум (19.1.25), является решением (вообще говоря, обобщенным) задачи (19.1.23).

Рассмотрим общую схему проекционно-сеточного алгоритма, основанного на отыскании приближенного минимума функционала (19.1.25).

Пусть для каждого значения параметра  $h$  (далее  $h$  обозначен параметр некоторой сетки, введенной в области определения рассматриваемых функций и состоящей из  $N$  узлов) в  $H_0$  задана последовательность элементов  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ ,  $N = N(h)$ , линейно-независимых при каждом фиксированном  $h$ . Обозначим  $H_0^h$  линейную оболочку функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$  и предположим, что последовательность подпространств  $\{H_0^{h_k}\}_{k=1}^N$ ,  $h_1 > h_2 > h > \dots > h_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  предельно плотна в  $H_0$ .

Поставим теперь задачу об отыскании минимального значения  $G(v)$  на подпространстве  $H_0^h$ . Функция  $u^h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i^h$ , реализующая этот минимум  $G(v)$  на  $H_0^h$ ,

$$G(u^h) = \inf_{v^h \in H_0^h} G(v^h) = \inf G(b_1, \dots, b_N), \quad v^h = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i^h \in H_0^h, \quad (19.2.2)$$

принимается за приближенное решение исходной задачи (19.1.23). Как известно, задача (19.1.30) приводит к системе линейных уравнений вида

$$[u^h, \varphi_i^h] - (\bar{S}_0 u^h, \varphi_i^h) = (F, \varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, N, \quad (19.2.3)$$

которая в силу (19.1.26) имеет единственное решение. С помощью простых вычислений и с учетом плотности  $\{H_0^h\}$  в  $H_0$  можно показать, что приближенные решения  $u^h$ , определяемые из (19.1.3), сходятся к точному решению в пространстве  $H_0$ . При этом справедлива оценка погрешности

$$[u - u^h] \leq C\varepsilon(u, h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (19.2.4)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $h$  и  $u$ , а ошибка аппроксимации  $\varepsilon(u, h)$  определяется как  $\varepsilon(u, h) = \inf_{v^h \in H_0^h} [u - v^h]$ . Если конкретизировать свойства гладкости, выбор базисных функций  $\{\varphi_i^h\}$ , значение параметра  $h$ , то можно дать оценку для  $\varepsilon$  вида  $O(h^\gamma)$ , где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная.

Поскольку условия (19.1.20) являются естественными, то функции  $\varphi_i^h$  можно выбирать не удовлетворяющими им. Это обстоятельство значительно облегчает выбор и построение базисных функций.

Рассмотрим теперь некоторые способы построения  $\{\varphi_i^h\}$ . Прежде всего выделим четыре общих направления, которые в настоящее время часто используются на практике. Эти направления определяются выбором зависимости  $\varphi_i^h$  от переменных  $(x, \Omega)$ . К первому из них отнесем случаи, когда все  $\varphi_i^h$  зависят от  $x$  и  $\Omega$ . Система уравнений (19.2.4) будет тогда линейной алгебраической системой для отыскания неизвестных постоянных  $\{a_i\}_{i=1}^N$ .

Ко второму направлению относятся алгоритмы, в которых базисные функции  $\{\varphi_i^h\}$  зависят лишь от пространственных переменных  $\varphi_i^h = \varphi_i^h(x)$ . В этом случае метод приближенного решения, рассмотренный выше, будет фактически методом Л. В. Канторовича [155], и неизвестные  $a_i$  будут уже неизвестными функциями от  $\Omega$ . Задача о минимизации (19.1.25) приводит к решению системы интегральных уравнений типа (19.2.3), которую запишем в виде

$$\langle u^h, \varphi_i^h \rangle_1 - \langle \bar{S}_0 u^h, \varphi_i^h \rangle_0 = \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (19.2.4)$$

где

$$u^h(x, \Omega) = \sum_{i=1}^N a_i(\Omega) \varphi_i^h(x); \quad (19.2.6)$$

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_D dx l^{-1}(x) u(x, \Omega) v(x, \Omega);$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_1 = & \int_{\Gamma} d\Gamma |(\Omega n)| u(x, \Omega) v(x, \Omega) + \\ & + \langle l \Omega \nabla u, l \Omega \nabla v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_0. \end{aligned} \quad (19.2.7)$$

Систему (19.2.5) достаточно просто решить, например, методом квадратур, который изложен во многих монографиях (Л. В. Канторовича, В. И. Крылова [156], М. К. Гавурина [83]). При вырожденной индикатрисе рассеяния (19.2.5) сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений [отметим,

что для  $u^h$  из (19.1.5) остается справедливой оценка (19.2.4)]. В третьем направлении базисные функции зависят только от угловых переменных. В этом случае задача минимизации сводится к некоторой краевой задаче в  $D$  для систем (эллиптических) дифференциальных уравнений в частных производных ( $P_{NI}$ -уравнений).

В четвертом направлении на основе финитных функций строятся истокообразные функции, которые затем используются в качестве базисных (см. § 19.7).

Приведем теперь некоторые способы задания функций  $\varphi_i^h$ , которые выбираются так, чтобы их носитель был финитным и в значительной степени меньшим по сравнению с размерами области (это является одной из особенностей проекционно-сеточных методов). Остановимся на наиболее популярных случаях задания  $\varphi_i^h$ , когда  $\varphi_i^h$  является кусочно-линейными или кусочно-полилинейными функциями своих аргументов.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть  $\Pi = [a, b]$  — замкнутый интервал по некоторой переменной  $r$ . Введем на  $\Pi$  сетку  $a = r_0 < r_1 < \dots < r_N = b$ ;  $r_{-1} \equiv a - h$ ;  $r_{N+1} \equiv b + h$ ;  $h_i = r_i - r_{i-1}$ ;  $h = [b - a]/N$ ;  $c_0 h \leq h_i \leq c_1 h$ ;  $c_0, c_1 = \text{const}$  и следующие «функции-домики»:

$$\varphi_i^h(r) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{h_i}, & r \in (r_{i-1}, r_i); \\ \frac{r_{i+1} - r}{h_{i+1}}, & r \in (r_i, r_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N; \\ 0, & r \notin (r_{i-1}, r_{i+1}). \end{cases} \quad (19.2.8)$$

Функции  $\varphi_i^h(r)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , являются линейно-независимыми, и линейная их оболочка представляет собой подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ .

Пусть теперь  $\Pi$  есть параллелепипед в  $m$ -мерном евклидовом пространстве:  $\Pi = \{a_j \leq r_j \leq b_j\}$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ . Определим кусочно-полиномиальные функции  $\varphi_i^h(\bar{r})$ . Для этого разобьем  $\Pi$  на подобласти сеткой:

$$a_k = r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,N_R} = b_k; \quad h_{k,i} = r_{k,i} - r_{k,i-1};$$

$$k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad h = \max_{k,i} h_{k,i},$$

$$c_0 h \leq h_{k,i} \leq c_1 h \quad \forall k, i, \quad c_0, c_1 = \text{const.}$$

Каждому узлу сетки  $r^-_i = (r_{1,i_1}, \dots, r_{m,i_m})$ ,  $i = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $0 \leq i_k \leq N_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , поставим в соответствие функцию

$$\varphi_i^h(\bar{r}) = \prod_{k=1}^m \varphi_k^h(r_k) \equiv \varphi_{i_1}^h(r_1) \times \dots \times \varphi_{i_m}^h(r_m), \quad (19.2.9)$$

где  $\varphi_{i_k}^h(r_k)$  определяется по формуле (19.2.8) при замене  $r$  на  $r_k$ ,  $i$  на  $i_k$ . Очевидно, что функции (19.2.9) для каждой фиксированной сетки линейно-независимы и их линейные комбинации образуют подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ .

Рассмотрим кусочно-линейные базисные функции. Ради определенности и упрощения изложения остановимся на двумерном случае, когда  $\bar{r} = (x, y)$ ,  $m = 2$ . Пусть  $\Pi$  многоугольная область (рис. 12). Разобьем ее на треугольники  $\{\Pi_i\}$  таким образом, чтобы: 1) каждая пара треугольников из разбиения пересекалась лишь в одной общей вершине, или по общей стороне, или вообще не пересекалась; 2) объединение их давало бы  $\Pi$ . Множество вершин (точек разбиения) обозначим  $(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)$ , где  $\bar{r}_i = (x_i, y_i)$ . Обозначим  $h$  наибольшую из сторон треугольников и предположим, что  $h \leq Ch$ , где  $h$  — наименьшая из сторон треугольников;  $C$  — некоторая постоянная, общая для всех  $\{\Pi_i\}$ , а углы всех треугольников ограничены снизу равномерно по  $N$ .

Следовательно, можно принять

$$\begin{aligned} \varphi_i^h(\bar{r}) = \frac{1}{h} & \left[ 1 - \frac{(y_{0,i} - y_{2,i})}{(y_{1,i} - y_{2,i})} - \frac{(x_{0,i} - x_{1,i})}{(x_{2,i} - x_{1,i})} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{(y - y_{2,i})}{(y_{1,i} - y_{2,i})} - \frac{(x - x_{1,i})}{(x_{2,i} - x_{1,i})} \right] \end{aligned} \quad (19.2.10)$$

на  $\Pi_i$ , где  $\bar{r}_i = (x_{0,i}, y_{0,i})$ . Вид функции  $\varphi(\bar{r})$  показан на рисунке 13. Множество функций вида  $v^j(\bar{r}) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i^h(\bar{r})$  образуют подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset (C(\Pi) \cap W_2^1(\Pi))$ .

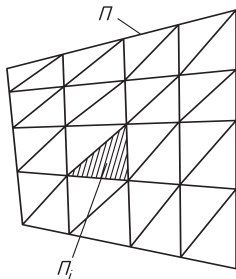


Рис. 12. Пример триангуляции области

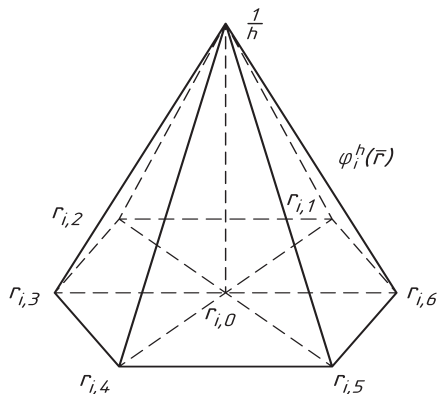


Рис. 13. Кусочно-линейная базисная функция

Для всех рассмотренных здесь подпространств  $W_2^{1,h}$  справедливо следующее свойство аппроксимации (Г. Стренг, Дж. Фикс [346], Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд, Л. А. Руховец [295], Р. Варга [65]): если  $v(\bar{r}) \in W_2^p(\Pi)$ ,  $p = 1, 2$ , то существует такая функция  $v^h(\bar{r}) \in W_2^{1,h}(\Pi)$ , что

$$\|v - v^h\|_{W_2^k(\Pi)} \leq O(h^{p-k}) \|v\|_{W_2^p(\Pi)}, \quad p = 1, 2, \quad k = 0, 1. \quad (19.2.11)$$

Пусть теперь область задания функций  $v^h(\bar{r})$  является  $m$ -мерной областью  $\Pi_0$  с криволинейной границей. Построение пространств аппроксимирующих функций можно провести следующим образом. Заключим  $\Pi_0$  в прямоугольную или многоугольную область  $\Pi$ :  $\Pi_0 \subset \Pi$  и уже известным образом построим пространство  $W_2^{1,h}(\Pi)$  с базисом  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ . Обозначим  $e_i$  пересечение области  $\Pi_0$  с  $i$ -м элементарным треугольником (квадратом и т. д.) и потребуем помимо введенных ранее ограничений на шаги сетки выполнения также предположения, что

$$\frac{\max_i \text{mes}(e_i)}{\min_i \text{mes}(e_i)} \leq \text{const}.$$

Определим теперь подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  как множество функций, каждая из которых является сужением некоторой функции из  $W_2^{1,h}(\Pi)$ . Базисом в  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  будет последователь-

ность  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ , в которую включены все функции из  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ , носители которых имеют ненулевое пересечение с  $\Pi_0$ . Каждую функцию из  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  можно представить в виде

$$v^h(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N_0} a_i \varphi_i^h(\bar{r}),$$

при этом справедлив следующий результат аппроксимации [65, 295, 366]: если граница  $\Pi_0$  удовлетворяет условию продолжения  $v^h(\bar{r}) \in W_2^p(\Pi_0)$  на  $\Pi$  с сохранением класса гладкости, то в  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  существует функция  $v^h(\bar{r})$ , такая, что

$$\|v - v^h\|_{W_2^k(\Pi_0)} \leq O(h^{p-k}) \|v\|_{W_2^p(\Pi_0)}, \quad p = 1, 2, \quad k = 0, 1. \quad (19.2.12)$$

Обратимся к нашей задаче (19.1.23). Чтобы определить пространства пробных функций  $H_0^h$  для приближенного решения вариационной задачи, достаточно в рассмотренных выше примерах построения  $\varphi_i^h$  принять: либо  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , и в этом случае проекционно-сеточный метод приводит к системе интегральных уравнений (19.2.5); либо  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, \varphi, \vartheta)$ , здесь приходим к системе алгебраических уравнений (19.2.3). В качестве  $\Pi_0$  берутся соответственно либо область  $D$ , либо  $\Pi_0 = D \times \Omega$ . Полученные при этом пространства  $W_2^{1,h}(D \times \Omega) \equiv H_0^h$  являются подпространствами из  $W_2^1(\Pi_0)$ , в силу чего и с учетом аппроксимирующих свойств (19.2.12) можно гарантировать, что последовательность  $\{H_0^h\}$  будет предельно плотной в  $H_0$ . Следовательно, проекционно-сеточный алгоритм позволяет строить для нашей задачи последовательность приближенных решений  $u^h$ , заведомо сходящихся к точному в метрике пространства  $H_0$ .

Отметим, что в ряде случаев по угловым переменным вводятся и разрывные базисные функции (например, кусочно-постоянные), комбинируя которые с рассмотренными выше для пространственных переменных, можно получить новую модификацию базисных функций.

### 19.3. Проекционно-сеточные схемы для некоторых задач

#### 19.3.1. Плоская геометрия

Пусть задача рассматривается в плоскопараллельном слое  $0 \leq z \leq H$ . Тогда, как известно, решение  $u$  уравнения (19.1.15) будет зависеть от пространственной переменной  $z$  и угловой  $\mu \in [0, 1]$ . Функционал (19.1.25) соответственно принимает вид при  $F(z, \mu) = F(z, -\mu) \equiv f(z, \mu)/\Sigma(z)$  [см. (19.1.14)]:

$$\begin{aligned}
 G(v) = & \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(z) v^2(z, \mu) + \mu^2 l(z) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
 & + \int_0^1 d\mu \mu [v^2(H, \mu) + v^2(0, \mu)] - \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \Sigma_s(z) v(z, \mu) v(z, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) - \\
 & - 2 \int_0^H dz \int_0^1 d\mu v(z, \mu) f(z, \mu). \quad (19.3.1)
 \end{aligned}$$

Построим приближенное решение задачи, используя кусочно-линейные базисные функции по переменной  $z$ . Для этого введем по переменной  $z$  сетку  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = H$ ,  $h_i = z_i - z_{i-1}$  и поставим в соответствие каждому узлу  $z_i$  базисную функцию  $\varphi_i^h(z)$ , определенную согласно (19.1.36). Приближенное решение ищется в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{i=0}^N a_i(\mu) \varphi_i^h(z), \quad (19.3.2)$$

где неизвестные функции  $a_i(\mu)$  найдем, минимизируя функционал (19.2.1). В результате приходим к системе (19.2.5), которая в данном случае имеет вид

$$\hat{A} \mathbf{a} = \int_0^1 d\mu' g(\mu' \rightarrow \mu) \hat{B} \mathbf{a} + \mathbf{B}, \quad (19.3.3)$$



где

$$\mathbf{a} = (a_0(\mu), \dots, a_N(\mu)); \quad \mathbf{F} = (F_0(\mu), \dots, F_N(\mu));$$

$$\hat{A} = \{A_{ij}(\mu)\}_{i,j=0}^N; \quad \hat{B} = \{B_{ij}\}_{i,j=0}^N;$$

$$F_i(\mu) = \int_0^H dz \varphi_i^h(z) f(z, \mu); \quad A_{ij}(\mu) = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle;$$

$$B_{ij} = \int_0^H dz \Sigma_s(z) \varphi_i^h(z) \varphi_j^h(z).$$

В [256] фактически проведено исследование некоторых свойств системы (19.3.3): однозначной разрешимости, устойчивости алгоритма и т. п. Отметим, что в силу финитности  $\varphi_i^h(z)$  матрицы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  будут трехдиагональными.

Рассмотрим вопрос сходимости  $u^h(z, \mu)$  к  $u(z, \mu)$ . Сам факт сходимости  $u^h \rightarrow u$  доказан в § 19.2. Однако получение оценок скоростей сходимости вызывает затруднения. Если бы точное решение рассматриваемой задачи обладало вторыми производными по  $z$ , суммируемыми с квадратом, то из (19.2.4) и (19.2.11) немедленно следовало бы, что  $[u - u^h] \leq 0(h)$ . Однако предположение о такой гладкости  $u(z, \mu)$  не выполняется даже в случае постоянных коэффициентов. Поэтому оценка скорости сходимости вариационно-сеточных алгоритмов в задачах теории переноса требует, как правило, дополнительных исследований.

Поставленная здесь задача достаточно просто решается, если базисные функции несколько модифицировать и рассмотреть использованный алгоритм как метод интегральных тождеств, широко применяемый для диффузионных уравнений и записанный для исследуемой задачи в его вариационной формулировке [9, 10]. Пусть функции  $\{\varphi_i^h(z)\}$  заданы в виде

$$\varphi_k^h(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{1 - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \Sigma(\xi) d\xi}{\int_{z_{k-1}}^{z_k} \Sigma(\xi) d\xi}, & z \in (z_{k-1}, z_k); \\ \frac{1 - \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Sigma(\xi) d\xi}{\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Sigma(\xi) d\xi}, & z \in (z_k, z_{k+1}); \\ 0 & z \notin (z_{k-1}, z_{k+1}). \end{cases} \quad (19.3.4)$$

Очевидно, что «искривленные домики» (19.3.4) тождественно совпадают с введенными выше при предположении, что  $\Sigma(z)$  кусочно-постоянна с возможными разрывами первого рода в некоторых узлах сетки. В этом случае умножим (19.1.15) на  $\Sigma(z)\varphi_i^h(z)$ , проинтегрируем по  $z \in [0, H]$  с учетом граничных условий. В результате получим систему интегральных тождеств:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu u(z_0, \mu)}{\sqrt{h}} + \mu^2 \left[ \frac{u(z_0, \mu) - u(z_1, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_0}^{z_1} \Sigma(z) dz} \right] + \\ & + \mu^2 \left[ \frac{u(z_i, \mu) - u(z_{i+1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \Sigma(z) dz} + \frac{u(z_i, \mu) - u(z_{i-1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \Sigma(z) dz} \right] + \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
& + \langle u, \varphi_i^h \rangle_0 = \langle \bar{S}_0, u, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 1, \dots, N-1; \\
& \frac{\mu u(z_N, \mu)}{\sqrt{h}} + \mu^2 \left[ \frac{u(z_N, \mu) - u(z_{N-1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_{N-1}}^{z_N} \Sigma(z) dz} \right] + \\
& + \langle u, \varphi_N^h \rangle_0 = \langle \bar{S}_0, u, \varphi_N^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_N^h \rangle_0.
\end{aligned} \right\} \quad (19.3.5)$$

Если ввести интерполянт точного решения  $u_I(z, \mu)$ , для которого  $u_I(z_i, \mu) = u(z_i, \mu)$  и имеет смысл выражение  $\frac{\mu}{\Sigma(z)} \frac{\partial u_I}{\partial z}$ , то систему (19.3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \left\langle \mu l \frac{\partial u_I}{\partial z}, \mu l \frac{\partial \varphi_i^h}{\partial z} \right\rangle + \mu (u_I \varphi_i^h|_{z=0} + u_I \varphi_i^h|_{z=H}) + \langle u, \varphi_i^h \rangle_0 = \\
& = \langle \bar{S}_0, u, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0 \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (19.3.6)
\end{aligned}$$

Ради определенности далее в качестве  $u_I(z, \mu)$  выберем функцию вида  $u_I(z, \mu) = \sum_{i=0}^N u(z_i, \mu) \sqrt{h} \varphi_i^h(z)$ .

Приближенное решение будем искать в виде  $u^h(z, \mu) = \sum_{i=0}^N a_i(\mu) \varphi_i^h(z)$ , где неизвестные функции  $a_i(\mu)$  определим из системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
& \left\langle \mu l \frac{\partial u^h}{\partial z}, \mu l \frac{\partial \varphi_i^h}{\partial z} \right\rangle + \mu (u^h \varphi_i^h|_{z=0} + u^h \varphi_i^h|_{z=H}) + \langle u^h, \varphi_i^h \rangle_0 = \\
& = \langle \bar{S}_0, u^h, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (19.3.7)
\end{aligned}$$

совпадающей с системой (19.3.3). Таким образом, методы Ритца, Галеркина и интегральных тождеств в данной задаче совпадают, в силу чего они дают одно и то же приближенное решение.

В работе В. И. Агошкова [10] доказано, что если  $f(z, \mu)$  — ограниченная функция, то  $\|u - u_I\|^2 \leq O(h) \|f\|_{L_\infty}^2$ . Отсюда следует оценка

$$\left\| \mu l \frac{\partial}{\partial z} (u_I - u^h) \right\|^2 + \int_0^1 d\mu \mu [(u_I - u^h)^2]_{z=0} + \\ + (u_I - u^h)^2|_{z=H} + \|u - u^h\|^2]^{1/2} \leq Ch^{1/2} \|f\|_{L_\infty}, \quad (19.3.8)$$

которая является оценкой погрешности приближенного решения, полученного с помощью проекционно-сеточного метода.

Отметим, что в силу сделанных предположений о коэффициентах задачи и введенной сетки матрица  $\hat{A}(\mu)$  будет диагонально преобладающей при любом  $\mu \in [0, 1]$ . Отсюда и из предположения  $C(z) < 1$  следует, что собственные числа матрицы  $\hat{A}(\mu)$  при произвольном фиксированном значении  $\mu \in [0, 1]$  и собственные числа системы (19.3.3) будут отделены от нуля положительной постоянной, не зависящей от  $h_k$ . Эти обстоятельства гарантируют нам устойчивость рассмотренных алгоритмов, а также метода прогонки, если его применить для обращения матрицы  $\hat{A}$  при фиксированном значении  $\mu$  при решении (19.3.3) каким-либо итерационным методом и методом квадратур.

### 19.3.2. Сферически-симметричная геометрия

Пусть теперь  $D$  есть шар радиусом  $R$ . Минимизируемый функционал  $G(v)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
G(v) = & \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(r) v^2(r, \mu) + l(r) \left( \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right)^2 \right] + R^2 \int_0^1 \mu d\mu v^2(R, \mu) - \\
& - \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \Sigma_s(r) v(r, \mu) v(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) - \\
& - 2 \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu v(r, \mu) f(r, \mu).
\end{aligned} \tag{19.3.9}$$

При решении данной задачи можно воспользоваться кусочно-линейными функциями (19.2.10) при  $\bar{r} \equiv (r, \mu)$ . Введем на области  $[0, R] \times [0, 1]$  сетку:  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{N_R} = R$ ;  $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_N = 1$  и выполним ее триангуляцию. Каждому узлу  $(r_i, \mu_j)$  поставим в соответствие финитную функцию  $\varphi_{ij}^h(r, \mu)$  с носителем  $\Pi_{ij} = \bigcup_{k=1}^6 \Pi_{ij}^{(k)}$ , определяемую в каждом треугольнике по формуле (19.2.10). Приближенное решение ищется в виде  $u^h(r, \mu) = \sum_{i=0}^{N_R} \sum_{j=0}^N a_{ij} \varphi_{ij}^h(r, \mu)$ , где неизвестные постоянные  $a_{ij}$  находятся из системы  $\frac{\partial G(u^h)}{\partial a_{ij}} = 0$ ,  $i = 0, \dots, N_R$ ,  $j = 0, \dots, N$ , которую можно записать в матричной форме:

$$(\hat{A} - \hat{B})\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{19.3.10}$$

где

$$\mathbf{a} = (a_{00}, \dots, a_{N_R 0}, a_{01}, \dots, a_{N_R 1}, \dots, a_{0N}, \dots, a_{N_R N});$$

$$\mathbf{F} = (F_{00}, \dots, F_{N_R 0}, F_{01}, \dots, F_{N_R 1}, F_{02}, \dots, F_{0N}, \dots, F_{N_R N});$$

$$\hat{A} = \left\{ A_{(ij)}^{(kl)} \right\}_{i,k=0,\dots,N_R}^{j,l=0,\dots,N}; \quad \hat{B} = \left\{ B_{(ij)}^{(kl)} \right\}_{i,k=0,\dots,N_R}^{j,l=0,\dots,N}.$$

Система (19.3.10) обладает симметричной положительно определенной матрицей, собственные числа которой отделены от нуля положительной постоянной, не зависящей от шагов сетки. Матрица  $\hat{A}$  семидиагональна, симметрична и положительно определена.

В силу плотности последовательности линейных оболочек  $\{\varphi_{ij}^h(r, \mu)\}$  в энергетическом пространстве здесь гарантирована сходимость  $u^h \rightarrow u$  при  $h \rightarrow 0$  в метрике  $H_0$ . В целях ускорения данной сходимости можно провести триангуляцию области  $[0, R] \times [0, 1]$  специальным образом. В данной задаче решение, будучи непрерывной функцией, обладает частными производными, которые могут терпеть разрыв по характеристикам, уравнения которых в переменных  $(r, \mu)$  имеют вид  $r\sqrt{1 - \mu^2} = \tilde{r}_k$ , где  $\tilde{r}_k$  — точки разрывов  $\Sigma(r)$  [78]. Поэтому в целях уменьшения ошибки аппроксимации можно ввести криволинейные треугольники, одна из сторон которых может совпадать с частью характеристики, и определить на них некоторые базисные функции. Естественно, скорость сходимости в данном случае увеличивается.

### 19.3.3. Многомерный случай

Пусть  $D$  — параллелепипед:  $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3\}$ . Построим проекционно-сеточную схему для задачи (19.1.23), используя кусочно-полилинейные базисные функции по пространственным переменным  $(x_1, x_2, x_3)$ , а по угловым  $\psi, \vartheta$  — кусочно-постоянные.

Введем в области  $D$  следующие сетки:

$$\begin{aligned} a_k &= x_{k,1} < \dots < x_{k,N_R} = b_k; & h_{k,i} &= x_{k,i} - x_{k,i-1}; \\ k &= 1, 2, 3, & i &= 1, \dots, N_k; \\ h &= \max_{k,i} h_{k,i}; & c_0 h &\leq h_{k,i} < c_1 h; & c_0, c_1 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Предположим, что по пространственным переменным введены функции  $\varphi_i^h(x)$  по формуле (19.2.9) при  $r^- \equiv (x_1, x_2, x_3)$ .

Пусть  $B_I = (\omega_1, \dots, \omega_I)$  — некоторое разбиение поверхности  $\Omega$  единичной сферы на открытые области  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Пусть разбиение  $B_I$  удовлетворяет следующим требованиям:

$m_i = \text{mes } \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, I; \sum_i m_i = 4\pi$  и  $\omega_k \cap \omega_i = 0$  при  $i \neq k$ ; каждая область  $\omega_i$  является центральной симметричной областью относительно центра сферы  $\Omega$ , то есть  $\omega_i = \omega'_i \cup \omega''_i$ , где  $\omega''_i = \{\Omega : \Omega \in \omega'_i\}$ ; области  $\omega'_i, \omega''_i$  предположим односвязными.

Пусть

$$\chi_m(\Omega) = \{1, \Omega \in \omega_m; 0, \Omega \notin \omega_m\}. \quad (19.3.11)$$

Обозначим  $H_0^h$  подпространство из  $H_0$ , состоящее из функций вида

$$v^h(x, \bar{\Omega}) = \sum_{(i)} \sum_{(m)} a_{im} \chi_m(\Omega) \varphi_i^h(x). \quad (19.3.12)$$

Последовательность  $\{H_0^h\}$  предельна плотна в  $H_0$ . Поэтому если искать приближенное решение задачи в виде (19.3.12), а неизвестные  $a_{im}$  — из условия минимума  $G(v)$ , то получим приближенные решения, сходящиеся к точному в энергетической метрике. Система уравнений  $\frac{\partial G(v^h)}{\partial a_{im}} = 0$  в данной задаче имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{(i')} \sum_{(m')} a_{i'm'} [\varphi_i, \chi_m, \varphi_{i'}, \chi_{m'}] = \\ & = \sum_{(i')} \sum_{(m')} a_{i'm'} (\bar{S}_0, \varphi_{i'}, \chi_{m'}, \varphi_i, \chi_m) + (F, \varphi_i, \chi_m), \end{aligned} \quad (19.3.13)$$

где

$$\begin{aligned}
 & [\varphi_i, \chi_m, \varphi_{i'}, \chi_{m'}] = \\
 & = \delta_{mm'} \left\{ \sum_{p,p'=1}^3 \left( \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m^2 \Omega_p \Omega_{p'} \right) \left( \int_D dx l(x) \frac{\partial \varphi_{i'}}{\partial x_{p'}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_p} \right) + \right. \\
 & \quad + \left( \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m^2 \right) \left( \int_{\Omega} dx l^{-1}(x) \varphi_i(x) \varphi_{i'}(x) \right) + \\
 & \quad \left. + \int_{\Omega} d\Omega \chi_m^2(\Omega) \left| \sum_{p=1}^3 \Omega_p n_p \right| \int_{\Gamma} d\Gamma \varphi_i(x) \varphi_{i'}(x) \right\}; \\
 & (\bar{S}_0, \varphi_{i'}, \chi_{m'}, \varphi_i, \chi_m) = \left( \int_{\Omega} d\Omega \chi_m^2(\Omega) \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m(\Omega') g(\mu) \right) \times \\
 & \quad \times \left( \int_D dx \Sigma_s(x) \varphi_i(x) \varphi_{i'}(x) \right); \\
 & (F, \varphi_i, \chi_m) = \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m(\Omega') \int_D dx f(x, \Omega) \varphi_i(x).
 \end{aligned}$$

Каждое разбиение сферы  $B_I$  порождает некоторую квадратурную формулу для сферы. Поэтому фактически для реализации алгоритма достаточно знать не конфигурации областей  $\omega_i$ , а лишь узлы и веса этой квадратурной формулы (см. подробнее об этом в § 19.4, 19.5).

Система (19.3.13) обладает симметричной положительно определенной матрицей, что дает гарантию сходимости ряда итерационных процессов, применяемых для решения (19.3.13).

## 19.4. $P_{NI}$ -уравнения, вывод

Здесь мы построим на основании некоторых интегральных тождеств для решений кинетических уравнений алгоритм вы-



вода систем уравнений в частных производных в пространстве координат для приближенного нахождения решения кинетических задач. Полученные уравнения были названы  $P_{NI}$ -уравнениями [204]. При выводе  $P_{NI}$ -уравнений ограничимся рассмотрением случая с изотропной индикатрисой рассеяния. На основе  $P_{NI}$ -уравнений получим различные конечно-разностные аналоги для кинетических уравнений.

Рассмотрим в выпуклой области  $D \subset R_3$  кинетическое уравнение

$$-[l\Omega\nabla]^2 u + u = c(x)Su + F(x, \Omega). \quad (19.4.1)$$

Положим  $Bu = cSu + F$ ,  $Lu = -[l\Omega\nabla]^2 u$ ;  $T_j = l \frac{\partial}{\partial x_j}$ ;

$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ . Сначала получим некоторые интегральные тождества, связывающие значения функций  $u$  и  $Su$ . Предполагая достаточную для дальнейших выкладок гладкость  $u$  коэффициентов уравнения (19.3.1), функции  $F$  и решения  $u$ , применяя к равенству (19.3.1) оператор  $L^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $N > 0$  — некоторое целое число, получаем систему равенств

$$L^k u = - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j Bu + (-1)^k u, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (19.4.2)$$

при  $k = 0$  считаем, что  $L^0 = I$ . Пусть  $l_{NR}$  является однородным относительно  $\mathbf{T}$  многочленом порядка  $2k$  и коэффициенты его зависят только от  $x$ . Тогда, умножая (19.4.2) на  $l_{N,N-k}$ ,  $k = 0, \dots, N$ , а после суммируя результат по  $k$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi_N(u) = \sum_{k=0}^N l_{N,N-k} L^k u = - \sum_{k=1}^N l_{N,N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j cSu - \\ - \sum_{k=1}^N l_{N,N-k} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j F + \sum_{k=0}^N (-1)^k l_{N,N-k} u. \end{aligned} \quad (19.4.3)$$

Равенство (19.4.3) послужит основой для получения  $P_{NI}$ -уравнений.

Пусть  $B_I = (\omega_1, \dots, \omega_I)$  — разбиение поверхности  $\Omega$  единичной сферы на открытые области  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , рассмотренное в § 19.3. Пусть  $d_0$  обозначает максимальный диаметр областей  $\omega_i$ , а  $S_i = m_i^{-1} S'_i$ , где  $S'_i$  — оператор интегрирования по множеству

$\omega_i$ . Обозначим  $u_I = (v_1, \dots, v_I)$  кусочно-постоянную по  $\Omega$  функцию, определенную в  $\Omega \times D$ , которая по функции  $u$  определяется равенством  $v_i = S_i u$  при  $\Omega \in \omega_i$ . Очевидно, что  $Su = \sum_{i=1}^I \alpha_i v_i$ , где  $\alpha_i = \frac{m_i}{4\pi}$ . Для заданной функции  $F$  будут известными и функции  $\psi_{ij} = S_i L^j F$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Легко видеть, что для функций  $\omega = \omega(x)$  операторы  $L_{ij}\omega = S_i L^j \omega$  будут известными однородными по  $T$  дифференциальными операторами порядка  $2j$ , коэффициенты которых не зависят от  $\Omega$  и  $\omega$ , а вычисляются интегрированием.

Поддействовав на обе части равенства (19.4.3) последовательно операторами  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , получим систему равенств

$$\begin{aligned} S_i \Phi_N(u) = & - \sum_{j=1}^N l_{N,N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L_{ij} c \sum_{n=1}^I \alpha_n v_n + \\ & + \sum_{k=0}^N (-1)^k l_{N,N-k} v_i - \psi_i, \end{aligned} \quad (19.4.4)$$

где

$$\psi_i = \sum_{k=1}^N l_{N,N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \psi_{ij}.$$

Пусть  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_I)$ ; обозначим  $\bar{S}, Q_{NI}, P_{NI}$  матричные операторы, действующие в (19.4.4) соответственно на вектор-функции  $\Phi_N(u), u_I, cu_I$ . В новых обозначениях система равенств (19.4.4) запишется в виде

$$\bar{S} \Phi_N(u) = Q_{NI} u_I - P_{NI} c u_I - \psi. \quad (19.4.5)$$

Легко убедиться, что главной частью дифференциального оператора  $Q_{NI} - P_{NI} c$  является оператор  $l_{N,N}$  порядка  $2N$ , что  $\Phi_N(u)$  — линейный однородный по  $T$  дифференциальный оператор порядка  $2N$ . Коэффициенты при производных оператора  $\Phi_N(u)$  являются многочленами по  $\Omega$  степени  $\leq 2N$ ; они зависят также от  $x$ .

Пусть  $N, I$  разбиение  $B_I$  и операторы  $l_{N,N-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , выбраны так, что левую часть (19.4.5) на некотором классе функций  $u$  можно считать достаточно малой величиной относительно некоторой метрики. Пренебрегая ею, получаем для функции

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_I)$  — приближенного значения функции  $u$  — системе уравнений

$$Q_{NI}\omega - P_{NI}c\omega = \psi, \quad (19.4.6)$$

определенную в области  $D$ . Эту систему уравнений назовем  $P_{NI}$ -уравнениями. К системе (19.4.6) добавим уравнения, определяющие краевые условия на границе  $\Gamma$  области  $D$ :

$$\tilde{B}\omega|_{\Gamma} = \tilde{\psi}, \quad (19.4.7)$$

которые в некотором смысле аппроксимировали бы краевые условия исходной задачи и гарантировали бы однозначную разрешимость задачи (19.4.6), (19.4.7).

## 19.5. $P_{1I}$ -уравнения

Исследование свойств решений  $P_{NI}$ -уравнений начнем со случая  $N = 1$ . Для каждой области  $\omega_i$  операторы  $l_{11} = l_{11}^i$ ,  $l_{10} = l_{10}^i$  считаем заданными в виде

$$l_{11}^i = \sum_{k,j} a_{kj}^i T_k T_j, \quad l_{10} \equiv 1, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (19.5.1)$$

где величины  $a_{kj}^i$  предстоит выбрать.

Сначала определим  $a_{kj}^i$ , входящие в выражение для операторов  $l_{11}^i$ , по формуле

$$a_{kj}^i = S_i(\Omega_k, \Omega_j), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (19.5.2)$$

Поскольку в этом случае  $S_i\Phi_1(u) = m_i^{-1} \int \sum_{\omega_i} (\Omega_k \Omega_j - a_{kj}^i) T_k T_j u d\Omega$  и  $S_i\Phi_1(u) \equiv 0$ , если функции  $T_k T_j u$  постоянны по  $\Omega$  внутри каждой области  $\omega_i$ , будем считать, что величиной  $\Phi_1(u)$  можно пренебречь. Тогда (19.4.6) запишется в виде

$$-\sum_{k,j} a_{kj}^i T_k T_j w_i + w_i = c \sum_{j=1}^I \alpha_j w_j + \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (19.5.3)$$

где  $\psi_i = S_i F$ , а коэффициенты  $a_{kj}^i$ , как нетрудно убедиться, удовлетворяют равенствам  $\sum_{i=1}^I m_i a_{jj}^i = \frac{4\pi}{3}$ ,  $a_{kj}^j = a_{jk}^j$ ,  $\sum_{i=1}^I m_i a_{jk}^i = 0$  при  $k \neq j$ .

Ввиду того, что существует такая постоянная  $C > 0$ , зависящая от  $B_I$ , что при любом единичном векторе  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  имеет место  $S_i((\Omega\beta)^2) > C$ , система (19.4.3) является эллиптической системой дифференциальных уравнений, ибо

$$\sum_{k,j} a_{kj}^i \beta_k \beta_j = S_i((\Omega\beta)^2) > C. \quad (19.5.4)$$

Для уравнения (19.4.1) в области  $D$  рассмотрим основную краевую задачу — задачу (19.1.15), (19.1.20) [или (19.1.23)]. Пусть  $x \in \Gamma$ . Рассмотрим функции  $c_i = c_i(x)$ , определенные равенством  $c_i = S_i(|n\Omega|)$ .

Систему (19.5.3) дополним краевыми условиями для функций  $w_i$ . Потребуем, чтобы функции  $w_i$  — решения (19.5.3) — удовлетворяли краевым условиям

$$\frac{\partial w_i}{\partial \nu_i} + c_i w_i|_{\Gamma} = 0, \quad (19.5.5)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu_i}$  — кономальная производная на границе  $\Gamma$ , определяемая оператором  $l^{-1} \sum_{k,j} a_{kj}^i T_j w_i \cos(n, x_k)$ .

Рассмотрим теперь сходимость решений задачи (19.5.3), (19.5.5) к точному решению задачи (19.1.23), когда  $N = 1$ ,  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ . Для этой цели обозначим  $H_0^I$  гильбертово пространство функций  $v = (v_1, \dots, v_I)$ , определенных на множестве  $D \times \Omega$  равенством  $v_{x \in D \times \omega_i} = v_i$  и постоянных по переменным  $\Omega$  на каждом множестве  $D \times \omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Скалярное произведение для двух функций  $w, v \in H_0^I$  зададим по формуле

$$[w, v]_I = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^I m_i c_i w_i v_i d\Gamma + (w, v)_I + \int_D l \sum_{i=1}^I \sum_{k,j} s_{kj}^i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad (19.5.6)$$

где скалярное произведение  $(w, v)_I$  определяется формулой

$$(w, v)_I = \int_D l^{-1} \sum_{i=1}^I m_i c_i w_i v_i dx.$$

Введем две нормы для элемента  $w \in H_0^I$ :

$$[w]_I^2 = [w, w]_I, \quad \|w\|_I^2 = (w, w)_I. \quad (19.5.7)$$

Легко убедиться в том, что задача (19.5.3), (19.5.5) является самосопряженной положительно определенной задачей в пространстве  $H_0^I$ .

Пусть пространство  $\bar{H} = \bigcup_I H_0^I$  — объединение всевозможных вложенных друг в друга пространств  $H_0^I$ . Это значит, что для рассматриваемой последовательности  $I_n$  и соответствующих разбиений  $B_{I_n}$ , где  $I_n \rightarrow \infty$ ,  $d_{0n} \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  всегда выполняется включение:  $H_0^{I_{n_1}} \subset H_0^{I_{n_2}}$  при  $I_{n_1} < I_{n_2}$ , то есть разбиение  $B_{I_2}$  получено путем дальнейшего дробления разбиения  $B_{I_1}$ . Для функций  $F, c$  предположим выполнение неравенств (19.1.24), (19.1.26). Тогда можно показать, что для любого  $I$  краевая задача (19.5.3), (19.5.5) всегда имеет единственное решение  $w_I \in H_0^I$ , и оно для любой функции  $v \in H_0^I$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$[w, v]_I - \int_D l^{-1} \sum_{i=1}^I \alpha_i w_i \sum_{i=1}^I \alpha_i v_i dx = (\psi, v)_I. \quad (19.5.8)$$

Сходимость последовательности функций  $w_I$  к функции  $u$  при  $N = 1$ ,  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$  исследована в [256]. Справедлива

**Теорема 19.5.1 [256].** При выполнении условий (19.1.24), (19.1.26) функция  $w_I$  — решение задачи (19.5.3), (19.5.5) — реализует в пространстве  $H_0^I$  минимум функционала  $G(v)$  (19.1.25) и  $[u - w_I] \rightarrow 0$ , при  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ , где функция  $u$  есть решение задачи (19.1.23).

## 19.6. Построение проекционно-сеточных схем на основе метода Галеркина

Рассмотрим теперь в  $\mathcal{H}$  уравнение переноса в несамосопряженной форме

$$l(x)\omega \nabla \varphi + \varphi = c(x)Sg\varphi + F(x, \Omega), \quad F \in \mathcal{H} \quad (19.6.1)$$

с краевым условием

$$\varphi|_{\Gamma} = 0 \quad \text{при} \quad (n, \Omega) < 0, \quad (19.6.2)$$

где  $|c| \leq c_0 < 1$ , но  $g(\mu_0)$  и  $F(x, \Omega)$ , вообще говоря, не предполагаются четными относительно угловых переменных. Используя

обозначения введенных в § 19.1 оператора  $A$  с областью определения  $\tilde{D}_0$  и  $\bar{S}_0 = cSg$ , задачу (19.6.1), (19.6.2) можно записать в форме

$$A\varphi = \bar{S}_0\varphi + F. \quad (19.6.3)$$

Для уравнения (19.6.3) вариационный принцип, рассмотренный выше, уже несправедлив. Поэтому для построения проекционно-сеточных схем в данном случае используем другой проекционный метод. Остановимся на методе Галеркина и прежде всего сформулируем обобщенную постановку задачи (19.6.3), к которой будет применяться указанный метод. При рассмотрении данного вопроса будем следовать работе [508].

Введем следующие гильбертовы пространства:

$$H_A = \{u : \|u\|_A^2 = (l\Omega\nabla u, \Omega\nabla u) + (u, u) < \infty;$$

$$(u, v)_A = (l\Omega\nabla u, \Omega\nabla v) + (u, v)\};$$

$$L_2(\gamma) = \left\{u : \|u\|_{L_2(\gamma)}^2 = \int_{\gamma} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| u^2 < \infty;$$

$$\gamma = \{\Gamma \times \Omega, (\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0\};$$

$$(u, v)_{L_2(\gamma)} = \int_{\gamma} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| uv\}.$$

Отметим, что  $H_A$  вложено в  $\mathcal{H}$  и плотно в нем.

Умножая (19.6.3) на произвольную функцию  $\psi \in H_A$  и выполняя интегрирование по частям с учетом граничных условий, получаем тождество

$$A(\varphi, \psi) \equiv -(\psi, l\Omega\nabla\varphi) + (\varphi, \psi) + (\varphi, \psi)_{L_2(\gamma)} - (\bar{S}_0\varphi, \psi) = (F, \psi). \quad (19.6.4)$$

Назовем обобщенным решением задачи (19.6.1), (19.6.2) функцию  $\psi \in H_A$ , удовлетворяющую (19.6.4) при любых  $\varphi \in H_A$ . Очевидно, что если  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (19.6.3), то она является обобщенным решением. Если же существует обобщенное решение  $\psi \in H_A$ , то оно почти всюду удовлетворяет уравнениям (19.6.1), (19.6.2). Действительно, выполняя в (19.6.4) интегрирование по частям и учитывая произволь-

ность выбора  $\psi$ , получаем, что  $\varphi$  почти всюду удовлетворяет как уравнению (19.6.1), так и краевому условию (19.6.2). Из сказанного вытекает эквивалентность задач (19.6.3) и (19.6.4). Однако существенным отличием постановки (19.6.4) от (19.6.3) является то, что здесь не накладывается никаких граничных условий на обобщенное решение. А это обстоятельство, как известно, весьма важно для построения базисных функций в проекционных методах. Отметим, что сам факт существования и единственности обобщенного решения вытекает из однозначной разрешимости уравнения (19.6.3) при любом  $F \in \mathcal{H}$ .

Сформулируем теперь алгоритм приближенного решения задачи. Пусть для определенности по первому из способов, рассмотренному ранее, построены базисные функции  $\{\varphi_i^h(x, \Omega)\}_{i=1}^{N_1}$ . Введем подпространство  $H_A^h \subset H_A$ , состоящее из линейных комбинаций функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_1}$ . Приближенное решение ищем в виде

$$\varphi^h(x, \Omega) = \sum_{(i)} a_i \varphi_i^h(x, \Omega), \quad (19.6.5)$$

где неизвестные постоянные  $a_i$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} -(\varphi^h, l\Omega \nabla \varphi_j^h) + (\varphi^h, \varphi_j^h) + (\varphi, \varphi_j^h)_{L_2(\gamma)} &= (\bar{S}_0 \varphi^h, \varphi_j^h) + \\ &= (F, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N_1, \end{aligned} \quad (19.6.6)$$

или в матричной форме

$$\hat{A} \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (19.6.7)$$

где

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_1}); \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_{N_1}); \quad \hat{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{N_1};$$

$$A_{ij} = -(\varphi_i^h, l\Omega \nabla \varphi_j^h) + (\varphi_i, \varphi_j) + (\varphi_i^h, \varphi_j^h)_{L_2(\gamma)} - (\bar{S}_0 \varphi_i^h, \varphi_j^h).$$

Матрица  $\hat{A}$  положительно определена. Действительно, при ненулевом векторе  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_1})$  и  $\varphi^h = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i^h$  имеем

$$\begin{aligned}
(\hat{A}\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= -(\varphi^h, l\Omega\nabla\varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h)_{L_2(\gamma)} - \\
&\quad - (\bar{S}_0\varphi^h, \varphi^h) \geq (\varphi^h, \varphi^h) - (\bar{S}_0\varphi^h, \varphi^h) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| (\varphi^h)^2 \geq (1 - c_0) \|\varphi^h\|^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| (\varphi^h)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, система Галеркина (19.6.7) однозначно разрешима и при этом справедлива априорная оценка

$$\|\varphi^h\|^2 + \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega\mathbf{n}| (\varphi^h)^2 \leq \frac{\|F\|^2}{\min(1/2, 1 - c_0)^2} \equiv C\|F\|^2. \quad (19.6.8)$$

Сходимость приближенных решений доказать в данном алгоритме достаточно просто. Справедлива оценка [256]:

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \varphi^h\|^2 + \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega\mathbf{n}| |\varphi - \varphi^h|^2 \leq \\
\end{aligned} \quad (19.6.9)$$

$$\leq C \inf_{\{c_i\}} \left[ \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_A^2 + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_{L_2(\gamma)}^2 \right].$$

Отсюда в силу плотности последовательности  $H_A^h$  в  $H_A$  следует сходимость приближенных решений к точному.

## 19.7. Обобщенный метод Бубнова - Галеркина со специальным выбором базисных функций

### 19.7.1. Общая схема алгоритма

Рассмотрим в пространстве  $\mathcal{H}$  уравнение переноса в несамо-сопряженной форме (19.6.3). Применим для решения его одну из модификаций обобщенного метода Бубнова - Галеркина. Для этого выберем последовательность  $H_h, h = h_1, h_2, \dots$ , конечно-



мерных подпространств с координатными функциями  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , причем  $H_h \subset D(A)$  и последовательность  $\{AH_h\}$  полна в  $H$ . Строим приближенное решение в виде  $u^h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \Phi_i^h$ , где неизвестные  $\{a_i\}_{i=1}^{N_h}$  определяются из системы линейных уравнений

$$(Au^h, A\Phi_i^h) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_i^h) + (F, A\Phi_i^h), \quad i = 1, \dots, N_h. \quad (19.7.1)$$

Одним из основных вопросов в рассматриваемом методе является выбор координатных функций. Если априори задаются функции  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  с известными аппроксимирующими свойствами (ортонормированные полиномы, сплайновые базисы и т. п.), то в этом случае часто трудно исследовать свойства системы  $\{A\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , что усложняет изучение таких вопросов, как получение оценок скорости сходимости, учет особенностей решения, специфики задачи и др.

Пусть область значений оператора  $\bar{S}_0$  и функций  $F$  принадлежит некоторому подпространству  $H_{S,f} \subset H$ . Зададим в  $H_{S,f}$  исходную систему базисных функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  с финитными носителями порядка  $h$ , относительно которой предполагается выполнение двух свойств: для любого  $N_h$ -мерного вектора  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{N_h})$  справедливо соотношение  $c_1 \|\mathbf{b}\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{N_h} b_i \varphi_i^h \right\| \leq c_2 \|\mathbf{b}\|_2$ , где постоянные  $c_1, c_2 > 0$  не зависят от  $\mathbf{b}$  и  $h$ , а  $\|\mathbf{b}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{N_h} b_i^2 \right)^{1/2}$ ; для любой  $v \in H_{S,f}$  существует такая линейная комбинация  $\psi_h = \sum_{i=1}^{N_h} b_i \varphi_i^h$ , что  $\|\bar{S}_0 A^{-1} v - \psi_h\| \leq \varepsilon(h) \|v\|$ , где  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Построим функции  $\{\Phi_i^h = A^{-1} \varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , которые линейно независимы при каждом  $h$  и принимаются в качестве координатных при решении (19.6.3) с помощью указанного метода. Отметим некоторые характерные черты рассмотренного выше алгоритма построения координатных функций.

По построению  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  обладают особенностями решения  $u$ , обусловленными их зависимостью от оператора  $A$ , а за счет специального выбора системы  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  можно учитывать те или иные особенности правой части уравнения (19.6.3), которые часто априори известны.

В некоторых случаях может оказаться так, что  $B(u, F) \equiv \bar{S}_0 u + F$  обладает лучшими дифференциальными свойствами по сравнению с самим решением уравнения. Тогда можно с помощью малого числа исходных координатных функций добиться эффективной аппроксимации  $B(u, F)$  и надеяться на достаточно быструю сходимость  $u^h$  к  $u$ .

Если решение уравнения (19.6.3) зависит от переменных  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $H_{S,f}$  состоит из функций, зависящих лишь от  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m < n$ , то очевидно, что в данном случае достаточно ввести координатные функции  $\{\varphi_i^h\}$ , зависящие лишь от  $x_1, \dots, x_m$ , и с их помощью аппроксимировать  $B(u, F) \in H_{S,f}$ . Решение же  $u$  будет приближаться через  $u^h$  по всем переменным. Это обстоятельство на практике приводит к значительному уменьшению количества координатных функций и, следовательно, порядка решаемой системы (19.7.1). В силу финитности  $\varphi_i^h$ ,  $i = 1, \dots, N_h$ , в левой части (19.7.1) возникает разреженная матрица, что облегчает решение системы с помощью итерационных методов; упрощается также вычисление  $\{\varphi_i^h\}$ , элементов матриц и значений  $(F, \varphi_i^h)$ .

В силу сказанного выше можно предположить, что обобщенный метод Бубнова – Галеркина при использовании специальных координатных функций  $\{\Phi_i^h\}$  может оказаться достаточно эффективным при решении краевых задач, в которых можно достаточно просто строить  $A^{-1}$  (например, в сферически-симметричной области, в плоскопараллельной геометрии и т. п.). В работе [71] доказано, что при сделанных выше ограничениях система (19.7.1) имеет единственное решение при достаточно малых  $h$  и  $u^h \rightarrow u$ ,  $Au^h \rightarrow Au$  при  $h \rightarrow 0$ .

### 19.7.2. Решение уравнения переноса в плоскопараллельной геометрии

Проиллюстрируем применение изложенного выше обобщенного метода Бубнова – Галеркина к решению некоторых частных задач для уравнения переноса. Сначала рассмотрим уравнение переноса в плоскопараллельной геометрии

$$\frac{\mu}{\Sigma(z)} \frac{\partial u}{\partial z} + u = \frac{c(z)}{2} \int_{-1}^1 g_0(\mu, \mu') u(z, \mu') d\mu' + F(z, \mu) \quad (19.7.2)$$

с граничным условием

$$u(H, \mu) = 0 \text{ при } -1 \leq \mu < 0; u(0, \mu) = 0 \text{ при } 0 < \mu \leq 1. \quad (19.7.3)$$

Предполагается, что  $F(z, \mu) \in L_\infty([0, H] \times [-1, 1])$ , а коэффициенты  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z) = c(z)\Sigma(z)$  — кусочно-непрерывны с возможными разрывами первого рода в точках  $\tilde{z}_i, i = 1, \dots, I < \infty$ . В операторной форме задачу (19.7.2), (19.7.3) будем записывать в виде уравнения (19.6.3).

Введем на  $[0, H]$  сетку с узлами  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = H$  таким образом, чтобы для  $h_j = z_j - z_{j-1}$  и  $h = H/N$  имело место соотношение  $0 < c_0 h \leq h_j \leq c_1 h$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $c_0, c_1 = \text{const}$ . Предполагаем, что часть узлов совпадает с точками  $z_i, i = 1, \dots, I (I < N)$ .

Пусть

$$\varphi_i^h(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 1 & \text{при } z_{j-1} \leq z \leq z_j, j = 1, \dots, N; \\ 0 & z \notin [z_{j-1}, z_j]. \end{cases} \quad (19.7.4)$$

Построим функции  $\{\Phi_j(z, \mu)\}_{j=1}^N$ , где  $\Phi_j(z, \mu)$  — суть решения задачи  $A\Phi_j = \varphi_j^h(z)$ , которые определяются формулой

$$\Phi_j(z, \mu) = \begin{cases} \int_0^z \Sigma(x) \varphi_j(x) \exp\left(-\int_x^z \frac{\Sigma(x')}{\mu} dx'\right) \frac{dx}{\mu} & \text{при } \mu > 0; \\ \int_0^1 \Sigma(x) \varphi_j(x) \exp\left(+\int_z^x \frac{\Sigma(x')}{\mu} dx'\right) \frac{dx}{-\mu} & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \quad (19.7.5)$$

Очевидно, что  $\Phi_j$  — линейно-независимы.

Функции  $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$  удовлетворяют граничным условиям (19.7.3) и обладают особенностями решения задачи (19.6.3), обусловленными «присутствием» оператора  $A$ . В силу этого использование их в качестве базисных функций устранил ряд трудностей при решении задачи. Однако  $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$  полностью не описывают поведение решения в зависимости от  $\mu$ . Поэтому при решении анизотропных задач необходимо вводить дополнительные базисные функции, зависящие от угловой переменной  $\mu$ .

Пусть на  $[-1, 1]$  определена система линейно-независимых финитных функций  $\psi_j(\mu)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , с носителем порядка  $\sim \Delta\mu = 2/M$ , обладающих следующим свойством аппроксимации: для любой  $\varphi(\mu) \in C^{(l)}[-1, 1]$  можно построить функцию вида  $\varphi_{\Delta\mu}(\mu) = \sum_{j=1}^M a_j \psi_j(\mu)$ ,  $a_j = \text{const}$ , такую, что

$$\|\varphi - \varphi_{\Delta\mu}\|_{C[-1,1]} \leq O[(\Delta\mu)^l] \|\varphi\|_{C^{(l)}[-1,1]}. \quad (19.7.6)$$

Будем искать приближенное решение (19.6.3) в виде

$$u^h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij} \Phi_i(z, \mu) \psi_j(\mu), \quad (19.7.7)$$

где неизвестные постоянные  $a_{ij}$  определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$(Au^h, A\Phi_i \psi_j) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_i \psi_j) + (F, A\Phi_i \psi_j), \quad (19.7.8)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

которая однозначно разрешима. Так как  $A\Phi_i \psi_j = \varphi_i(z) \psi_j(\mu)$ , то (19.6.8) можно записать в виде

$$\sum_{k,l} a_{k,l} (\varphi_k \psi_l, \varphi_i \psi_j) = \sum_{k,l} a_{k,l} (\bar{S}_0 A^{-1} \varphi_k \psi_l, \varphi_i \psi_j) + \quad (19.7.9)$$

$$+ (F, \varphi_i \psi_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Из (19.7.9) видно, что в силу финитности  $\{\varphi_i\}$ ,  $\{\psi_j\}$  в левой части (19.7.8) возникает ленточная матрица. Отметим также, что матрица системы (19.7.8) положительно определена. Справедлива.

**Теорема 19.7.1** [6]. Пусть: 1)  $\Sigma(z), \Sigma_s(z)$  — кусочно-гладкие класса  $C^{(1)}$ ; 2)  $g_0(\mu, \mu') \in C^{(l)}([-1, 1] \times [-1, 1])$ ,  $l \geq 0$ ; 3)  $F(z, \mu) \in C^{(l)}([-1, 1])$  при каждом фиксированном  $z \in (\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i)$  и при каждом  $\mu \in [-1, 1]$ ,  $F(z, \mu) \in C^{(1)}[\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i]$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Тогда приближенные решения  $u^h$  сходятся при  $h, \Delta\mu \rightarrow 0$  к  $u(z, \mu)$  и имеет место оценка

$$\|A(u - u^h)\| \leq O\{h + (\Delta\mu)^l\}. \quad (19.7.10)$$

Рассмотрим случай, когда  $g_0(\mu, \mu')$  и  $F(z, \mu)$  имеют вид

$$g_0(\mu, \mu') = \sum_{j=0}^J g_{0,j} P_j(\mu) P_j(\mu'); \quad F(z, \mu) = \sum_{j=1}^J F_j(z) P_j(\mu), \quad (19.7.11)$$

где  $P_j(\mu)$  — ортонормированные полиномы Лежандра;  $g_{0,j}$  — постоянные;  $J$  — конечно-разностные, а относительно функций  $F_j(z)$  предполагаем, что они кусочно-гладкие класса  $C^{(1)}$  с возможными разрывами первого рода в точках  $\tilde{z}_i, i = 1, \dots, I$ .

В том случае, когда  $J$  невелико, приближенное решение  $u^h(z, \mu)$  удобно искать в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J a_{ij} \Phi_i(z, \mu) P_j(\mu), \quad (19.7.12)$$

где  $a_{ij}$  определяются из системы уравнений

$$(Au^h, A\Phi_i P_j) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_i P_j) + (F, A\Phi_i P_j), \quad (19.7.13)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, J.$$

Отметим, что при таком выборе базисных функций в левой части (19.7.13) имеем диагональную матрицу. Приближенные решения здесь сходятся к точному при  $h \rightarrow 0$ , причем

$$\|A(u - u^h)\| \leq O(h). \quad (19.7.14)$$

Пусть теперь в (19.7.2), (19.7.3) индикатриса и источник изотропны, то есть  $g_0 = 1$  и  $F = F(z)$ . При рассмотрении данной задачи функции  $\Phi_j(z, \mu)$  уже описывают зависимость решения от  $\mu$ . Поэтому нет необходимости вводить дополнительные базисные функции  $\psi_j(\mu)$ , что приводит к значительному сокращению числа базисных функций, а следовательно, и порядка решаемой системы линейных алгебраических уравнений. Ищем приближенное решение в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j(z, \mu), \quad (19.7.15)$$

где  $a_j$  определим из системы уравнений

$$(Au^h, A\Phi_j) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_j) + (F, A\Phi_j), \quad (19.7.16)$$

$$j = 1, \dots, N,$$

которая однозначно разрешима [в левой части (19.6.16) возникает диагональная матрица].

**Теорема 19.7.2** [6]. Если  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z)$ ,  $F(z) \in C^{(1)}(|\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i|)$ ,  $i = 1, \dots, I$  и  $g_0 = 1$ , то приближенное решение  $u^h$  сходится при  $h \rightarrow 0$  к точному решению задачи и имеют место оценки

$$\|A(u - u^h)\| \leq O(h); \quad \|u_0 - u_0^h\|_{L_1(0,H)} \leq O(h^2 |\ln h|), \quad (19.7.17)$$

где

$$u_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(z, \mu') d\mu'; \quad u_0^h = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^h(z, \mu') d\mu'.$$

Отметим, что в работе [237] приведены более точные оценки по сравнению с (19.7.17), которые были получены на основе более детального анализа дифференциальных свойств решения рассматриваемой задачи.

В работах Г. И. Марчука и В. И. Агошкова [4, 237] обосновано применение обобщенного метода Бубнова – Галеркина со специальными базисными функциями к решению уравнения переноса в сферически-симметричной и трехмерной геометриях. Там же изучена устойчивость алгоритма, а также рассмотрены некоторые задачи с дельта-источниками.

# 20

## Итерационные методы решения задач переноса

### 20.1. Специфика итерационных методов для задач переноса. Метод простой итерации

Краевые задачи для кинетического уравнения являются типичными многомерными задачами. Как правило, число неизвестных значений функций в системе разностных уравнений, аппроксимирующих кинетическое уравнение, столь велико, что при решении этих систем уравнений итерационными методами зачастую не представляется возможным из-за ограниченности памяти ЭВМ одновременно запомнить все неизвестные, полученные на одном итерационном шаге. Положение улучшится, если сузить класс кинетических уравнений, рассмотрев только кинетические уравнения с вырожденной индикатрисой рассеяния. Проиллюстрируем это на примере уравнения (19.1.4) с изотропным рассеянием ( $\bar{S} = S$ ). Для такого уравнения простая итерация или метод итераций столкновений по источникам строится так. По функции  $\varphi^k$  следующее приближение  $\varphi^{k+1}$  находим по формуле

$$\Omega \nabla \varphi^{k+1/2} + \Sigma \varphi^{k+1/2} = \Sigma_s S \varphi^k + f. \quad (20.1.1)$$

Предполагаем, что функция  $\varphi^{k+1/2}$  удовлетворяет краевым условиям и  $\varphi^{k+1} = \varphi^{k+1/2}$ . Поскольку мы часто будем пользоваться итерацией (20.1.1), то для удобства дальнейших рассуждений назовем операцию нахождения  $\varphi_0^{k+1/2} = S \varphi^{k+1/2}$  из решения (20.1.1) операцией  $K$  и результат ее обозначим

$$\varphi^{k+1/2} = K(S \varphi^k, f); \quad \varphi_0^{k+1/2} = S \varphi^{k+1/2} \quad (20.1.2)$$

(здесь и далее под  $\varphi_0$  будем понимать функцию  $S\varphi$ ). Из формулы (20.1.1) видно, что для нахождения  $\varphi^{k+1/2}$  вовсе не обязательно знать  $\varphi^k$  и запоминать в процессе итерации  $\varphi^{k+1/2}$ , а достаточно знать только  $S\varphi^k$  и образовывать по мере счета для запоминания лишь величины  $S\varphi^{k+1/2}$ . Функция  $S\varphi^k$  уже не зависит от  $\Omega$  и для запоминания ее требуется гораздо меньше, чем для  $\varphi^k$ , ячеек памяти ЭВМ. То же самое справедливо для невязки  $r^{k+1/2}$ , ибо

$$\begin{aligned} r^{k+1/2} &= f + \Sigma_s S\varphi^{k+1/2} - \Omega \nabla \varphi^{k+1/2} - \Sigma \varphi^{k+1/2} = \\ &= \Sigma_s S(\varphi^{k+1/2} - \varphi^k), \end{aligned}$$

а ошибка  $\eta^{k+1/2} = \varphi - \varphi^{k+1/2}$  удовлетворяет уравнению

$$\Omega \nabla \eta^{k+1/2} + \Sigma \eta^{k+1/2} = \Sigma_s S\eta^{k+1/2} + \Sigma_s S(\varphi^{k+1/2} - \varphi^k) \quad (20.1.3)$$

и, следовательно, невязка  $r^{k+1/2}$  и источник в (20.1.3) не зависят от  $\Omega$ . Не случайно поэтому операция  $K$  входит как составная часть во многие итерационные процессы, ускоряющие сходимость итераций для кинетического уравнения. Ввиду многомерности задач могут стать неприемлемыми многие хорошо разработанные и эффективные итерационные методы только потому, что они требуют запоминания полной информации о предыдущем приближении. Таким образом, специфика задач переноса с вырожденной индикатрисой рассеяния требует разработки таких быстро сходящихся итерационных методов, которые требовали бы запоминания не всей информации о проводимом итерационном шаге в пространстве  $D \times \Omega$ , а только части ее существенно меньшей размерности. Независимость  $r^{k+1/2}$  от  $\Omega$  после операции  $K$  открывает возможность эффективно использовать вариационные методы решения, ибо в этом случае существенно облегчается задача подсчета скалярных произведений, заданных в  $D \times \Omega$ .

В работе В. С. Владимирова [71] найдены условия, при которых метод простой итерации (20.1.2) сходится. Однако мы, как правило, не будем доказывать сходимость его и других методов в самом общем случае. Сходимость описываемых нами методов будем исследовать на модельной периодической задаче. Ее мы избрали по двум соображениям: во-первых, для этой задачи ме-



тод Фурье дает явное представление операторов задачи в виде алгебра функций, и поэтому довольно просто удается не только показать сходимость, но и оценить скорость сходимости через явным образом получаемые функции; во-вторых, периодическая задача — это задача, для которой медленнее всего сходятся итерационные методы и, следовательно, мы имеем возможность сравнивать различные итерационные методы при довольно неблагоприятной ситуации.

Каждой функции  $f$ , участвующей в наших рассуждениях, поставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$f = \sum f_n \exp(inx),$$

где  $f_{-n} = \bar{f}_n$ , а суммирование осуществляется по целочисленным индексам  $n = (n_1, n_2, n_3)$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Норму функции определим равенством  $\|f\| = \max_n |f_n|$  и сходимость, как правило, будем рассматривать в этой норме в пространстве последовательностей  $\{f_n\}$ , которое обозначим  $m$ .

Итак, рассмотрим  $2\pi$ -периодическую задачу для уравнения

$$-l^2(\Omega\nabla)^2 u + u = cSu + F(x, \Omega), \quad (20.1.4)$$

где  $0 \leq c \leq 1$ ;  $c, l = \text{const}$ . Решение задачи (20.1.4) дается формулами

$$u = \Sigma(1 + l^2(n\Omega)^2)^{-1}(c(1 - cr(l|n|))^{-1}F_n^1 + F_n(\Omega)) \exp(inx);$$

$$F_n^1 = S[(1 + l^2(n\Omega)^2)^{-1}F_n(\Omega)]; \quad (20.1.5)$$

$$u_0 = \Sigma(1 - cr(l|n|))^{-1}F_n^1 \exp(inx).$$

Операция  $K$  для уравнения (20.1.4) имеет вид

$$-l^2(\Omega\nabla)^2 u^{k+1/2} + u^{k+1/2} = cSu^k + F; \quad (20.1.6)$$

$$u_0^{k+1/2} = Su^{k+1/2}. \quad (20.1.7)$$

Очевидно, результат ее совпадает с соответствующей операцией (20.1.2), примененной к  $2\pi$ -периодической задаче для уравнения в несопряженной форме (20.1.1) при  $f(x, \Omega) = f(x, -\Omega)$ , если положить  $\Sigma^{-1} = l$ ;  $c = \Sigma_s/\Sigma$ ;  $F = f/\Sigma$ . Наименьшим собственным числом однородной задачи (20.1.4) является величина  $c^{-1} > 1$ .

Введем следующие обозначения. Пусть  $u$  — решение (20.1.4);  $u^\alpha$  — приближенное решение (20.1.4):

$$u_0^\alpha = Su^\alpha; \quad r_n = r(l|n|); \quad \lambda_n = l|n|; \quad \Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s;$$

$$\eta^\alpha(\mathbf{x}, \Omega) = u - u^\alpha = \Sigma \eta_n^\alpha(\Omega) \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x}); \quad (20.1.8)$$

$$\varepsilon^\alpha(\mathbf{x}) = S\eta^\alpha(x, \Omega) = \Sigma \varepsilon_n^\alpha \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x}); \quad (20.1.9)$$

$$u_0^\alpha = \Sigma u_{0n}^\alpha \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x}). \quad (20.1.10)$$

Исследуем сходимость простой итерации. Применяя формулы (20.1.5), видим, что

$$u_n^{k+1/2} = (1 + l^2(\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1}(cu_{0n}^k + F_n(\Omega)); \quad (20.1.11)$$

$$u_{0n}^{k+1/2} = cr_n u_{0n}^k + F_n^1. \quad (20.1.12)$$

Это значит, что для  $\varepsilon^\alpha$  справедливы соотношения

$$\varepsilon_n^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1/2} = cr_n \varepsilon_n^k, \quad (20.1.13)$$

или

$$\|\varepsilon^{k+1}\| \leq q \|\varepsilon^k\|, \quad (20.1.14)$$

где  $q = c$ .

Следовательно, метод простой итерации сходится при  $0 \leq c < 1$ .

## 20.2. Метод Л. А. Люстерника

Этот метод является одним из немногих классических методов ускорения сходимости итераций, которые можно эффективно применять для решения задач переноса. Метод для задач переноса был исследован в работах В. С. Владимирова [70, 71] и применен для расчетов В. Н. Морозовым [283].

Метод Л. А. Люстерника изложим, следуя работе [71]. Пусть требуется решить неоднородное уравнение переноса (19.1.18) в условиях, когда метод простой итерации сходится. Пусть  $\lambda_1$  — первое собственное значение задачи (19.1.27). Последовательные приближения строим по схеме

$$\bar{S}_0 \varphi^0 = F; \quad L_0 \varphi^i = \bar{S}_0 \varphi^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20.2.1)$$

а за приближенное решение берем функцию

$$u^k = \sum_{i=1}^k \varphi^i + (\lambda_1 - 1)^{-1} \varphi^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20.2.2)$$

Для случая изотропного рассеяния последовательные приближения можно переписать в эквивалентной форме:

$$L_0 \varphi^i = \varphi_0^{i-1}; \quad \varphi_0^i = S \varphi^i. \quad (20.2.3)$$

Тогда приближения для  $u_0$  примут вид

$$u_0^k = \sum_{i=1}^k \varphi_0^i + (\lambda_1 - 1)^{-1} \varphi_0^k. \quad (20.2.4)$$

Для периодической задачи с изотропным источником уравнения (20.2.1) для функции  $u_0^i$  [см. (20.1.10)] переходят в следующие соотношения:

$$c \varphi_{0\mathbf{n}}^0 = F_{\mathbf{n}}; \quad \varphi_{0\mathbf{n}}^i = c r_{\mathbf{n}} \varphi_{0\mathbf{n}}^{i-1} = c^{i-1} r_{\mathbf{n}}^i F_{\mathbf{n}}. \quad (20.2.5)$$

Учитывая, что  $\lambda_1 = c^{-1}$ ,  $r_0 = 1$ , из уравнения (20.2.4) получаем

$$u_{0\mathbf{n}}^k = r_{\mathbf{n}} F_{\mathbf{n}} \frac{1 - (c r_{\mathbf{n}})^k}{1 - (c r_{\mathbf{n}})} + \frac{c^k r_{\mathbf{n}}^{k-1}}{1 - c}. \quad (20.2.6)$$

Сравнивая (20.2.6) с (20.1.5), видим, что

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}^k = c^k r_{\mathbf{n}}^k F_{\mathbf{n}} (r_{\mathbf{n}} - 1) (1 - c r_{\mathbf{n}})^{-1} (1 - c)^{-1}. \quad (20.2.7)$$

Замечая, что когда  $\mathbf{n} = (0, 0, 0)$ , то  $r_0 = 1$ , а из (20.2.7) получаем  $\varepsilon_0^k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$ , и, следовательно,

$$\|\varepsilon^k\| \leq (c r(l))^k \|F\| (1 - c)^{-1}. \quad (20.2.8)$$

Учитывая, что  $0 < r(t) < 1$  при  $t > 0$ , из формул (20.2.7), (20.2.8) следует, что хотя скорость сходимости метода Люстерника больше скорости сходимости простой итерации, но сходимость замедляется при  $c \rightarrow 1 - 0$ ,  $l \rightarrow 0$ .

### 20.3. Метод оценки итерационных отклонений

В. Н. Морозовым [283] был разработан метод улучшения сходимости итераций для решения уравнения переноса, учитывающий специфику таких задач. В методе итерационных отклоне-

ний по значению  $\varphi_0^k = S\varphi^k$  делаем сначала операцию  $K$  (20.1.2). Тогда ошибка  $\eta^{k+1/2}$  удовлетворяет уравнению (20.1.3). Задача (20.1.3) упрощается следующим образом. Интегральный член в уравнении (20.1.3) заменим приближенно квадратурной формулой с одним узлом, а именно:

$$S\eta^{k+1/2} \approx \eta^{k+1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}). \quad (20.3.1)$$

Очевидно, что если решение задачи изотропно, то последнее соотношение является точным.

Учитывая (20.3.1), уравнение (20.1.3) для  $\eta^{k+1/2}$  заменим уравнением  $w^{k+1/2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{\Omega} \nabla w^{k+1/2} + \Sigma_0 w^{k+1/2} &= \Sigma_s (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k); \\ w^{k+1/2} &= 0 \quad \text{на } \Gamma \quad \text{при } \mathbf{\Omega} \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.3.2)$$

Задача (20.3.2) легко решается. Найдя  $w^{k+1/2}$ , положим

$$\varphi_0^{k+1} = \varphi_0^{k+1/2} + w_0^{k+1/2}. \quad (20.3.3)$$

Такой метод является балансным. Это значит, что он сохраняет для любых  $k$  общий баланс нейтронов.

В данном методе процесс нахождения функции  $w_0^{k+1/2}$  требует почти стольких же действий, сколько затрачивается в операции  $K$ . Сходимость этого метода исследована на периодической задаче [256].

Теперь рассмотрим этот метод применительно к самосопряженному уравнению (20.1.4) [210]. Уравнение для поправки  $w^{k+1/2}$  получается из уравнения (20.1.4), если в нем  $Su$  заменить  $u$ :

$$-l^2(\mathbf{\Omega} \nabla)^2 w^{k+1/2} + (1-c)w^{k+1/2} = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k), \quad (20.3.4)$$

или для коэффициентов Фурье в периодической задаче

$$\begin{aligned} l^2(\mathbf{n} \mathbf{\Omega})^2 w_{\mathbf{n}}^{k+1/2} + (1-c)w_{\mathbf{n}}^{k+1/2} &= c(cr_{\mathbf{n}} - 1)\varepsilon_{\mathbf{n}}^k, \\ w_{0\mathbf{n}}^{k+1/2} &= Sw_{\mathbf{n}}^{k+1/2} = c(1-c)^{-1}(cr_{\mathbf{n}} - 1)\varepsilon_{\mathbf{n}}^k r(\lambda'_{\mathbf{n}}), \end{aligned}$$

где  $\lambda'_{\mathbf{n}} = l|\mathbf{n}|(1-c)^{-1/2} \geq \lambda_{\mathbf{n}}$ .

Следовательно,

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}^{k+1} = \varepsilon_{\mathbf{n}}^{k+1/2} + w_{0\mathbf{n}}^{k+1/2} = t_{\mathbf{n}} \varepsilon_{\mathbf{n}}^k,$$

где

$$t_n = c[r_n - (l - c)^{-1}(1 - cr_n)r(l|n|(1 - c)^{-1/2})]. \quad (20.3.5)$$

Из формулы (20.3.5) легко увидеть, что  $\varepsilon_0^k \equiv 0$  при  $k \geq 1$ , а при каждом фиксированном  $n \neq 0$  и  $c \rightarrow 1 - 0$  величина  $t_n = O\left[-\frac{\pi}{2l|n|} \times (1 - r_n)(1 - c)^{-1/2}\right]$  стремится к  $-\infty$ . Следовательно, метод для самосопряженного уравнения расходится при значениях  $c$ , достаточно близких к единице.

К такому же результату придем и для несамосопряженного уравнения, если для нахождения поправки оператор  $S\varphi$  заменим  $(1/2) \times [\varphi(\mathbf{x}, \Omega) + \varphi(\mathbf{x}, -\Omega)]$ , ибо в этом случае результат итераций совпадает с итерациями, проведенными для уравнения в самосопряженной форме.

## 20.4. Итерационные схемы с балансными множителями и мультипликативными поправками

Изложим метод для решения кинетического уравнения. Интегрируя по  $\Omega \times D$  уравнение (19.1.4), где  $\tilde{S} = S$ , получаем уравнение баланса

$$\int_{\Gamma} \varphi_{1n} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \varphi_0 d\mathbf{x} = \int_D f_0 d\mathbf{x},$$

где  $\varphi_1 = S(\Omega\varphi)$ , а  $\varphi_{1n}$  — нормальная составляющая  $\varphi_1$  к поверхности  $\Gamma$ .

Определим величину  $\Delta(\varphi)$  отношением

$$\Delta(\varphi) = \frac{\int_D f_0 d\mathbf{x}}{\int_{\Gamma} \varphi_{1n} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \varphi_0 d\mathbf{x}}. \quad (20.4.1)$$

В работе В. Н. Морозова [283] предлагается для ускорения сходимости метод итераций с балансными множителями, состоящий в том, что для каждого  $k$ : а) выполняется операция  $K$  [см. (20.1.2)]; б) полученное значение  $\varphi_0^{k+1/2}$  нормируется так, чтобы было выполнено уравнение баланса нейтронов

$$\varphi_0^{k+1} = \Delta(\varphi_0^{k+1/2})\varphi_0^{k+1/2}. \quad (20.4.2)$$

Эта функция берется в качестве нового приближения. Доказательство сходимости описанного нелинейного процесса исследовано на периодической задаче (20.1.4) с изотропным источником [256].

При комбинировании метода Люстерника и метода балансных множителей видим, что результатом как одной, так и другой операции является точное восстановление лишь нулевой гармоники. Следовательно, при последовательном их применении одна из операций сработает впустую.

Т. А. Гермогеновой [101, 102] развит метод с мультипликативными поправками, выбираемыми из некоторого задаваемого множества функций. Изложим этот метод для самосопряженного уравнения (19.1.23).

Пусть  $u^{k+1/2}(\mathbf{x}, \Omega)$  получена в результате операции  $K$ . Положим  $u^{k+1}(\mathbf{x}, \Omega) = b^k(\mathbf{x})u^{k+1/2}(\mathbf{x}, \Omega)$ , где функция  $b^k(\mathbf{x})$  выбирается так, чтобы минимизировать функционал (19.1.25). Простые итерации сходятся в норме, порожденной функционалом (19.1.25), а поправки  $b^k$  могут только уменьшить значение этого функционала. Следовательно, последовательность  $u^{k+1}$  сходится к точному решению. Уравнение Эйлера для  $b^k$  будет уравнением в частных производных с коэффициентами, зависящими от  $u^{k+1/2}$ ; на границе области задается косая производная. Этот нелинейный метод близок к методу Л. В. Канторовича [156], но отличается от последнего тем, что единственная базисная функция, по которой идет разложение, сама образуется в процессе итераций.

На примере плоской задачи в слое  $0 \leq x \leq H$  для уравнения

$$-\mu^2 l \frac{\partial}{\partial x} l \frac{\partial u}{\partial x} + u = c \int_0^1 u d\mu + F(x, \mu) \quad (20.4.3)$$

изложим предложенную В. И. Лебедевым модификацию метода, в которой определяется функция  $v^k(x) = b^k(x) - 1$ . Поскольку  $b^k \rightarrow 1$  и  $u^{k+1/2} - u^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то, по-видимому, целесообразнее искать аддитивную поправку  $v^k$  к единице, стремящуюся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда ошибки, возникающие от округлений и от погрешности аппроксимации разностных уравнений для поправки, будут стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Итак, положим

$$u^{k+1}(x, \mu) = (1 + v^k(x))u^{k+1/2}(x, \mu). \quad (20.4.4)$$

Подставляя (20.4.4) в функционал (19.1.25), получаем уравнение для определения  $v^k(x)$ :

$$-\frac{l}{2} \left( D^k \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} v^k + \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} D^k v^k \right) + g^k v^k = c u^{k+1/2} (u_0^{k+1/2} - u_0^k), \quad (20.4.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g^k &= \int_0^1 \left[ l^2 \mu^2 \left( \frac{\partial u^{k+1/2}}{\partial x} \right)^2 + (u^{k+1/2})^2 \right] d\mu - c(u_0^{k+1/2}); \\ D^k &= \int_0^1 \mu^2 (u^{k+1/2})^2 d\mu; \quad \frac{dv^k}{dx} \Big|_{x=0, H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.4.6)$$

для основной задачи.

Сходимость метода одномерной периодической задачи (20.1.4) с неизотропным источником исследована в [256].

## 20.5. Квазидиффузионный метод

В.Я. Гольдиным [111] был предложен нелинейный итерационный метод, названный квазидиффузионным. Ускорение сходимости в нем достигается путем введения зависящего от пространственных координат коэффициента диффузии, который заново вычисляется в процессе итераций. Разберем этот метод на примере кинетического уравнения для плоскопараллельной геометрии:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + f(x, \mu) \quad (20.5.1)$$

при  $-H \leq x \leq H$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ , где  $f(x, \mu) = f(x, -\mu)^{1)}$ .

Пусть решение четно относительно  $x = 0$  и  $\varphi(H, \mu) = 0$ ,  $\mu < 0$ . Умножим (20.5.1) на  $\mu$  и, проинтегрировав результат по  $\mu$  от  $\mu = -1$  до  $\mu = 1$ , получим

<sup>1)</sup>В работе [111] этот метод рассмотрен для изотропного источника.

$$\frac{d}{dx}\varphi_2 + \Sigma\varphi_1 = 0, \quad (20.5.2)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^i \varphi d\mu. \quad (20.5.3)$$

Уравнение (20.5.2) перепишем в виде

$$\frac{d}{dx}D\varphi_0 + \Sigma\varphi_1 = 0, \quad (20.5.4)$$

где  $D = \varphi_2/\varphi_0$ . Из условий симметрии следует, что  $\varphi_1(0) = 0$ , а из граничных условий при  $x = H$  получаем

$$\frac{\varphi_1(H)}{\varphi_0(H)} = c_1, \quad (20.5.5)$$

где  $c_1 = \frac{\int_0^1 \mu \varphi d\mu}{\int_0^1 \varphi d\mu}$ ;  $x = H$  (здесь мы предполагаем, что  $\varphi_0 \geq \alpha > 0$ ).

Итерационный процесс строится следующим образом. Выполняем операцию (20.1.1), в результате которой находим

$$\varphi_0^{k+1/2}, \varphi_2^{k+1/2} \text{ и } \int_0^1 \mu \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu, \int_0^1 \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu.$$

Затем вычисляем  $D^{k+1/2}(x)$ ,  $c_1^{k+1/2}$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} D^{k+1/2}(x) &= \frac{\varphi_2^{k+1/2}}{\varphi_0^{k+1/2}}; \\ c_1^{k+1/2} &= \frac{\int_0^1 \mu \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu}{\int_0^1 \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (20.5.6)$$

Подставляя эти значения  $D^{k+1/2}(x)$ ,  $c_1^{k+1/2}$  в (20.5.4), (20.5.5), находим  $\varphi_1^{k+1}$ ,  $\varphi_0^{k+1}$  как решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}\varphi_1^{k+1} + \Sigma_0\varphi_0^{k+1} &= f_0(x), \quad \frac{d}{dx}D^{k+1/2}\varphi_0^{k+1} + \Sigma\varphi_1^{k+1} = 0, \\ \varphi_1^{k+1}(0) &= 0, \quad \varphi_1^{k+1}(H) = c_1^{k+1/2}(H). \end{aligned} \right\} \quad (20.5.7)$$

Коэффициент диффузии  $D$  и параметр  $c_1$  в граничном условии определяются однородными дробно-линейными функционалами, зависящими от  $\varphi$ . Поэтому можно ожидать слабой зависимости  $D$  и  $c_1$  от  $\varphi$  для достаточно регулярных функций  $\varphi$  в окрестности  $\mu = 0$ . Метод требует вычисления  $\varphi_2^{k+1/2}$ . Для получения квазидиффузионной системы уравнений в общем случае надо сконструировать уравнение баланса и три уравнения для величин  $\varphi_0 = S\varphi$ ,  $\varphi_1 = S(\Omega\varphi)$ .

Ш. С. Николайшвили [292] предложил применительно к одномерным задачам модификацию этого метода с использованием приближения Ивона – Мартенса. Если обозначить

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_1^n &= \frac{\int_0^1 \varphi \mu^n d\mu}{\int_0^1 \varphi d\mu}; \quad u = \int_0^1 \varphi d\mu; \\ \bar{\mu}_2^n &= \frac{\int_0^{-1} \varphi \mu^n d\mu}{\int_0^{-1} \varphi d\mu}; \quad v = \int_0^{-1} \varphi d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (20.5.8)$$

то уравнениям (20.5.7) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\bar{\mu}_1^1 u + \bar{\mu}_2^1 v) + \Sigma_0(u + v) &= f_0; \\ \frac{d}{dx}(\bar{\mu}_1^2 u + \bar{\mu}_2^2 v) + \Sigma(\bar{\mu}_1^1 u + \bar{\mu}_2^1 v) &= 0; \\ v(H) &= 0; \quad u(0) = v(0). \end{aligned} \right\} \quad (20.5.9)$$

Итерационный процесс проводим следующим образом. Пусть заданы  $u^k$ -,  $v^k$ -приближения для  $u$ ,  $v$ . Используя  $u^k$ ,  $v^k$ , с помощью операции  $K$  находим  $\varphi^{k+1/2}(x, \mu)$  и получаем по формулам (20.5.8)  $\bar{\mu}_1^1, \bar{\mu}_2^1, \bar{\mu}_1^2, \bar{\mu}_2^2$ . Подставляя их в систему (20.5.9) и решая задачу (20.5.9), находим новые значения  $u^{k+1}, v^{k+1}$

и т. д. Хотя уравнения (20.1.1), (20.5.1), (20.5.6), (20.5.9) при соответствующих краевых условиях являются согласованными, для их разностных аналогов это не обязательно так. В работе В. Е. Трощиева, В. Ф. Юдинцева, В. И. Федянина [357] для случая сферически-симметрических задач и при условии, что кинетическое уравнение решается дивергентными разностными схемами  $S_n$ -метода, получены согласованные разностные схемы метода квазидиффузии. Вопросы согласованности для общей геометрии весьма сложны. Это, а также пересчет на каждой итерации новых граничных условий (это может быть обременительным делом, например, в многомерных задачах) побудило некоторых авторов использовать, как в  $KP$ -методе, уравнения квазидиффузии лишь для нахождения поправки, удовлетворяющей на границе области более простым, априори заданным краевым условиям. Уравнение для поправки выводится в предположении, что на каждой итерации можно пренебречь разностью  $\frac{d}{dx}[(D - D^\nu)\varphi_0]$ .

В [256] показано, что сходимость нелинейных методов может замедляться или даже нарушаться при возрастании анизотропии источника.

## 20.6. $KP$ -метод

Опишем в общем виде  $KP$ -метод применительно к кинетическим уравнениям и обсудим некоторые способы построения операции  $P$  [202, 211, 212]. Удобнее рассматривать самосопряженную задачу (19.1.18). При четной индикатрисе рассеяния и четной функции источника это не накладывает никаких дополнительных ограничений, так как очевидно, что последовательные приближения метода итераций источников по столкновениям, которые в  $KP$ -методе рассматриваются как операции  $K$ , например, эквивалентны для краевых задач (19.1.2), (19.1.6) и (19.1.15), (19.1.20).

Предположим, что сходимость итераций рассматриваем в некотором банаховом пространстве ( $\mathcal{B}$ -пространстве) функций, определенных в области  $D$ . Предположим также, что все опе-

раторы, которыми определяется  $KP$ , существуют и определены в пространстве  $\mathcal{B}$ . Для простоты предположим, что рассеяние нейтронов изотропно. Это значит, что индикатриса рассеяния не зависит от  $\Omega$ , а  $\bar{S}_0 = cS$ .

Рассмотрим уравнение (19.1.18), где оператор  $L_0$  определен на множестве функций, удовлетворяющих краевому условию (19.1.17).

**1.** Выполняем операцию  $K$ , то есть

$$L_0 u^{k+1/2} = cu_0^k + F. \quad (20.6.1)$$

Операцию  $K$  используем только для вычисления  $u_0^{k+1/2} = Su_0^{k+1/2}$ . Задача (20.6.1) является краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка вдоль каждой траектории нейтрона с направлением  $\Omega$ ; она может быть решена методом прогонки. Итак, если рассматривать (20.6.1) как операторное уравнение, то

$$u^{k+1/2} = SL_0^{-1}(cu_0^k + F), \quad (20.6.2)$$

а  $\eta^{k+1/2}$  есть решение задачи

$$\tilde{L}_0 \eta^{k+1/2} = c\eta_0^{k+1/2} + F_1, \quad (20.6.3)$$

где  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ , а  $\tilde{L}_0$  — оператор  $L_0$ , определенный на функциях  $\eta$ , удовлетворяющих краевому условию

$$B\eta|_{\Gamma \times \Omega} = B(u - u^{k+1/2})|_{\Gamma \times \Omega}. \quad (20.6.4)$$

**2.** Операцию  $P$  строим следующим образом. Пусть задаче (20.6.3) ставится в соответствие краевая задача в области  $D$  для линейного дифференциального уравнения  $2n$ -го порядка:

$$Q_n w = P_n(cw + f_1). \quad (20.6.5)$$

Назовем это операторное уравнение  $P$ -уравнением. В нем  $Q_n$ ,  $P_n$  — дифференциальные операторы порядка  $2n$ , определенные на функциях  $w(x)$ , которые удовлетворяют краевым условиям

$$\tilde{B}(w - u + u^{k+1/2})|_{\Gamma} = 0, \quad (20.6.6)$$

в некотором смысле соответствующим краевым условиям

(20.6.4) и аппроксимирующих их. Предположим, что существует и сравнительно легко находится оператор  $(Q_n - P_n c)^{-1} P_n c$ . Тогда операция  $P$  состоит в нахождении решения задачи (20.6.5), (20.6.6) при  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ :

$$w^{k+1/2} = (Q_n - P_n c)^{-1} P_n c(u_0^{k+1/2} - u_0^k). \quad (20.6.7)$$

Далее полагаем

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + w^{k+1/2}. \quad (20.6.8)$$

За нулевое приближение  $u_0^0 = S u^0$  можно взять решение задачи (20.6.5) с  $f_1 = F$  при соответствующих краевых условиях. Между функциями  $u_0^{k+1}$  и  $u_0^k$  существует соотношение, которое получается, если в равенство (20.6.8) подставить результат операций (20.6.1), (20.6.7):

$$u_0^{k+1} = M c u_0^k + M_1 F, \quad (20.6.9)$$

где операторы  $M, M_1$  выражаются формулами

$$M = (I - Q_n^{-1} P_n c)^{-1} (S L_0^{-1} - Q_n^{-1} P_n); \quad (20.6.10)$$

$$M_1 = (I - Q_n^{-1} P_n c)^{-1} S L_0^{-1}.$$

Очевидно, что при  $\|M c\| = \bar{q} < 1$   $KP$ -метод, определенный формулами (20.6.1), (20.6.7), (20.6.8), сходится в пространстве  $\mathcal{B}$  со скоростью  $-\ln q$ . Также очевидно, что если метод простой итерации сходится, то существуют операторы сходящегося  $KP$ -метода (например, таковыми являются операторы с  $P_n \equiv 0$ ).

## 20.7. Сходимость $KP$ -метода

Сходимость  $KP$ -метода покажем для самосопряженного кинетического уравнения (19.1.23). Класс дифференциальных операторов  $Q_n, P_n$ , дающих сходящийся  $KP$ -метод, был описан леммой 1 и задачей  $A$  в работе [202] (см. задачу  $A$  в § 20.6). Далее будем использовать обозначения и результаты § 19.1. Функция  $u \in H_0$ , реализующая минимум функционала (19.1.25), является обобщенным решением задачи (19.1.23), и для  $G(v)$  справедливы неравенства (19.1.26), а оператор  $L_0^{-1} S_0$  является вполне непрерывным положительным и самосопряженным

в  $H_0$  оператором. Поэтому для уравнения (19.1.23) применимы утверждения, изложенные в [256], § 10.9.

Сходимость КР-метода докажем в унитарной норме, порожденной функционалом  $G(v)$ . Нетрудно видеть, что операция  $K$  уменьшает значение функционала  $G(v)$ .

Пусть операция  $P$  состоит в решении уравнений метода сферических гармоник  $P_{2n-1}$ -приближении с граничными условиями Маршака – Владимирова [71]. В обозначениях работы [71] эти уравнения имеют вид

$$L^{(n)}w^{k+1/2} = \bar{S}_0^{(n)}w^{k+1/2} + F^{(n)}, \quad (20.7.1)$$

где для операции  $P$  имеем  $F^{(n)} = \bar{S}_0^{(n)}(u^{k+1/2} - u^k)$ . Окончательно

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + w^{k+1/2}. \quad (20.7.2)$$

В уравнении (20.7.1) функция  $w^{k+1/2}$  принадлежит пространству функций, представимых в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_i \psi_{2k,i}(\mathbf{x}) Y_{2k,i}(\Omega), \quad (20.7.3)$$

где функции  $\psi_{2k,i}(\mathbf{x})$  пробегают соболевское пространство  $W_2^{(1)}(D)$  [340], а  $Y_{2k,i}(\Omega)$  — сферические функции. Это пространство функций  $w$  обозначим  $H'$ . Тогда  $(\dots)^n$  в формуле (20.7.1) означает проектирование на это пространство. В работе В.С. Владимирова [71] показано, что функция  $w \in H'$ , реализующая  $\min_{W \in H'} G(w)$ , является решением уравнения (20.7.1) при соответствующей правой части. Следовательно, КР-метод сходится в  $H_0$  [206].

Пусть теперь операция  $P$  состоит в решении краевой задачи для  $P_{1I}$ -уравнений, рассмотренной в § 19.4. Пусть  $H'$  — пространство кусочно-постоянных по  $\Omega$  функций, на котором определены  $P_{1I}$ -уравнения. В § 19.4 показано, что решение  $P_{1I}$ -уравнений реализует  $\min_{W \in H'} G(w)$ . Следовательно, если за операцию  $P$  взять решение краевой задачи для  $P_{1I}$ -уравнений, то такой КР-метод сходится в  $H_0$  [206].

Заметим, что в обоих методах ускорения сходимости поправка  $w^{k+1/2}$  не удовлетворяет точно краевым условиям: она не ле-

жит в области определения оператора  $L_0$ , однако лежит в области определения обобщенных операторов задачи.

## 20.8. Решение кинетического уравнения методом расщепления

Рассмотрим нестационарное односкоростное уравнение

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}', t) d\Omega' + f(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t). \quad (20.8.1)$$

Для уравнения (20.8.1) поставим смешанную задачу Коши

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{\Omega} \mathbf{n} < 0 \quad \mathbf{x}, t \in \gamma, \quad (20.8.2)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, 0) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{\Omega} \in D \times \Omega \quad (20.8.3)$$

в цилиндрической области  $\Pi = D \times \Omega \times T$  с основанием  $D \times \Omega$  и боковой границей  $\gamma = \Gamma \times T$ . В этом параграфе используем обозначения § 19.1.

Наряду с нестационарной задачей (20.8.1)–(20.8.3) рассмотрим стационарную задачу (19.1.4), (19.1.6) при  $g(\mu_0) = 1$ . Решение ее будем искать в классе  $D_0$  (см. § 19.1). Для интегрирования задачи (20.8.1)–(20.8.3) используем схему расщепления [258]:

$$\frac{\varphi^{k+1/2} - \varphi^k}{\tau} + L_2(\alpha \varphi^{k+1/2} + \beta \varphi^k) = \bar{f}; \quad (20.8.4)$$

$$\frac{\varphi^{k+1} - \varphi^{k+1/2}}{\tau} + L_1(\alpha \varphi^{k+1} + \beta \varphi^{k+1/2}) = 0, \quad (20.8.5)$$

где  $L_2 = \Sigma I - \Sigma_s S$ ,  $L_1 = \mathbf{\Omega} \delta$  — разностные аппроксимации операторов  $\Lambda_2 = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega'$ ,  $\Lambda_1 = \mathbf{\Omega} \nabla$  соответственно;  $\bar{f}$  — аппроксимация  $f$ ;  $\tau = v \Delta t$ ;  $\alpha > 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\alpha + \beta = 1$ .

Расщепляя оператор второго дробного шага, получаем схему полного расщепления.

$$\frac{\varphi^{k+1/4} - \varphi^k}{\tau} + L_2(\alpha \varphi^{k+1/4} + \beta \varphi^k) = \bar{f}; \quad (20.8.6)$$

$$\frac{\varphi^{k+(s+1)/4} - \varphi^{k+s/4}}{\tau} + L_{1s}(\alpha \varphi^{k+(s+1)/4} + \beta \varphi^{k+s/2}) = 0, \quad (20.8.7)$$

где  $L_1 = L_{11} + L_{12} + L_{13}$ ,  $L_{1i}$  — аппроксимации одномерных операторов  $\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Основная цель наших исследований — решение стационарной задачи (19.1.4), (19.1.6). Сформулируем некоторые свойства операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  в пространстве  $L_2(D \times \Omega)$ .

**Лемма 20.8.1.** Оператор  $\Lambda_2$  при  $\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s > 0$  положительно определен.

**Лемма 20.8.2.** Оператор  $\Lambda_1$  является положительным.

**Лемма 20.8.3.** Оператор  $(I + \tau \Lambda_1)^{-1}$  существует и ограничен из  $L_2(D \times \Omega)$  в  $D_0$ , причем  $\|(I + \tau \Lambda_1)^{-1} F\| \leq (1 - \exp(-d/\tau)) \times \|F\|$ ,  $F \in L_2(D \times \Omega)$ , где  $d$  — диаметр области  $D$ .

Рассмотрим теперь самосопряженную формулировку задачи (19.1.4), (19.1.6). Для этого уравнение (19.1.15) вдоль характеристик  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \xi \Omega$  запишем в виде

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Sigma u = \frac{\Sigma_s}{4\pi} u_0 + \bar{F}(\mathbf{x}, \Omega), \quad (20.8.8)$$

где  $\bar{F} = F \Sigma$ , а функция  $u(\mathbf{x}' + \xi \Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Sigma u|_{\Gamma_{-\Omega}} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} - \Sigma u|_{\Gamma_{\Omega}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.8.9)$$

Рассмотрим операторы

$$\Lambda'_1 = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} + \Sigma_0 I; \quad \Lambda'_2 = \Sigma_s(I - S), \quad (20.8.10)$$

где штрих означает, что операторы  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$  связаны с задачей (20.8.8), (20.8.9). Отметим свойства операторов  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$ .

**Лемма 20.8.4.** Оператор  $\Lambda'_1$  положительно определен при  $\Sigma_0 \geq 0$ .

**Лемма 20.8.5.** Оператор  $\Lambda'_2$  положительно полуопределен.

Утверждения лемм 20.8.1–20.8.5 являются следствиями результатов работы В. С. Владимирова [71]. Кроме перечисленных свойств отметим следующие свойства операторов  $\Lambda_2$  и  $\Lambda'_2$ : они

ограниченные и самосопряженные в  $L_2$ , причем преобразуют любую функцию из  $L_2$  снова в функцию из  $L_2$ . При  $\Sigma_0 = 0$  оператор  $\Lambda_2$  становится положительно полуопределенным.

Введем в линейном множестве  $\tilde{D}_0$  и соответственно в  $D_0$  норму, положив  $\|\varphi\|_1 = \|(I + \tau\Lambda_1)\varphi\|$ ;  $\varphi \in \tilde{D}_0$ ;  $\|\varphi\|_2 = \|(I + \tau\Lambda'_1)\varphi\|$ ;  $\varphi \in D_0$ , и отметим неравенства  $\|\varphi\| \leq (1 - \exp(-d/\tau))\|\varphi\|_1$ ;  $\varphi \in \tilde{D}_0$ ;  $\|\varphi\| \leq (1 - \exp(-d/\tau))\|\varphi\|_2$ ;  $\varphi \in D_0$ . Норма  $\|\varphi\|$  понимается как норма в пространстве  $L_2$ . Отсюда из сходимости в  $\tilde{D}_0$  (соответственно в  $D_0$ ) вытекает сходимость в  $L_2$ . Принимая, что область определения оператора  $\Lambda_1$  составляют функции множества  $\tilde{D}_0$ , а область определения оператора  $\Lambda'_1$  — функции множества  $D_0$ , краевую задачу (19.1.4), (19.1.6) можно записать в виде

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\varphi = f, \quad (20.8.11)$$

а краевую задачу (20.8.8), (20.8.9) — в виде

$$(\Lambda'_1 + \Lambda'_2)\varphi = f. \quad (20.8.12)$$

Для решения задачи (20.8.11) построим итерационный метод

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - a\tau B(\Lambda\varphi^k - f); \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (20.8.13)$$

где

$$B = [(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)]^{-1}; \quad (20.8.14)$$

$a, \tau$  — итерационные параметры. Формальная подстановка вместо  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  операторов  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$  в соотношения (20.8.13) и (20.8.14) дает итерационные методы для решения задачи (20.8.12). Докажем сходимость метода (20.8.13) к решению задачи (20.8.11) или (20.8.12). Справедлива

**Лемма 20.8.6 [256].** При всех  $0 < \tau < \infty$

$$\|R\| = \|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| < 1 \quad (20.8.15)$$

на классе функций  $\tilde{D}_0$ ,

$$\|R'\| = \|(I - \tau\Lambda'_2)(I + \tau\Lambda'_2)^{-1}(I - \tau\Lambda'_1)(I + \tau\Lambda'_1)^{-1}\| < 1 \quad (20.8.16)$$

на классе функций  $D_0$ .

Основываясь на лемме 20.8.6 в [256] доказана следующая теорема.



**Теорема 20.8.1.** При любом начальном приближении  $\varphi^0 \in \tilde{D}_0$ ,  $0 < \tau < \infty$ ,  $0 < a \leq 2$  метод (20.8.13) сходится в  $L_2$  к единственному решению задачи (20.8.11).

Доказательства остаются в силе при  $g = g(\mu_0) \neq 1$ . В предположении неизотропности рассеяния справедлива

**Лемма 20.8.8 [256].** Оператор

$$\Lambda = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega} g(\mu_0) d\Omega' \quad (20.8.17)$$

положительно определен при  $\Sigma_0 > 0$  и положительно полуопределен при  $\Sigma_0 = 0$ .

Полагая  $\tau = v\Delta t$ , видим, что алгоритм (20.8.13) при  $a = 2$  применим для решения задачи (20.8.1)–(20.8.3). При этом оператор  $T = (I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)$  является оператором шага. Область определения оператора плотна в  $L_2(D \times \Omega)$ . Выполнение неравенства  $\|T\| < 1$  при любом  $\tau > 0$  обеспечивает равномерную ограниченность семейства операторов при всех  $j > 0$ . Кроме этого, при выполнении условий леммы 20.8.6 имеет место неравенство  $\|(I + \tau\Lambda)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| \leq \|(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| \cdot \|(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| < 1$  при любом  $0 < \tau < \infty$ ,  $\varphi \in \tilde{D}_0$ . Указанные свойства оператора  $T$  гарантируют устойчивость счета. Непосредственная проверка показывает, что имеется аппроксимация по  $t$ . Тогда по теореме эквивалентности получим сходимость расщепленной задачи (20.8.11) к решению нестационарной задачи (20.8.1)–(20.8.3).

При практической реализации алгоритмов численного решения кинетического уравнения методом расщепления возможны различные схемы и их модификации. Общие принципы построения таких схем и постановки граничных условий для схем расщепления обсуждаются в работе [258]. Применим метод:

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)(\varphi^{k+1} - \varphi^k) = -a\tau(\Lambda\varphi^k - f). \quad (20.8.18)$$

Введем вспомогательные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и представим уравнение (20.8.18) в виде системы уравнений:

$$(I + \tau \Lambda_2) \varphi_1^{k+1} = a \tau r^k; \quad (I + \tau \Lambda_1) \varphi_2^{k+1} = \varphi_1^{k+1}; \quad \varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi_2^{k+1}, \quad (20.8.19)$$

где  $r^k = f - A\varphi^k$  — невязка. Интегрируя первое уравнение (20.8.19) по всем направлениям  $\Omega$ , получаем

$$(I + \tau \Sigma_0) \varphi_{10}^{k+1} = a \tau r_0^k. \quad (20.8.20)$$

После этого из (20.8.19) с использованием уравнения (20.8.20) находим

$$\varphi_1^{k+1} = \frac{a\tau}{1 + \tau \Sigma} \left[ \frac{\Sigma_s r_0^k}{4\pi(1 + \tau \Sigma_0)} + r^k \right]. \quad (20.8.21)$$

Второе уравнение (20.8.19) с граничными условиями решается как соответствующая краевая задача для дифференциального уравнения. Задачу для него можно записать в виде

$$\Omega \nabla \psi + \psi / \tau = g / \tau; \quad \psi|_{\Gamma} = 0; \quad \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (20.8.22)$$

где  $\psi = \varphi_2^{k+1}$ ;  $g = \varphi_1^{k+1}$ .

Введем в рассмотрение формальный параметр  $\xi$  и задачу (20.8.22) дополним следующей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} + \Omega_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} &= 0; \\ \tilde{\psi}|_{\xi=0} &= g / \tau, \quad \tilde{\psi}|_{\Gamma} = 0, \quad \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.8.23)$$

Нетрудно убедиться, что решением задачи (20.8.22) является функция

$$\psi = \int_0^{\infty} \tilde{\psi} \exp(-\xi / \tau) d\xi. \quad (20.8.24)$$

Уравнение (20.8.23) допускает расщепление на одномерные задачи. С этой целью интервал  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  разобьем на частичные интервалы шириной  $\Delta \xi = \xi_{\rho+1} - \xi_{\rho}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial \xi} + \Omega_1 \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x} &= 0, \quad \tilde{\psi}_1^\rho = \tilde{\psi}^\rho; \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial \xi} + \Omega_2 \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial y} &= 0, \quad \tilde{\psi}_2^\rho = \tilde{\psi}_1^{\rho+1}; \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial \xi} + \Omega_3 \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial z} &= 0, \quad \tilde{\psi}_3^\rho = \tilde{\psi}_2^{\rho+1}. \end{aligned} \right\} \quad (20.8.25)$$

Решение задачи (20.8.23)  $\tilde{\psi}^{\rho+1}$  найдется из соотношения  $\tilde{\psi}^{\rho+1} = \tilde{\psi}_3^{\rho+1}$ . Полученная система дифференциальных уравнений (20.8.25) в частных производных позволяет найти решение задачи (20.8.23) на системе точек  $\xi_k$ . Продолжение искомого решения на всю область проводится с помощью подходящих квадратурных формул.

## 20.9. О некоторых монотонных схемах расщепления

Для кинетического уравнения переноса Г. И. Марчуком и У. М. Султангазиным [262, 349] предложены монотонные схемы расщепления, при которых решения остаются в классе положительных функций. Рассмотрим эти схемы применительно к кинетическому уравнению для плоской геометрии (20.5.1) при следующих условиях:

$$\varphi(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0; \quad \varphi(H, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (20.9.1)$$

Введем операторы

$$\Lambda_1 = \mu \frac{\partial}{\partial x}; \quad \Lambda_2 = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu. \quad (20.9.2)$$

При этом уравнение (20.5.1) запишется в виде (20.8.11). Обозначим  $D(\Lambda_1)$  область определения оператора  $\Lambda_1$ . Здесь  $D(\Lambda_1)$  есть класс функций, суммируемых с квадратом вместе со своими производными первого порядка по  $x$  и удовлетворяющих граничным условиям (20.9.1). Пусть  $f(x, \mu) \in D(\Lambda_1)$ ;  $\Lambda_1 f \in D(\Lambda_1)$ .

Тогда задаче (20.5.1), (20.9.1) можно поставить в соответствие нестационарную задачу

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = f(x, \mu). \quad (20.9.3)$$

Решение задачи (20.9.3) связано с решением исходной стационарной задачи следующим образом:

$$f(x, \mu) = \int_0^\infty \psi(t, x, \mu) dt. \quad (20.9.4)$$

Оператор  $\Lambda_1$  является производящим оператором сжимающей полугруппы  $S$ . Тогда любое решение  $\psi(t) \in L_2(0, \infty)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(t) = S(t, 0)f - \int_0^\infty S(t, \tau)\Lambda_2\psi(\tau)d\tau. \quad (20.9.5)$$

Для приближенного построения решения последнего уравнения рассмотрим задачу

$$\hat{\psi}(0) = f; \quad \frac{\partial \check{\psi}}{\partial t} + \Lambda_1\check{\psi} = 0; \quad \check{\psi}(t_k) = \hat{\psi}(t_k) - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\hat{\psi}(t_k); \quad (20.9.6)$$

$$\hat{\psi}(t_{k+1}) = \check{\psi}(t_{k+1}) - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\hat{\psi}(t_{k+1}). \quad (20.9.7)$$

На первом шаге в промежутке  $0 \leq t \leq \tau$  решается задача Коши:

$$\frac{\partial \check{\psi}}{\partial t} + \Lambda_1\check{\psi} = 0; \quad \check{\psi}(0) = f(x, \mu) - \frac{\tau}{2}\Lambda_2f(x, \mu).$$

На втором шаге в этом же промежутке решается интегральное уравнение (20.9.7). Затем процесс определения  $\check{\psi}(t)$ ,  $\hat{\psi}(t)$  повторяется по схеме (20.9.6), (20.9.7). Функция  $\hat{\psi}(t)$ , построенная таким образом, является решением задачи (20.9.6).

Исключая  $\check{\psi}$  из уравнений (20.9.6), (20.9.7), получаем

$$\hat{\psi}(t_{k+1}) = S(t_{k+1}, t_k)\hat{\psi}(t_k) - \frac{\tau}{2}[S(t_{k+1}, t_k)\Lambda_2\hat{\psi}(t_k) + \Lambda_2\hat{\psi}(t_{k+1})]. \quad (20.9.8)$$

С другой стороны, из уравнения (20.9.5) вытекает

$$\psi(t_{k+1}) = S(t_{k+1}, t_k)\psi(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(t_{k+1}, \tau)\Lambda_2\psi(\tau)d\tau. \quad (20.9.9)$$

Сравнивая (20.9.8) и (20.9.9), можно установить, что уравнение (20.9.6) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Устойчивость решения задачи (20.9.6) исследована в [256]. Из устойчивости решения и аппроксимации (20.9.6) следует сильная сходимость  $\hat{\psi}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  к решению задачи (20.9.3).

Укажем еще один способ решения задачи (20.5.1), (20.9.1). Рассмотрим следующую схему расщепления:

$$\begin{aligned}(I + \tau\Lambda_2)\varphi^{k+1/2} &= (I - \tau\Lambda_2)\varphi^k + \frac{\tau f}{2}; \\ (I + \tau\Lambda_1)\varphi^{k+1} &= (I - \tau\Lambda_1)\varphi^{k+1/2} + \frac{\tau f}{2}.\end{aligned}\tag{20.9.10}$$

Метод (20.9.10) сходится при любом  $\tau > 0$ , причем  $\varphi^{k+1} + \varphi^{k+1/2} \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $\varphi$  — точное решение задачи (20.5.1), (20.9.1) [262, 349]. Его можно записать в несколько иной форме:

$$\begin{aligned}(I + \tau\Lambda_2)\psi^{k+1/2} &= 2\varphi^k + \frac{\tau f}{2}; \\ (I + \tau\Lambda_1)\psi^{k+1} &= 2(\psi^{k+1/2} - \varphi^k) + \frac{\tau f}{2}; \\ \varphi^{k+1} &= \psi^{k+1} - (\psi^{k+1/2} - \varphi^k).\end{aligned}\tag{20.9.11}$$

При этом  $\psi^{k+1} \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Метод расщепления в виде (20.9.11) содержит операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  только в неявной форме. Поэтому для реализации данной схемы потребуется меньшее количество арифметических операций по сравнению с обычными четырехслойными схемами расщепления. Следует отметить, что при некоторых ограничениях на  $\tau$  можно добиться монотонности схемы [256].

## 20.10. Метод сопряженных градиентов решения кинетических уравнений

В настоящем параграфе изложены результаты Ю. А. Кузнецова [181, 183, 184] по применению обобщенного метода сопряженных градиентов для решения систем сеточных уравнений

$$Au = f, \tag{20.10.1}$$

где

$$A = L - S = \tilde{L} - \tilde{S}; \quad L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ \tilde{\Lambda} & \Lambda^T \end{bmatrix} + \Sigma;$$

$$S = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{S} = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_2 & C_2 \\ C_2 & C_2 \end{bmatrix},$$

а  $\Lambda, \tilde{\Lambda}, C_1, C_2$  — заданные матрицы [256] (§ 9.5). Используя свойство матрицы системы (20.10.1), укажем конкретные способы выбора матриц  $D$  и  $H$ , которые обеспечивают  $A^T DA$ -самосопряженность и положительную определенность матрицы  $HA$  в пространстве  $U = (I - HA)E_n$ .

**1. Общий случай.** Выберем  $D = H = \tilde{L}^{-1}$  и покажем, что матрица  $\tilde{L}^{-1}$  является самосопряженным оператором в пространстве  $U_A = (I - AH)E_n = \tilde{S}\tilde{L}^{-1}E_n = \tilde{S}E_n$  (положительная определенность  $\tilde{L}^{-1}$  в  $U_A$  следует из положительной определенности  $\tilde{L}^{-1}$  в пространстве  $E_n$ ), установим  $A^T DA$ -самосопряженность и положительную определенность матрицы  $AH = I - L^{-1}\tilde{S}$  в пространстве  $U$ .

Действительно, так как  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}$  — симметричная матрица, то для всех  $\psi = \tilde{S}v$ ,  $\varphi = \tilde{S}w$  из  $U_A$  ( $v, w$  — некоторые векторы из  $E_n$ ) имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{L}^{-1}\psi, \varphi) &= (\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, \tilde{S}w) = (\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) = (v, \tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) = \\ &= (\tilde{S}v, \tilde{L}^{-1}Sw) = (\psi, \tilde{L}^{-1}\varphi), \end{aligned} \tag{20.10.2}$$

а, следовательно,  $\tilde{L}^{-1}$  является самосопряженным оператором в  $U_A$ .

Для доказательства  $A^T DA$ -самосопряженности и положительной определенности матрицы  $HA$  в пространстве  $U$  достаточно показать, что матрица  $HA$  является  $D$ -самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве  $U_A$ . Пусть  $\varphi = \tilde{S}v$  и  $\psi = \tilde{S}w$  — некоторые произвольные векторы пространства  $U_A$  ( $v, w \in E_n$ ). Тогда, так как матрицы  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}$  и  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}$  симметричны, то

$$\begin{aligned}
(A\tilde{L}^{-1}\psi, \varphi)_{\tilde{L}^{-1}} &= (\tilde{L}^{-1}(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\psi, \varphi) = (\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) - \\
&- (\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) = (v, S(\tilde{L}^{-1} - \tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1})\tilde{S}w) = (\psi, AH\varphi)_{\tilde{L}^{-1}},
\end{aligned}
\tag{20.10.3}$$

а, следовательно, матрица  $AH$  является  $\tilde{L}^{-1}$ -самосопряженным оператором в пространстве  $U_A$ . Из доказанного и инвариантности пространства  $U_A$  относительно матрицы  $I - AH = \tilde{S}\tilde{L}^{-1}$  вытекает, что  $U_A$  является линейной оболочкой  $D\tilde{L}^{-1}$  — ортонормированной системы собственных векторов  $\tilde{\psi}_r, \dots, \tilde{\psi}_1$  матрицы  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}$ , соответствующих ее собственным числам  $\mu_r \leq \dots \leq \mu_1 < 1$ , где  $r = rg\tilde{S}$ .

Таким образом, для любого  $\varphi \in U_A$  выполняется неравенство

$$(AH\varphi, \varphi)_D \geq (1 - \lambda_1)(\varphi, \varphi)_D, \tag{20.10.4}$$

и, следовательно, матрица  $AH$  является  $D = \tilde{L}^{-1}$  — положительно определенным оператором в пространстве  $U_A$ .

Таким образом, если использовать дополнительные обозначения  $z_k = \tilde{S}\rho_k$  и  $y_k = A\rho_k$  для выбранных матриц  $D$  и  $H$ , обобщенный метод сопряженных градиентов принимает вид

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{S}u^0 &= \tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\varphi + \tilde{S}\tilde{L}^{-1}f; \quad \xi^0 = \tilde{S}\tilde{L}^{-1}(A\varphi - f); \\
\tilde{S}u^k &= \tilde{S}u^{k-1} - (1/q_k)[\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\xi^{k-1} - e_{k-1}(\tilde{S}u^{k-1} - \tilde{S}u^{k-2})]; \\
\xi^k &= \xi^{k-1} - (1/q_k)[(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\xi^{k-1} - e_{k-1}(\xi^{k-1} - \xi^{k-2})];
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
e_{k-1} &= \begin{cases} 0 & k = 1; \\ q_{k-1} \frac{\|\xi^{k-1}\|_C^2}{\|\xi^{k-2}\|_C^2}, & k > 1; \end{cases} \\
q_k &= \frac{\|(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\xi^{k-1}\|_{\tilde{L}^{-1}}^2}{\|\xi^{k-1}\|_C^2} - e_{k-1}, \quad k = 1, \dots, k_\varepsilon; \\
u^{k_\varepsilon+1} &= \tilde{L}^{-1}(\tilde{S}u^{k_\varepsilon} + f),
\end{aligned} \right\} \tag{20.10.5}$$

где  $C = \tilde{L}^{-1} - \tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}$  — самосопряженная и положительно определенная в пространстве  $U_A$  матрица.

Рассмотрим на примере системы (20.10.1), возникающей при аппроксимации кинетического уравнения для сферической геометрии, некоторые вопросы практической реализации предлагаемого метода. Нетрудно видеть, что поскольку матрица  $\tilde{L}$  является блочной нижней треугольной матрицей с диагональными блоками порядка  $m$ , то при произвольной индикатрисе рассеяния  $g = g(r, \mu_0)$  каждый шаг метода (20.10.5) требует  $O(Nm^3)$  арифметических действий. Если же индикатриса рассеяния четная по переменной  $\mu_0$  функция, то есть  $g = g(r, \mu_0) = g(r, -\mu_0)$ , то  $\tilde{L} = L$ , а, следовательно, каждый шаг процесса требует только  $O(Nm)$  арифметических действий.

Очень важным на практике является случай, когда индикатриса рассеяния имеет вид

$$g(r, \mu_0) = \sum_{i=0}^t a_i(r) \mu_0^i. \quad (20.10.6)$$

В этом случае

$$g(r, \mu_0) - g(r, -\mu_0) = 2 \sum_{i=0}^{t_0} a_{2i-1} \mu_0^{2i-1}, \quad (20.10.7)$$

где  $t_0 = [(t+1)/2]$ , и, следовательно, ранг матрицы  $C_1 - C_2 = \sum_{i=0}^{t_0} [\hat{\mu}^{2i-1} Q \hat{\mu}^{2i-1}] \otimes \hat{a}_{2i-1}$  не превосходит величины  $Nt_0$ . Здесь

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (20.10.8)$$

— матрица порядка  $m$ ,  $\hat{a}_i = \text{diag}\{a_{i1}, \dots, a_{iN}, i = \overline{0, t}\}$ . Нетрудно показать, что для специального вида индикатрисы (20.10.8) общее число арифметических действий на итерацию не превосходит величины  $O(Nmt_0^2)$ , а при неотрицательных коэффициентах и  $a_{2i-1}$ ,  $i = \overline{1, t_0}$  — величины  $O(Nmt_0)$ . При этом общий объем требуемых ячеек памяти ЭВМ, достаточных для реализации процесса, является величиной  $O(Nt_0)$ .

**2. Частный случай.** Предположим, что индикатриса является четной функцией по переменной  $\mu_0$  и матрица  $S$  положительно полуопределена в  $E_n$ . Тогда матрицы  $S$  и  $S^+$ , где  $S^+$  —



обобщенная обратная для матрицы  $S$  матрица, являются само-сопряженными и положительно определенными операторами в пространстве  $SE_n$  [256].

Выберем  $H = L^{-1}$  и  $D = S^+$  и покажем, что матрица  $AH$  является  $D$ -самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве  $U_A = (I - AH)E_n = SL^{-1}E_n = SE_n$ , и, следовательно, для решения системы (20.10.1) применим обобщенный метод сопряженных градиентов. Так как для четной по переменной  $\mu_0$  индикатрисе

$$S = S_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то матрица  $S$  положительно полуопределена в  $E_n$  только тогда, когда матрица  $S_1$  положительно полуопределена в  $E_{n/2}$ . Нетрудно также видеть, что

$$S^+ = \frac{1}{4} C_1^+ \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad S^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_1^{1/2} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$[S^+]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [S^+]^{1/2} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, поскольку  $S^{1/2}[S^+]^{1/2}\psi = \psi$  для любого  $\psi \in SE_n$ , то

$$\begin{aligned} (AH\psi, \varphi)_{S^+} &= ((I - SL^{-1})\psi, \varphi) = ((I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2})\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) = \\ &= (\tilde{\psi}, (I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2})\tilde{\varphi}) = (\psi, AH\varphi)_{S^+} \end{aligned} \quad (20.10.9)$$

для любых  $\psi, \varphi \in SE_n$ , где  $\tilde{\psi} = [S^+]^{1/2}\psi$ ,  $\tilde{\varphi} = [S^+]^{1/2}\varphi$  и  $T = I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2}$  — симметричная матрица, чем  $D$ -самосопряженность матрицы  $AH$  в пространстве  $U_A$  доказана. Далее, так как все собственные числа матрицы  $S^{1/2}L^{-1}S^{1/2}$  и  $L^{-1}S$  совпадают и  $\rho(L^{-1}S) < 1$ , то матрица  $T$  будет положительно определена в  $E_n$ , и, следовательно, матрица  $AL^{-1}$  будет  $S^+$ -положительно определена в пространстве  $U_A$ , причем будет выполняться неравенство

$$(AH\varphi, \varphi)_{S^+} \geq (1 - \rho(L^{-1}S))(\varphi, \varphi)_{S^+}. \quad (20.10.10)$$

Таким образом, для решения системы (20.10.1) применим обобщенный метод сопряженных градиентов с выбранными

матрицами  $D = S^+$  и  $H = L^{-1}$ . Напервый взгляд основную трудность при реализации формул (20.10.5) составляет участие в вычислении скалярных произведений матрицы  $S^+$ , прямое нахождение которой в общем случае весьма трудоемко. Очень простой эта задача оказывается лишь в случае изотропного рассеяния, когда  $g(\mu_0) \equiv 1/2$  (здесь и далее опять ограничиваемся случаем сферической геометрии). В этом случае  $S_1 = (\Delta_1 \mu Q \otimes \hat{\Sigma}_s)/2$ , где матрица  $Q$  определена в (20.10.8), и нетрудно видеть, что  $S_1^+ = 2\Delta_1 \mu Q \otimes \hat{\Sigma}_s^+$  и, следовательно,

$$S^+ = \frac{1}{4} S_1^+ \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\hat{\Sigma}_s^+ = \text{diag}\{\Sigma_{sN}^+, \dots, \Sigma_{s1}^+\}; \quad \Sigma_{si}^+ = \begin{cases} 0 & \text{если } \Sigma_{si} = 0; \\ 1/\Sigma_{si} & \text{если } \Sigma_{si} \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя соотношения

$$S^+ \psi = \Sigma_s^+ \psi \equiv (\hat{\Sigma}_s^+ \otimes I_N) \otimes I_2 \psi; \quad S^+ S \psi = S S^+ \psi = \psi, \quad (20.10.11)$$

которые выполняются для любого вектора  $\psi \in U_A = S E_n$ , получаем формулы для вычисления, например, коэффициентов  $e_k$  и  $q_k$  из (20.10.5) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} e_{k-1} &= \begin{cases} 0, & k = 1; \\ \frac{(q_k(\Sigma_s^+ - L^{-1})\xi^{k-1}, \xi^{k-2})}{((\Sigma_s^+ - L^{-1})\xi^{k-1}, \xi^{k-2})} & k > 1; \end{cases} \\ q_k &= \frac{\|(\Sigma_s^+ - L^{-1})\xi^{k-1}\|^2}{\|\xi^{k-1}\|_{\Sigma_s^+}^2} - e_{k-1}, & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (20.10.12)$$

Реализация этих формул уже не вызывает никаких затруднений и требует дополнительно к  $O(Nm)$  арифметических действий, необходимых для вычисления вектора  $SL^{-1}\xi^{k-1}$  по заданному вектору  $\xi^{k-1} \in U_A$ , только  $O(N)$  арифметических действий. При этом объем памяти ЭВМ, достаточный для реализации процесса, составляет  $O(N)$  ячеек.

В общем случае трудности, вызванные участием в скалярных произведениях, легко устранимы путем изменения вычисли-

тельной схемы и использованием второго из соотношений (20.10.11). Окончательные трехчленные формулы этого процесса имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 u^0 &= L^{-1}(S\varphi + f); \quad g^0 = L^{-1}(A\varphi - f); \quad \xi^0 = Sg_0; \\
 Su^k &= Su^{k-1} - \frac{1}{q_k} [(I - SL^{-1})\xi^{k-1} - e_{k-1}(Su^{k-1} - Su^{k-2})]; \\
 q_k &= g_{k-1} - \frac{1}{g_k} [(I - L^{-1}S)g_{k-1} - e_{k-1}(g_{k-1} - g_{k-2})]; \\
 \xi^k &= Ag_k; \\
 e_{k-1} &= \begin{cases} 0, & k = 1; \\ \frac{q_k((I - SL^{-1})\xi^{k-1}, g_{k-1})}{((I - SL^{-1})\xi^{k-2}, g_{k+2})} & k > 1; \end{cases} \\
 q_k &= \frac{((I - SL^{-1})\xi^{k-1}, (I - L^{-1}S)g_{k-1})}{((I - SL^{-1})\xi^{k-1}, g_{k-1})} - e_{k-1}, \quad k = 1, \dots, k_\varepsilon; \\
 u^{k_\varepsilon+1} &= L^{-1}(Su^{k_\varepsilon} + f).
 \end{aligned} \right\} \quad (20.10.13)$$

# 21

## Физический расчет ядерных реакторов

### 21.1. Многогрупповой расчет критической массы реактора и спектра нейтронов

Широкое применение в математических расчетах быстродействующей вычислительной техники создало необходимые предпосылки для всестороннего физического расчета ядерных реакторов всевозможных спектров, различных композиций делящихся элементов и замедлителей. Для проведения указанных выше расчетов необходимо воспользоваться такими методами, которые позволили бы с единой точки зрения рассмотреть гомогенные реакторы всевозможных спектров – от быстрых до тепловых. Естественно, что такой переход возможен только в том случае, когда разработанный метод учитывает все основные особенности механизма замедления нейтронов различных энергий, а также структуру сечений ядерных процессов. Для указанных целей необходимо сформулировать в известном смысле универсальный метод расчета.

В большинстве случаев расчет критической массы и спектра нейтронов возможен в рамках  $P_1$ -приближения. Исключением являются реакторы, средние длины свободных пробегов которых одного порядка с характерными размерами реактора. Расчет таких реакторов в  $P_1$ -приближении может привести к существенным ошибкам как в критической массе, так и в спектре нейтронов. В этом случае для расчетов необходимо воспользоваться более высоким приближением, чем  $P_1$ . Таким приближением можно взять, например,  $P_3$ -приближение.

Проведение многогрупповых расчетов реакторов в  $P_3$ -приближении связано с более или менее существенной затратой

времени на вычислительных машинах. Поэтому для целей расчета критических масс можно воспользоваться эффективной одногрупповой теорией, сформулированной для расчетов в  $P_3$ -приближении.

Весьма существенное значение в расчетах имеет учет резонансной структуры сечений, а также термализации нейтронов.

Все указанные выше особенности должны быть учтены при построении математического алгоритма решения задачи на критический размер реактора.

1. *Задача на критический размер реактора в  $P_1$ -приближении.* Нейтроны всевозможных энергий разбиваются на группы; при этом нейтроны энергии ниже  $E_{gr}$  объединяются в одну группу, которой приписываются эффективные константы. В процессе рассеяния нейтронов учитываются как упругие, так и неупругие эффекты. При замедлении нейтронов принимается во внимание резонансный характер сечений захвата и рассеяния. Рожденные в процессе деления ядер нейтроны распределяются по группам в соответствии со спектром деления. В функции рассеяния нейтронов учитывается нулевой и первый моменты.

В указанных предположениях система основных уравнений реактора принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi_1^j + \Sigma_{0y}^j \varphi_0^j &= q_0^j + \chi^j Q; \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0^j + \Sigma_{1y}^j \varphi_1^j &= \mathbf{q}_1^j, \end{aligned} \right\} \quad (21.1.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_0^j &= \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{0s}^{l \rightarrow j} \varphi_0^l; \\ \mathbf{q}_1^j &= \sum_{l=1}^{j-1} \Sigma_{1s}^{l \rightarrow j} \varphi_1^l; \\ Q &= \sum_{j=1}^{m+1} \nu_f \Sigma_f^j \varphi_0^j. \end{aligned} \right\} \quad (21.1.2)$$

В системе уравнений (21.1.1), (21.1.2) резонансные эффекты учитываются в соответствии с результатами, изложенными в § 16.6.

К системе уравнений (21.1.1) присоединим граничные условия на внешней поверхности реактора

$$2(\nabla\Omega_1^j)_n - \varphi_1^j = 0 \quad \text{на } S. \quad (21.1.3)$$

Аналогичным образом запишем систему сопряженных уравнений реактора:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla\varphi^{*j} + \Sigma_{0y}^j\varphi_0^{*j} &= q_0^{*j} + \nu_f\Sigma_f^jQ^*; \\ -\frac{1}{3}\nabla\varphi_0^{*j} + \Sigma_{1y}^j\varphi_1^{*j} &= \mathbf{q}_1^{*j}, \end{aligned} \right\} \quad (21.1.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_0^{*j} &= \sum_{l=j+1}^{m+1} \Sigma_{0s}^{j \rightarrow l} \varphi_0^{*l}; \\ \mathbf{q}_1^{*j} &= \sum_{l=j+1}^{m+1} \Sigma_{1s}^{j \rightarrow l} \varphi_1^{*l}; \\ Q^* &= \sum_{j=1}^{m+1} \chi^j \varphi_0^{*j}. \end{aligned} \right\} \quad (21.1.5)$$

К системе сопряженных уравнений (21.1.4) присоединим граничные условия на внешней поверхности реактора

$$2(\nabla\varphi_1^{*j})_n + \varphi_0^{*j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (21.1.6)$$

Решение основных и сопряженных уравнений реактора находится с помощью метода последовательных приближений. С этой целью задается приближенное значение функций  $Q(\mathbf{r})$  и  $Q^*(\mathbf{r})$  и в результате решения задач (21.1.1), (21.1.3) и (21.1.4), (21.1.6) находится новое приближенное значение соответствующих функций. При этом критический режим работы реактора осуществляется при условии, что

$$Q^{(n)} = Q^{(n-1)}$$

или

$$Q^{*(n)} = Q^{*(n-1)}.$$

Изложенная постановка задачи на критический размер реактора справедлива как для реактора без отражателей, так и для реакторов с отражателями.

Решение уравнений реактора в одномерном и двумерном случаях для каждой группы производится с помощью метода конечных разностей. Для расчета удобно использовать простейшие разностные схемы, когда разрывы коэффициентов уравнений совпадают с расчетными узлами. Решение полученных конечно-разностных уравнений в случае одномерных областей производится с помощью метода факторизации, а в случае двумерных областей – с помощью релаксационных методов в комбинации с одномерной факторизацией.

2. *Задача о пространственно-энергетическом распределении нейтронов в  $P_2$ -приближении.* Для расчета защиты от излучения во многих случаях необходимо знать пространственно-энергетическое распределение нейтронов в областях, удаленных от активной зоны реактора (в отражателях реактора и защите). Известно, что на больших расстояниях от источников нейтронов  $P_1$ -приближение приводит к заниженным значениям потока нейтронов по сравнению с действительными. В этом случае необходимо применение для расчетов более высокого приближения, чем  $P_1$ . Для таких задач можно использовать  $P_2$ -приближение, которое на больших расстояниях существенно уточняет расчет<sup>1)</sup>. Весьма важным обстоятельством здесь является то, что асимптотическое поведение решения в  $P_2$ -приближении примерно совпадает с асимптотическим поведением решения в  $P_3$ -приближении, в то время как численный алгоритм в  $P_2$ -приближении лишь несущественно отличается от  $P_1$ -приближения. Это обстоятельство позволяет в большинстве случаев составить программу расчетов, единую для  $P_1$ - и  $P_2$ -приближений.

3. *Задача на критический размер реактора в  $P_3$ -приближении.* В тех случаях, когда расчет критической массы одномер-

<sup>1)</sup>Под большими расстояниями будем понимать расстояние в 20–30 пробегов для нейтронов спектра деления. Большие расстояния будем называть асимптотическими. Для асимптотических расстояний необходимо использовать либо высокие приближения в методе сферических гармоник, либо методы малогруппового приближения.

ного реактора в  $P_1$ -приближении недостаточен, можно воспользоваться расчетом в  $P_3$ -приближении. Для этого формулируются многогрупповые системы основных и сопряженных уравнений для данной одномерной геометрии. При этом учитываются все физические эффекты, которые сформулированы в п. 1. В большинстве случаев критическая масса удовлетворительно описывается при учете двух первых моментов в функции рассеяния. Следует, однако, отметить, что расчет спектра нейтронов на больших расстояниях от активной зоны предпочтительно осуществлять при учете четырех моментов в функции рассеяния, так как в этом случае более точно учитывается анизотропия нейтронного потока.

4. *Расчет критической массы и спектра нейтронов двумерных цилиндрических реакторов.* Рассмотрим решение многогрупповой системы основных и сопряженных уравнений реактора методом характеристик Владимирова и  $S_n$ -методом Карлсона. В рамках физической постановки задачи, изложенной в п. 1, рассматривается многогрупповая система кинетических уравнений реактора в транспортном приближении, где  $\Sigma_s^j$  заменено  $\Sigma_s^j(1 - \bar{\mu}_0)$  и рассеяние считается изотропным в лабораторной системе координат. Реактор по высоте разбивается на слои толщиной  $\Delta z$ . В пределах каждого слоя предполагается, что физические константы и решение задачи, усредненное по данному слою, не зависят от координаты  $z$ . В результате для каждой группы приходим к системе односкоростных кинетических уравнений, связанных друг с другом. Каждое такое уравнение зависит от координат  $r$ ,  $\psi$  и  $v$ , где  $r$  — расстояние от оси симметрии;  $\psi$  — высотный и  $v$  — азимутальный углы. Введем в рассмотрение гауссовы точки  $\psi_i$  на интервале  $0, 2\pi$  и систему уравнений для данной группы запишем применительно к гауссовым точкам. В результате приходим к системе односкоростных кинетических уравнений, каждое из которых по форме совпадает с кинетическим уравнением для сферической системы. В левой части каждого из полученных уравнений сохраним члены, относящиеся к данному слою  $\Delta z$  и к данной точке Гаусса, а все остальные члены отнесем к правой части уравнений, считая их заданными для каждой итерации. Полу-



ченные уравнения для каждого слоя, начиная с первого, замыкающего к торцу, решаются последовательно для всех точек Гаусса. Решить соответствующие уравнения можно либо методом характеристик Владимирова, либо  $S_n$ -методом Карлсона с применением метода улучшения сходимости итерационного процесса, сформулированного В. Н. Морозовым.

Для соответствующей задачи метод Владимирова был развит Б. Л. Гаврилиным.

## 21.2. Усреднение групповых констант

В предыдущем параграфе при рассмотрении алгоритмов решения задач на критическую массу и пространственно-энергетическое распределение нейтронов в реакторе было предложено, что система многогрупповых констант для замедляющихся нейтронов и константы для группы тепловых нейтронов известны. В некоторых случаях в реакторах может быть использована универсальная система констант для групп замедления, не зависящая от спектра нейтронов в реакторе. Очевидно, это имеет место, когда число групп замедления велико. Если число групп недостаточно велико, то использование универсальных констант для расчета спектра нейтронов и критической массы реактора может привести к более или менее существенным погрешностям. В дальнейшем мы рассмотрим способы усреднения групповых констант для групп замедляющихся нейтронов и группы нейтронов тепловых энергий.

1. *Замедление нейтронов.* При замедлении нейтронов могут быть рассмотрены два способа усреднения констант для многогруппового расчета.

Первый способ усреднения состоит в том, что сначала решается задача с очень большим числом групп замедления. Практически удобно при этом выбрать интервал летаргии для каждой группы равным  $\Delta u = 0,125$ . Заметим, кстати, что в некоторых справочниках [113] именно с таким интервалом приведены элементарные константы, необходимые для расчета реакторов. Указанная многогрупповая задача в постановке п. 1 предыдущего параграфа может быть решена при сравнительно небольшом

числе узловых точек по пространству (порядка 20–30). После этого производится усреднение групповых констант в пределах ранее выбранных групп таким образом, как это сформулировано в § 16.2.

Весьма важно здесь отметить следующий факт. При решении многогрупповой задачи с интервалом в группе  $\Delta u = 0,125$  резонансные эффекты учитываются выбором соответствующих эффективных констант, алгоритм получения которых приведен в § 16.6. Поэтому при получении необходимой для расчета многогрупповой системы констант с интервалами  $\Delta u_j$  резонансные эффекты будут учтены автоматически формулами усреднения, если усреднению будут подвергаться эффективные (с учетом резонансных эффектов) константы расчета с  $\Delta u = 0,125$ .

Второй способ усреднения констант может быть применен для промежуточных и тепловых реакторов. Он состоит в том, что усреднение констант по группам  $\Delta u_j$  производится со спектром нейтронов, полученным из решения задачи по методу, изложенному в § 17.3. При этом усреднение констант производится по формулам (17.3.5). Резонансные эффекты учитываются при усреднении таким же образом, как и в п. 1 предыдущего параграфа.

2. *Диффузия нейтронов.* Переходим к рассмотрению способов усреднения констант для тепловой группы нейтронов. Если поглощение нейтронов и утечка из реактора невелики, то спектр нейтронов в каждой зоне будет не очень сильно отличаться от равновесного максвелловского распределения. Отличие спектра нейтронов от равновесного обуславливается захватом нейтронов и перетечкой их из одной зоны в другую. Для того чтобы учесть наиболее существенный из этих двух факторов, искажающих равновесный спектр, а именно поглощение нейтронов, можно воспользоваться моделью термализации нейтронов в бесконечной однородной среде. Если предположение о модели одноатомного газового замедлителя оказывается оправданным, то расчет спектра нейтронов в области  $v < v_{zp}$  можно произвести с помощью уравнения Давыдова (см. [231] § 27.4). Если кристаллические эффекты или молекулярные связи оказываются существенными, то спектр нейтронов можно рассчи-

тать по обобщенной модели, разработанной В. Ф. Турчиным (см. [231] § 28.5).

Однако для большого класса задач указанные методы недостаточны. К числу таких задач следует отнести задачи на расчет реакторов с существенными пространственными неоднородностями полей температуры. То же самое относится к реактору, зоны которого значительно отличаются по своим свойствам поглощения и рассеяния или соизмеримы со средним свободным пробегом нейтрона.

Для получения эффективных констант группы тепловых нейтронов таких реакторов необходимо предварительно решить следующую задачу.

Задаются источники замедления нейтронов в тепловую группу и решается многогрупповая задача для нейтронов, скорости которых меньше  $v_{sp}$ . Полученный в результате спектр медленных нейтронов используется для получения эффективных констант группы тепловых нейтронов.

### 21.3. Малогрупповые приближения

При расчетах ядерных реакторов на вычислительных машинах зачастую создаются известные трудности, связанные с ограниченными возможностями машин. Прежде всего это относится к памяти машин и их быстродействию. Эти два наиболее существенных фактора необходимо принимать во внимание при формулировании математических задач, связанных с расчетом реакторов. В связи с этим возникает вопрос о наиболее рациональной в данных условиях математической постановке задач, обеспечивающей максимальную информацию о решении. Заметим, что информация должна быть не только полной, но и достоверной.

При физическом расчете реактора желателен многогрупповой расчет двух- или трехмерного цилиндрического реактора, выполненный с возможно малым шагом, с учетом резонансных эффектов, термализации и т. д. в рамках  $P_n$ -приближений. Решение упомянутой задачи потребует таких больших затрат машинного времени, что указанный расчет в результате окажется экономически невыгодным и неоправданным.

Вместе с тем рассматриваемая задача может быть расчленена на ряд простейших задач, решение которых не представляет труда. Такими задачами, например, могут быть одномерные задачи, рассмотренные в § 21.1 и 21.2. Набор решений соответствующих одномерных задач в комплексе с теорией возмущений позволяет получить весьма полную информацию, необходимую для проектирования реактора.

Таким образом, сложная задача может быть заменена набором более или менее простых задач, поддающихся оперативному решению на вычислительных машинах. Это значит, что в каждом конкретном случае необходимо определить такой набор простейших задач, который бы доставлял необходимую информацию для проектирования.

В связи с соображениями, изложенными выше, оказывается весьма актуальным вопрос о малогрупповой системе уравнений реактора. Остановимся на рассмотрении одногруппового и трехгруппового методов.

1. *Одногрупповой метод.* Как было отмечено ранее, критическая масса реактора может быть найдена с помощью эффективной одногрупповой теории. Для этой цели было предложено находить систему эффективных одногрупповых констант с использованием решения многогрупповой задачи в  $P_1$ -приближении. Полученное таким образом одногрупповое кинетическое уравнение в дальнейшем используется для уточнения расчетов критических параметров реактора в  $P_n$ -приближении.

Таким образом, простейший метод учета кинетических эффектов состоит в следующем. Решается многогрупповая система уравнений реактора в  $P_1$ -приближении, затем усредняются константы для одногрупповой теории и, наконец, решается одногрупповая задача в  $P_3$ -приближении. Сопоставление расчетов критических масс в  $P_3$ -приближении в рамках многогруппового метода с соответствующим расчетом одногрупповой теории указывает на весьма высокую точность одногрупповых расчетов, вполне достаточную для практических целей.

2. *Трехгрупповой метод.* Если одногрупповая теория позволяет уточнить только критическую массу реактора, то трех-

групповой метод позволяет существенно уточнить поле энерговыделения в активной зоне реактора, которое определяется с помощью функции  $Q(r)$ . В рассматриваемом методе быстрые нейтроны объединяются в одну группу, нейтроны промежуточных энергий — в другую и нейтроны тепловых энергий — в третью. В результате решение задачи снова начинается с решения одномерных многогрупповых уравнений реактора в  $P_1$ -приближении. Полученные потоки нейтронов используются далее для получения эффективных констант трехгруппового метода.

Полученная система уравнений используется как для уточненных расчетов критических масс и энерговыделения в  $P_3$ -приближении, так и для решения уравнений реактора в двумерной или трехмерной геометриях.

## 21.4. Расчет гетерогенных реакторов и системы компенсации

Расчет гетерогенных реакторов представляет задачу весьма сложную. Сложность решения состоит прежде всего в том, что в гетерогенном реакторе макроскопические эффекты тесно переплетаются с эффектами микроскопическими, происходящими в отдельных ячейках реактора. При расчетах критических масс реакторов воспользуемся эффективными методами гомогенизации.

1. *Расчет эффективных констант для энергий спектра деления.* В этом случае особое значение имеет расчет эффективного сечения захвата с делением на  $U^{238}$ , так как соответствующее сечение позволяет вычислить коэффициент размножения реактора на быстрых нейтронах. Расчет эффективных сечений захвата нейтронов с делением производится с учетом взаимной экранировки урановых блоков. Расчет других констант производится с помощью формального метода гомогенизации.

2. *Расчет эффективных констант для области промежуточных энергий.* Резонансные эффекты учитываются с помощью эффективных резонансных интегралов, а сечения, плавно

изменяющиеся с энергией, подвергаются процессу формальной гомогенизации. Если блок-эффект существенен, то есть если поток нейтронов существенно изменяется по ячейки реактора, то необходимо воспользоваться эффективными методами гомогенизации, рассмотренными в [231] (гл. 26).

3. *Расчет одnogрупповых констант для тепловой группы нейтронов.* Для этого сначала рассматривается задача о нахождении пространственно-энергетического распределения нейтронов в ячейке реактора с учетом термализации. Расчет производится в  $P_1$ -приближении. Затем осуществляется одnogрупповое усреднение констант. Полученные константы используются для одnogруппового расчета интегрального спектра медленных нейтронов в  $P_1$ - и  $P_3$ -приближениях по объему ячейки. В заключение производится усреднение сечений по ячейке с целью получения эффективных констант для эквивалентного гомогенизированного реактора.

Если расчет в  $P_1$ - и  $P_3$ -приближениях в рамках одnogрупповой модели приводит к существенной разнице в результатах расчета гомогенизированных констант, то необходимо воспользоваться расчетом пространственно-энергетического распределения нейтронов в ячейке непосредственно в  $P_3$ -приближении с учетом термализации.

После того как эффективные гомогенизированные константы получены, расчет гетерогенного реактора ничем не отличается от расчета реактора гомогенного и производится с помощью программ расчета гомогенного реактора.

4. *Расчет компенсирующей способности регулирующих стержней.* Ради простоты будем предполагать, что активная зона реактора и отражатели представляют собой гомогенные смеси элементов.

Расчет системы компенсации реактора относится к наиболее сложным вопросам физического расчета. Наиболее просто этот вопрос решается только в случае, когда компенсирующий стержень полностью введен в реактор без торцовых отражателей (которые могут быть заменены введением эффективных добавок по высоте) и совпадает с осью реактора. В этом случае

переменные делятся, и мы приходим к задаче расчета одномерного реактора. Задача решается в многогрупповом приближении с использованием эффективного граничного условия на поверхности компенсирующего стержня. Пусть введение стержня привело к изменению характеристического числа задачи  $\lambda = 1/K_{эфф}$  на величину  $\delta\lambda_0$ . Тогда оценка величины  $\delta\lambda$  для стержня, помещенного на расстоянии  $r$  от центра, найдется с помощью формулы теории возмущений

$$\delta\lambda_j = \delta\lambda_0 \frac{Q^*(r_j)Q(r_j)}{Q^*(0)Q(0)},$$

где  $Q(r)$  и  $Q^*(r)$  — невозмущенные функции, найденные в отсутствие стержней. Заметим, кстати, что теория возмущений дает оценку только величины  $\delta\lambda = \delta\left(\frac{1}{K_{эфф}}\right)$ , но она не позволяет вычислить поток нейтронов или функцию  $Q(r)$  при наличии стержней. Для нахождения потока нейтронов даже в таком простейшем случае, когда стержень помещен на расстоянии  $r$  от центра цилиндра, необходимо решить двумерную задачу в плоскости  $(r, z)$ .

Аналогичным образом мы приходим к необходимости решения двумерных задач, когда стержень, помещенный в точку  $r = 0$ , частично выведен из реактора. Аналогичный случай имеет место при рассмотрении компенсирующего цилиндра или системы компенсирующих цилиндров, расположенных симметрично относительно начала координат.

Расчет еще более усложняется в том случае, когда рассматривается система компенсирующих стержней в реакторе при различных способах выведения стержней из реактора по мере выгорания делящегося изотопа. В этом случае необходим расчет серии трехмерных реакторов с различным положением стержней в реакторе.

Указанные выше двумерные и трехмерные задачи следует решать в рамках трехгруппового метода в  $P_1$ -приближении при использовании эффективных граничных условий на поверхности компенсирующих стержней или цилиндров.

# 22

## Критические массы гомогенных реакторов

### 22.1. Общие положения расчета критических масс

В основу метода расчета критических масс ядерных реакторов положен многогрупповой расчет в  $P_1$ -приближении. При этом выделено 20 групп замедляющихся нейтронов и одна группа тепловых нейтронов. В процессе замедления нейтронов учитываются резонансные эффекты.

Поскольку размеры реакторов велики по сравнению со средним свободным пробегом нейтрона до рассеяния в области резонансных энергий, эффективный резонансный интеграл на каждом резонансе может быть оценен на основе модели однородной бесконечной среды

$$J_{эфф}^j(T) = J_{эфф}^j \eta(\xi, h_j),$$

где функция  $\eta$  определена по формуле

$$\eta(\xi, h) = \begin{cases} 1 + \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta + 1} - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + 1} & \xi < 1 \\ 1,05 & \xi > 1, \end{cases}$$

где

$$\alpha = A(0,15 + \xi);$$

$$\beta = \frac{0,086}{\xi} - 0,228\xi + 0,282;$$

$$A = \begin{cases} h & h < \frac{2,3}{\xi} \\ \left(\frac{2,3}{\xi}\right)^2 & h > \frac{2,3}{\xi}. \end{cases}$$

Эта формула была предложена И. П. Маркеловым и И. П. Тютчевым.

При расчете эффективных констант для группы тепловых нейтронов использовалась теория рассеяния медленных нейтронов в одноатомном газовом замедлителе. Расчет спектра



нейтронов производился с помощью решения уравнения Давыдова [123], численным методом Рунге – Кутты [169]. Найденный спектр нейтронов использовался в дальнейшем для усреднения физических констант тепловой группы по формулам (13.3.21).

После того как критический размер реактора найден, производилось усреднение многогрупповых констант с целью получения эффективных констант одногрупповой теории. Для этой цели использовался спектр нейтронов, найденный в результате многогрупповой задачи, а также одногрупповое сопряженное уравнение. Для нахождения одногрупповой системы констант применялся метод последовательных приближений. После того как одногрупповые константы были найдены, формулировалась односкоростная задача на критический размер в  $P_3$ -приближении, которая решалась с помощью матричной факторизации. Многогрупповая система констант, а также параметры резонансов выбраны на основе работ [52, 113, 217, 218, 375] и др.

Критические массы реакторов без отражателей приводятся с соответствующими одногрупповыми константами, на основе которых можно произвести не только проверочный расчет, но и другие расчеты критических масс реакторов того же спектра. В частности, это позволяет пересчитать критические массы сферических реакторов на критические массы цилиндрической и плоской геометрий. Далее, одногрупповая система констант позволяет весьма просто воспользоваться теорией возмущений для оценок различных эффектов, особенно связанных с небольшим изменением формы.

Для реакторов без отражателей одногрупповые константы приводятся в виде эффективного коэффициента диффузии  $D$  и материального параметра  $\kappa^2$ .

Следует особо подчеркнуть тот факт, что коэффициент диффузии, найденный для активной зоны для реактора без отражателя, вообще говоря, не будет совпадать с коэффициентом диффузии, рассчитанным для случая реактора с отражателем. Это обстоятельство связано с тем, что диффузия нейтронов существенно зависит от градиентов потока нейтронов. Однако в большинстве случаев, особенно для реакторов тепловых, указанная разница незначительна.

Что касается величин  $\nu_f \Sigma_f$  и  $\Sigma_c$ , то они всегда оказываются близкими. Это значит, что иногда при расчетах критических масс реакторов с отражателями можно использовать константы, полученные в результате простейших расчетов реакторов без отражателей. Важным фактом здесь также является то, что константы  $D$  и  $\Sigma_c$  для фиксированных отражателей оказываются слабо зависящими от состава активной зоны.

Указанные константы являются в основном функциями кадмиевого отношения (по совокупности делящихся изотопов) активной зоны.

В дальнейшем мы будем широко пользоваться следующей системой обозначений:

$\alpha = \frac{\varrho_i}{\varrho_5}$  — отношение числа ядер  $i$ -го элемента к числу ядер изотопа  $U^{235}$  в 1 см<sup>3</sup> смеси;

$P = \frac{\varrho_5}{\varrho_5 + \varrho_8}$  — обогащение по изотопу  $U^{235}$ ;

$A$  — атомный номер элемента;

$\gamma$  — плотность замедлителя с номером  $i$  в активной зоне реактора, г/см<sup>3</sup>;

$\Sigma_{tr}, \Sigma_c, \nu_f \Sigma_f$  — средние макроскопические сечения ядерных процессов в односкоростном приближении, см<sup>-1</sup>;

$D$  — Средний коэффициент диффузии реактора без отражателя, см;

$L^2$  — квадрат длины диффузии для отражателя, см<sup>2</sup>;

$CdR = \frac{\int_{15,5}^{\infty} \nu_f \Sigma_f \varphi(u) du}{\int_{-\infty}^{15,5} \nu_f \Sigma_f \varphi(u) du}$  — отношение числа делений в тепловой области к числу делений в надтепловой области по всем делящимся изотопам (в качестве границы  $E = E_T$  здесь принято значение кадмиевого резонанса  $E = 0,4$  эв);

$$\kappa^2 = \frac{\nu_f \Sigma_f - \Sigma_c}{D}.$$

## 22.2. Реакторы на графите

В настоящем параграфе будут рассмотрены критические массы реакторов с делящимся изотопом урана  $U^{235}$  и основным

замедлителем активной зоны углеродом. Результаты расчета критических масс уран-графитовых реакторов приведены в форме графиков.

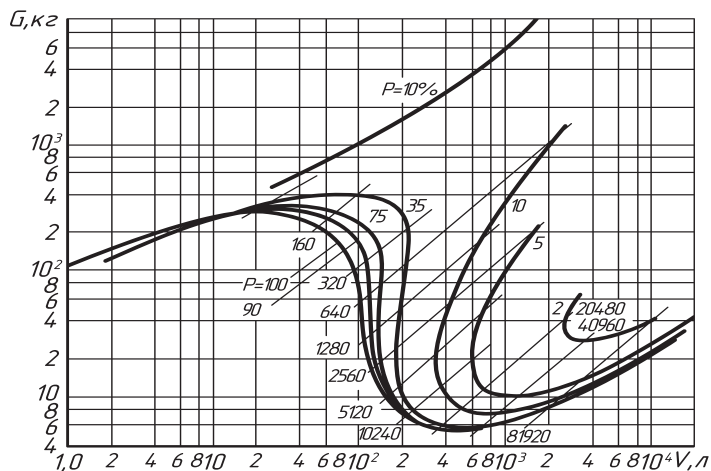


Рис. 14. Критические массы уран-графитовых реакторов без отражателей при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

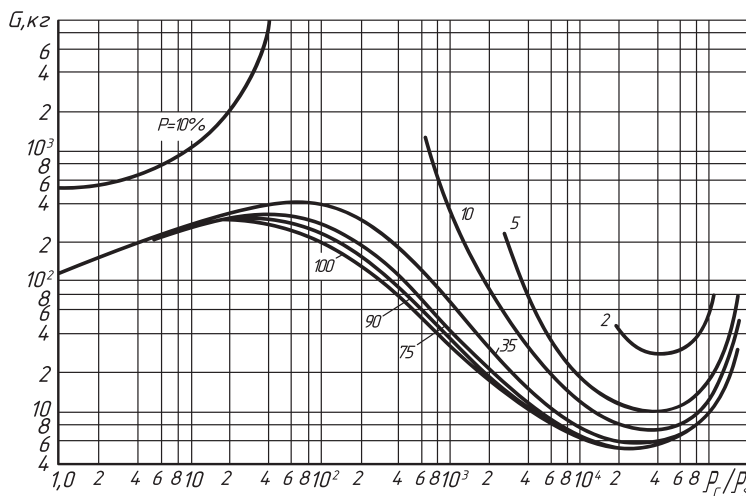


Рис. 15. Критические массы уран-графитовых сферических реакторов без отражателей в зависимости от  $\alpha = \frac{\rho_c}{\rho_s}$  при различных обогащениях урана ( $P_1$ -приближение)

Сведения о критических массах реакторов дополнены сведениями о спектре нейтронов, который характеризуется кадмиевым отношением, а также некоторыми одногрупповыми константами, с помощью которых могут быть произведены различные расчеты, о которых говорилось в предыдущем параграфе главы.

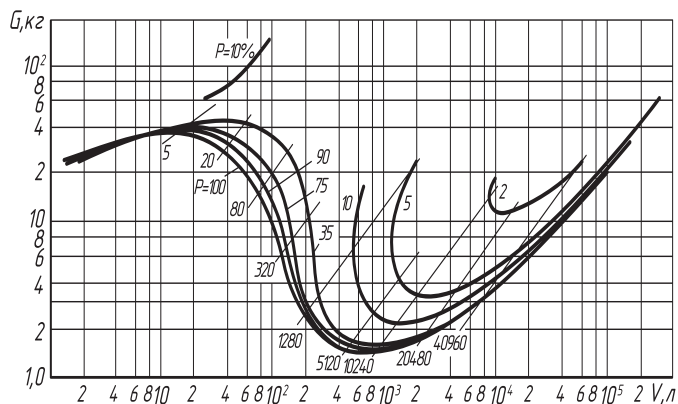


Рис. 16. Критические массы уран-графитовых сферических реакторов с графитовым отражателем при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

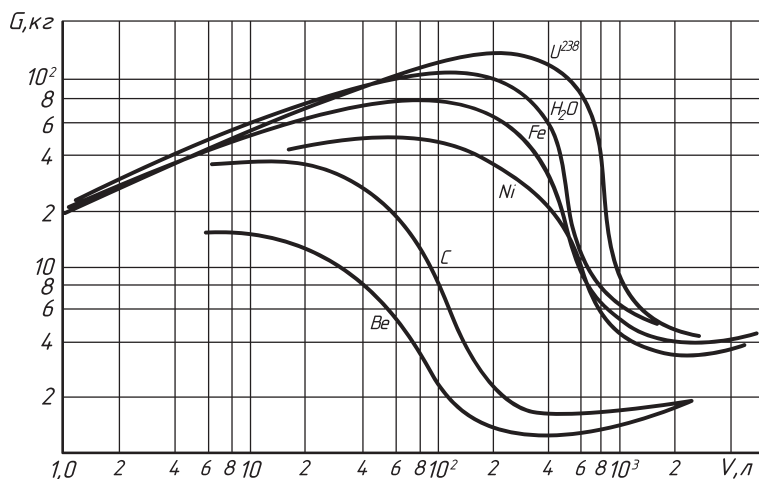


Рис. 17. Критические массы уран-графитовых сферических реакторов зависимости от объема при различных отражателях ( $P_1$ -приближение)

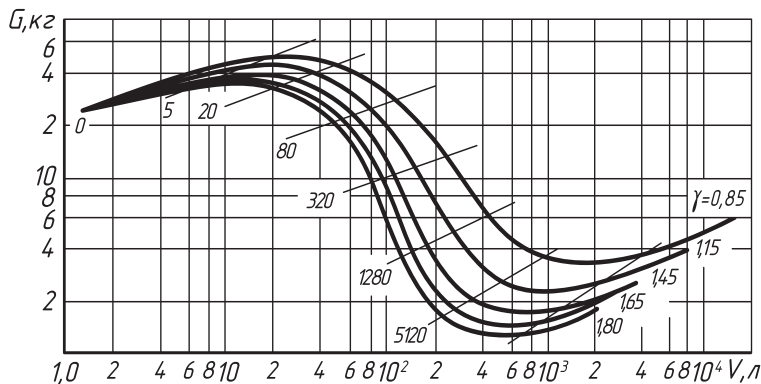


Рис. 18. Критические массы уран-графитовых сферических реакторов с графитовым отражателем в зависимости от объема при различных плотностях графита в активной зоне ( $P_1$ -приближение)

## 22.3. Реакторы на бериллии

В настоящем параграфе рассмотрены гомогенные критические реакторы на бериллии. В качестве делящегося изотопа выбран уран  $U^{235}$ . На бериллии учтена реакция  $(n, 2n)$ .

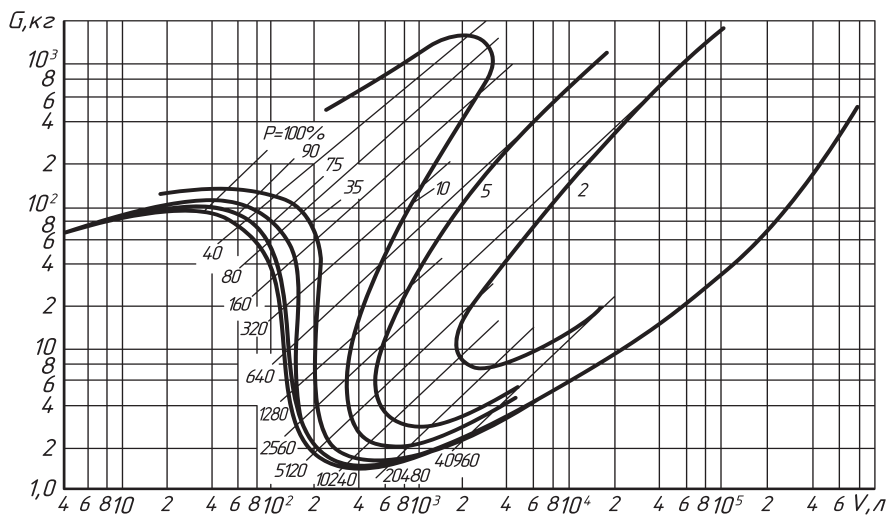


Рис. 19. Критические массы уран-бериллиевых сферических реакторов без отражателей при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

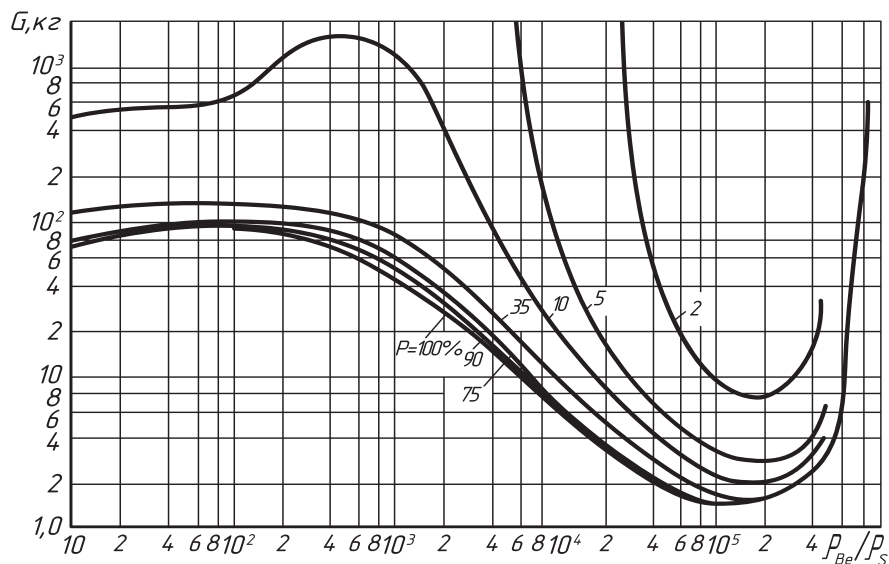


Рис. 20. Критические массы уран-бериллиевых сферических реакторов без отражателей в зависимости от  $\alpha = \frac{\rho_{Be}}{\rho_5}$  при различных обогащениях урана ( $P_1$ -приближение)

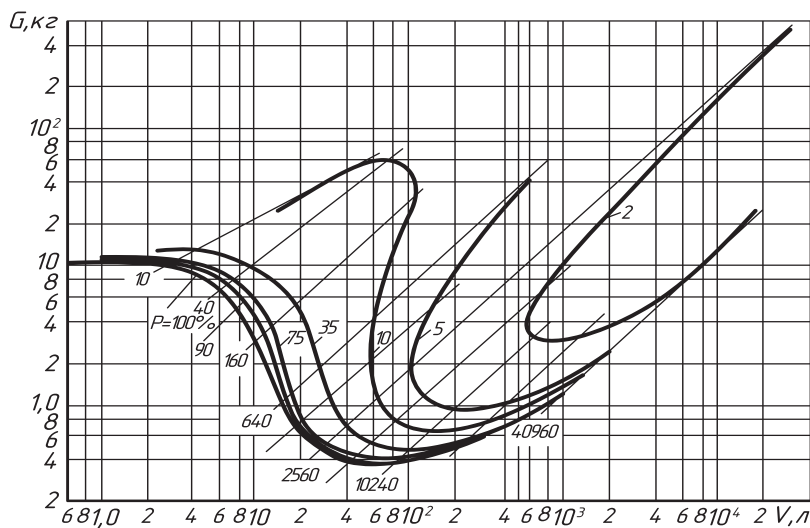


Рис. 21. Критические массы уран-бериллиевых сферических реакторов с бериллиевым отражателем при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

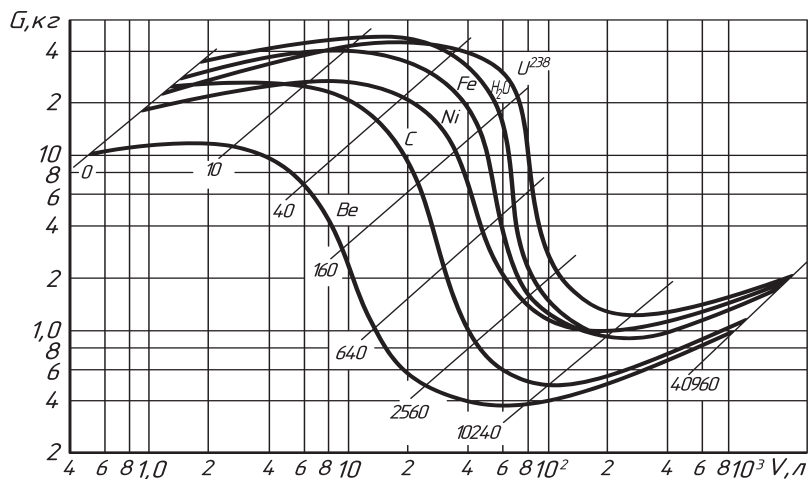


Рис. 22. Критические массы уран-бериллиевых сферических реакторов в зависимости от объема при различных отражателях ( $P_1$ -приближение)

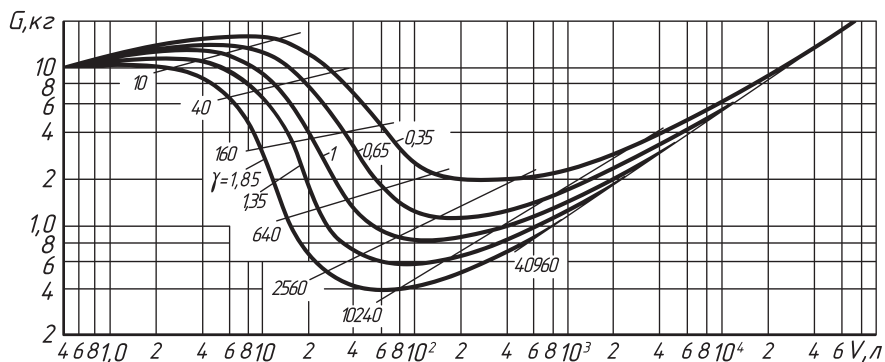


Рис. 23. Критические массы уран-бериллиевых сферических реакторов с бериллиевым отражателем в зависимости от объема при различных плотностях бериллия в активной зоне ( $P_1$ -приближение)

## 22.4. Реакторы на воде

Расчет критических масс реакторов на воде производился многогрупповым методом. Число групп нейтронов выбирали равным 21. Критические массы гомогенных уран-водных реакторов вычислялись в  $P_1$ -приближении. Вследствие небольших критических объемов реакторов на промежуточных нейтронах расчет их критических загрузок в  $P_1$ -приближении сопровож-

дается значительной погрешностью. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты расчетов критических масс, полученных в рамках  $P_3$ -приближения с помощью эффективной одногрупповой теории.

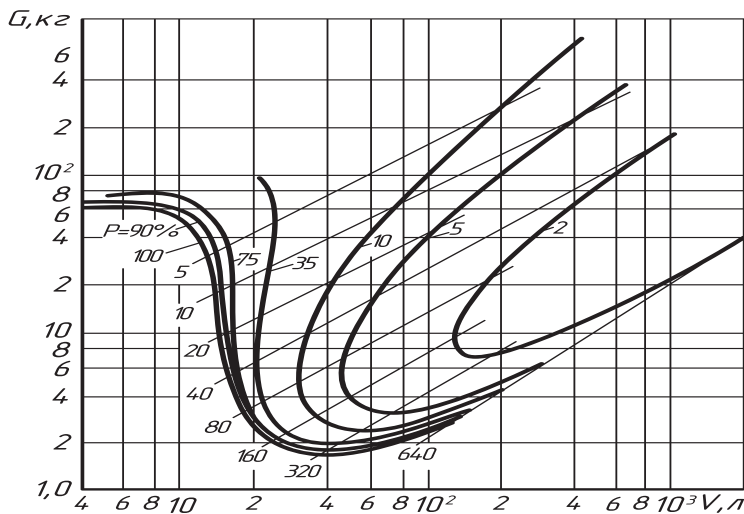


Рис. 24. Критические массы уран-водных сферических реакторов без отражателей при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

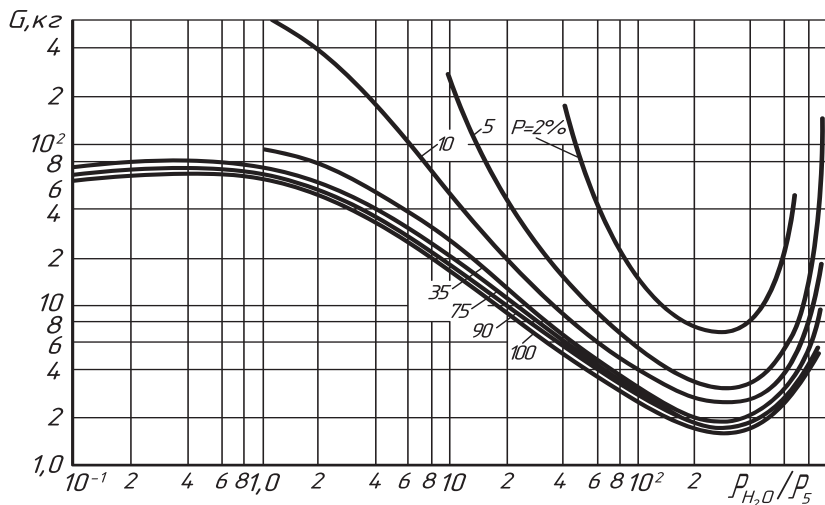


Рис. 25. Критические массы уран-водных сферических реакторов без отражателей в зависимости от  $\alpha = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_5}$  при различных обогащениях урана ( $P_1$ -приближение)



Следует отметить, что при расчетах уран-водных реакторов был использован специальный вид нулевого и первого моментов функции рассеяния нейтронов на водороде

$$\sigma_{0H}^{l \rightarrow j} = \alpha^j \beta^l;$$

$$\sigma_{in}^{l \rightarrow j} = \alpha_1^j \beta_1^l.$$

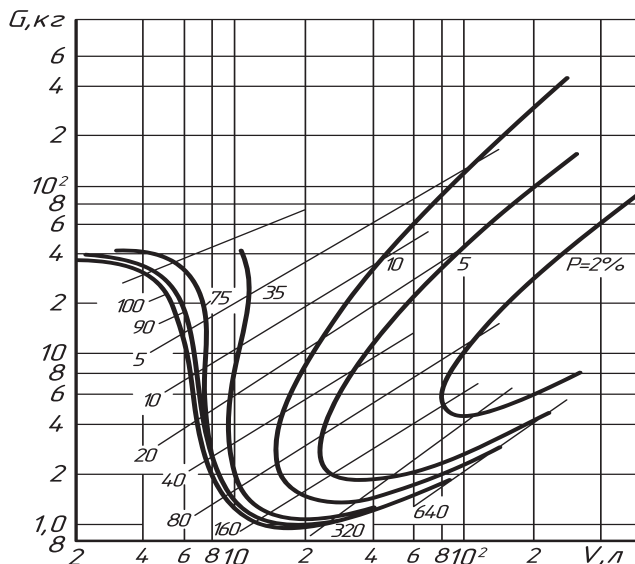


Рис. 26. Критические массы уран-водных сферических реакторов с водяным отражателем при различных обогащениях урана в зависимости от объема ( $P_1$ -приближение)

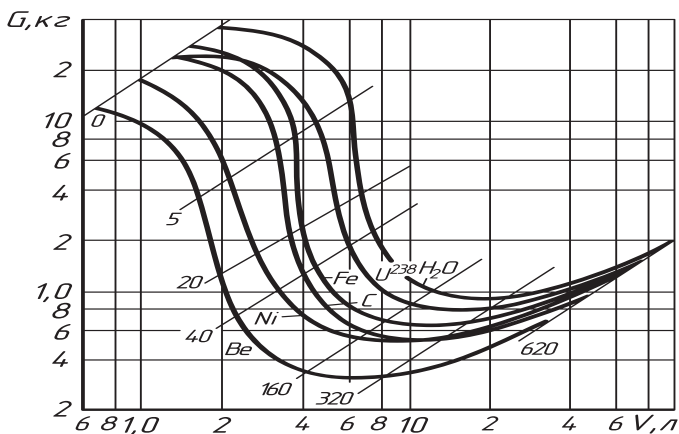


Рис. 27. Критические массы уран-водных сферических реакторов в зависимости от объема при различных отражателях ( $P_1$ -приближение)

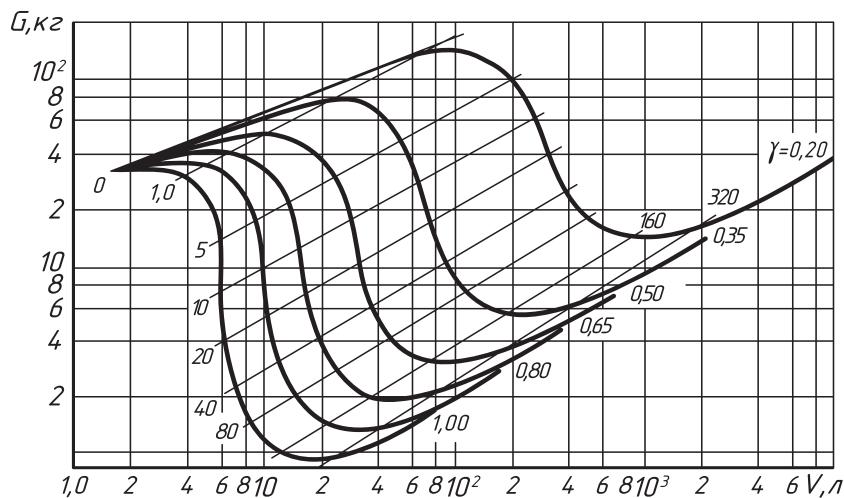


Рис. 28. Критические массы уран-водных сферических реакторов с водяным отражателем в зависимости от объема при различных плотностях воды в активной зоне ( $P_1$ -приближение)

## 22.5. Сопоставление результатов расчета критических масс гомогенных реакторов с экспериментальными данными

Многогрупповую систему констант можно проверить не только сравнением теоретических и экспериментальных значений длин замедления, но и, главным образом, расчетом критических масс и сравнением их с экспериментальными данными. Наиболее подходят для этого экспериментальные значения критических масс гомогенных реакторов сферической формы. В работе [153] суммированы результаты экспериментов по определению критических масс делящихся изотопов и растворов солей в воде. Численные расчеты были проведены для реакторов сферической формы с бесконечным отражателем из обычной воды. Активная зона представляла раствор соли  $UO_2F_2$  в воде, обогащение по изотопу  $U^{235}$  — 90%. Критические параметры определялись при решении многогрупповых

уравнений реактора как в  $P_1$ -, так и в  $P_3$ -приближениях. Расчеты показали, что, используя эффективную одnogрупповую теорию, можно существенно уточнять критические параметры, учитывая кинетические эффекты. Критические параметры, полученные по одnogрупповой теории [246], сравнивали с соответствующими величинами, определенными при решении многогрупповых уравнений в  $P_3$ -приближении. Результаты расчетов критических масс и сравнение с экспериментальными данными приведены на рисунке 29. Влияние температуры раствора назначения критических масс изотопа  $U^{235}$  и сравнение теоретических и экспериментальных значений показано на рисунке 30.

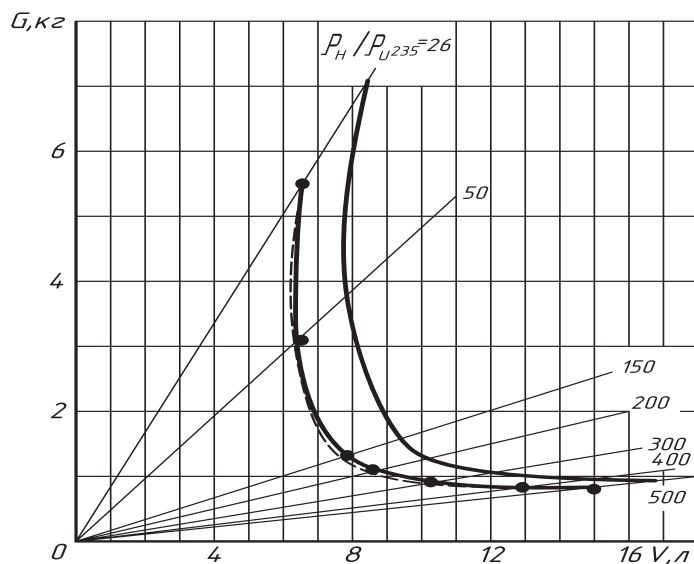


Рис. 29. Зависимость критической массы водных растворов  $UO_2F_2$  для реакторов с водяным отражателем в зависимости от объема: линии —  $P_1$ -приближение (многогрупповое), расчетные кривые; штрих-пунктир —  $P_3$ -приближение (многогрупповое); точки — экспериментальные точки

Сопоставление минимальной критической массы раствора соли  $Pu(NO_3)_2$  с водяным отражателем, полученной при эксперименте с рассчитанной в  $P_3$ -приближении, дает хорошее согласие ( $G_{\text{эксп}} = 510$  г,  $G_{P_3} = 525$  г). Сравнение теоретических и экспериментальных значений критических параметров для сферических реакторов, описанных в работе [487], дано на рисунке 31.

В этих опытах в качестве горючего использовался раствор соли  $UO_2F_2$  в воде при комнатной температуре (обогащение 93,5% по изотопу  $U^{235}$ ).

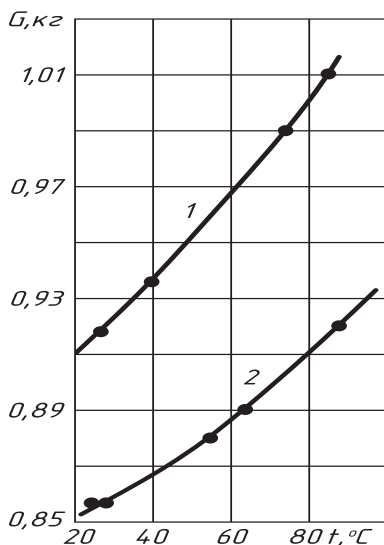


Рис. 30. Зависимость критической массы  $U^{235}$  реакторов с водяным отражателем от температуры: линии — расчетные кривые; точки — экспериментальные точки: 1 — радиус сферы 13,2 см; 2 — радиус сферы 16 см

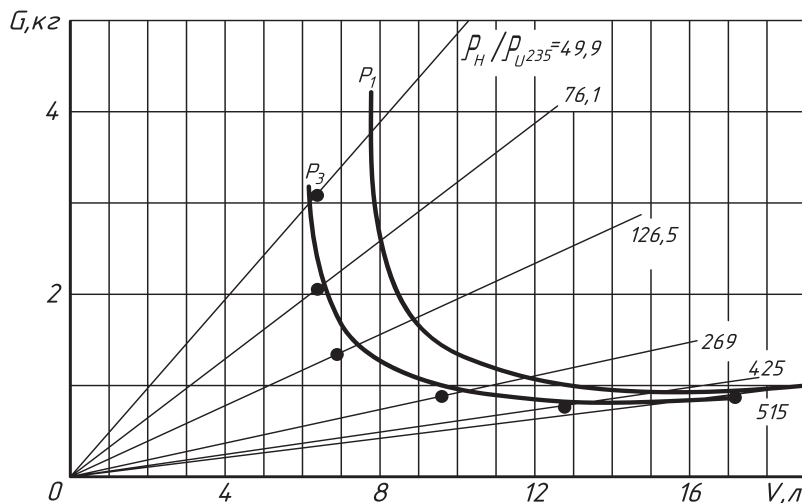


Рис. 31. Зависимость критической массы водных растворов  $UO_2F_2$  для реакторов с водяным отражателем от объема: линии — расчетные кривые; точки — экспериментальные точки

Критические параметры водных растворов соли  $UO_2(NO_3)_2$  при некоторых обогащениях по  $U^{235}$  для различных отношений  $\rho_H/\rho_{U^{235}}$  получены Б.Г. Дубовским и др. [131]. Эксперименты были выполнены в основном в цилиндрической геометрии как без отражателя, так и с водным отражателем, помещенным на боковой и нижней торцевой поверхностях цилиндра. Толщина водного отражателя считалась практически бесконечной. Часть экспериментов выполнена с активной зоной в форме сфер. Толщина стенок контейнеров для цилиндров и сфер из нержавеющей стали составляла 0,15 см. Авторами работы [314] показана возможность сферизации критических реакторов цилиндрической формы введением геометрического параметра

$$\kappa^2 = \left( \frac{\pi}{R_3^{\text{сф}}} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{H_3^u} \right)^2 + \left( \frac{2,405}{R_3^u} \right)^2$$

и соответствующих длин экстраполяции, полученных экспериментально.

Результаты численного расчета реакторов  $UO_2(NO_3)_2 \div H_2O$  сферической формы (90%-е обогащение) представлены на рисунке 32.

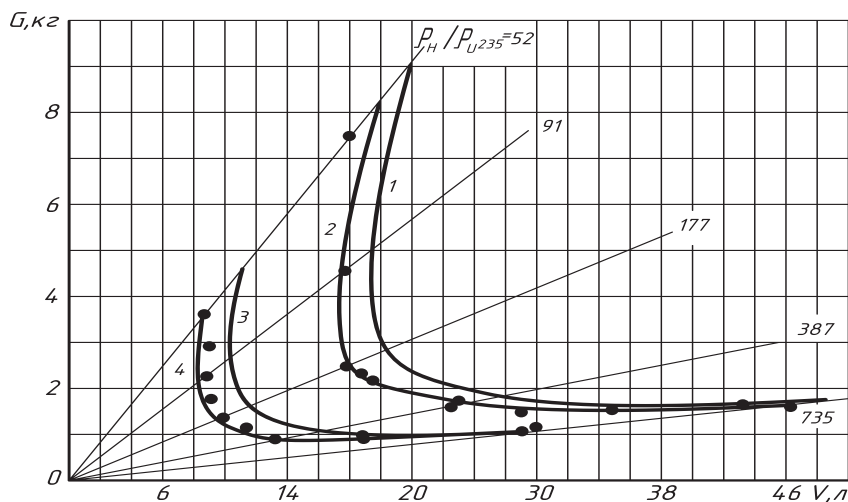


Рис. 32. Зависимость критической массы водных растворов  $UO_2(NO_3)_2$  для реакторов от объема: 1 — без отражателя в  $P_1$ -приближении; 2 — без отражателя в  $P_3$ -приближении; 4 — с водяным отражателем в  $P_3$ -приближении; линии — расчетные кривые; точки — экспериментальные точки

Оценка влияния стенок контейнера из нержавеющей стали на критический размер была получена при многогрупповом расчете в  $P_3$ -приближении. Оказалось, что учет стенок контейнера в расчетах увеличивает критический размер на величину, равную толщине этих стенок. Результаты многогрупповых расчетов критических масс сферических реакторов при различных обогащениях по изотопу  $U^{235}$  приведены в таблице 1. Сравнение численных значений критических масс сферических реакторов с экспериментальными (обогащение по изотопу  $U^{235}$  — 90%) показано в таблице 2. Там же сравниваются теоретическое и экспериментальное значения экономии отражателя (разность между радиусами реактора без отражателя и реактора с отражателем).

Т а б л и ц а 1.

Обогащение $U^{235}$ , %	$\rho_H/\rho_{U^{235}}$	Реактор без отражателя			Реактор с отражателем		
		$P_1$	$P_3$	Эксперимент	$P_1$	$P_3$	Эксперимент
36	518	20,8	20,5	20,6	17,7	17,3	17,4
10	450	25,8	25,4	24,9	22,05	21,7	21,8
5	850	41,7	41,6	42,2	38,3	38,1	39,1

Т а б л и ц а 2.

$\rho_H/\rho_{U^{235}}$	Реактор без отражателя				Реактор с отражателем				Экономия отражателя	
	$P_1$	$P_3$ одно-групп.	$P_3$ много-групп.	Эксперимент	$P_1$	$P_3$ одно-групп.	$P_3$ много-групп.	Эксперимент	Расчет	Эксперимент
587	20,99	20,49	20,28	20,15	-	-	-	-	-	-
506	19,93	19,40	19,20	19,00	-	-	-	-	-	-
377	18,75	18,25	18,10	18,10	-	-	-	-	-	-
220	17,11	16,57	16,42	16,40	-	-	-	-	-	-
784	23,54	22,66	-	-	20,38	19,56	19,42	20,15	3,10	3,20
706	22,72	22,06	-	-	19,50	18,84	18,70	19,00	3,22	3,20
668	22,16	21,54	-	-	18,90	18,31	18,16	18,10	3,23	3,20
530	20,20	19,59	-	-	17,08	16,40	16,29	16,40	3,19	3,20

На рисунке 33 сопоставляются результаты расчета уран-графитовых реакторов без отражателей с экспериментальными данными работы [314]. Для сравнения теории с экспериментом было проведено также исследование критических параметров критических сборок на быстрых нейтронах ZPR-III, данные о которых опубликованы в работе [222]. Из обширного числа экспериментальных сборок были выбраны сборки, наиболее близкие по своей структуре к гомогенной. Полученные значения  $K$  согласуются с экспериментальными в пределах  $1 \div 3\%$ . Некоторое расхождение объясняется, по-видимому, тем, что в расчете не были учтены гетерогенные блокировки, а также наличием неоднородностей. Наибольшее расхождение наблюдается в сборках с большим содержанием железа. Это можно объяснить недостаточно точным выбором микросечений железа (в расчете был занижен коэффициент диффузии).

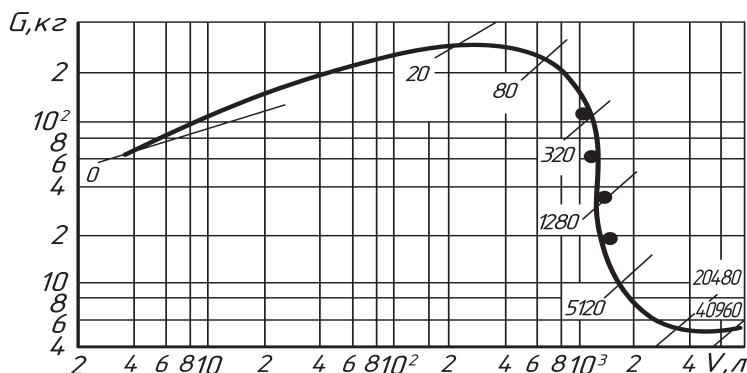


Рис. 33. Зависимость критической массы уран-графитовых реакторов без отражателя от объема: линия — расчетная кривая (обогащение по  $U^{235}$  — 90%); точки — экспериментальные точки (обогащение по  $U^{235}$  — 93,2%)

Следует заметить, что все расчеты были проведены с учетом термализации нейтронов в приближении одноатомного газового замедлителя, когда для определения эффективных одnogрупповых констант использовалось решение дифференциального уравнения в форме Уилкинса. Более точный учет термализации нейтронов при комнатных температурах с применением соответствующих программ, разработанных

В.В. Смеловым и Г.А. Илясовой, дал практически совпадающие результаты. Анализ проведенных расчетов показывает, что отличие теоретических и экспериментальных значений в критической массе не превышает 5–7%, что для задач, связанных с определением критических масс, может считаться вполне удовлетворительным.



# 23

## К расчету секционированных ядерно-энергетических установок

В связи с рассмотрением секционированных реакторных систем, предусматривающих возможность получения ядерной энергии в подкритических реакторах и значительного увеличения глубины выгорания делящегося изотопа [130], были произведены математические расчеты соответствующих установок и получены результаты применительно к некоторым конкретным вариантам систем.

Рассмотренная в данной главе физическая схема секционированной реакторной системы является в какой-то мере дальнейшим развитием и обобщением физической схемы реактора PWR [312].

Математические методы расчетов основаны на использовании матричной факторизации конечно-разностных уравнений реактора [230].

### 23.1. Секционированная реакторная система

Рассматривается секционированная реакторная системы, представляющая собой комбинацию критического реактора, который является запалом-источником подсветки нейтронами, и последовательно расположенных подкритических секций. На границе раздела между критическим реактором и первой подкритической секцией, а также на границах раздела других подкритических секций располагаются вентильные слои, пропускающие нейтроны только в одном направлении. Расчет такой системы проводился в цилиндрической геометрии для одной подкритической секции.

На рисунке 34 схематически изображена секционированная реакторная система. В центре расположен запальный критический реактор 1, затем «черный», для тепловых нейтронов, вентильный 2, представляющий собой комбинацию слоя  $U^{235}$  толщиной 0,2 см, слоя кадмия и слоя замедлителя — воды толщиной 2,5 см; к вентилю примыкает подкритическая секция 3, на внешней границе которой расположен «черный» слой урана.

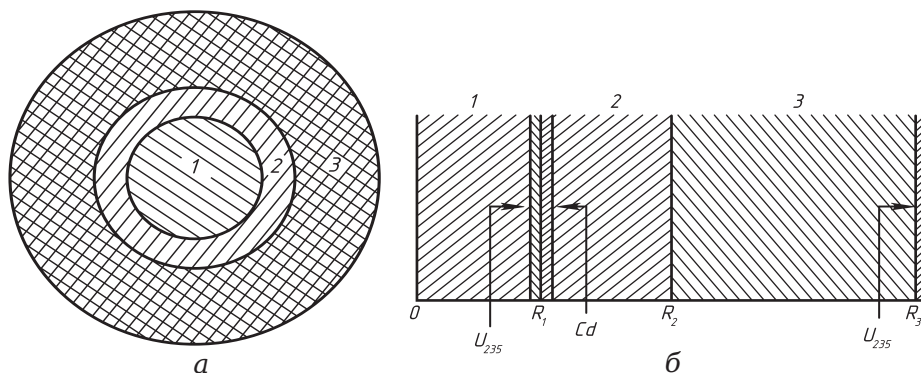


Рис. 34. Схема секционированной реакторной системы:  
 а — план; б — вертикальное сечение. 1 — критический реактор;  
 2 — нейтронный вентиль; 3 — первая подкритическая секция

Тепловые нейтроны критического реактора в уране вентильного слоя конвертируются в быстрые нейтроны спектра деления, которые проходят слои кадмия и воды и поступают в подкритическую секцию, где умножаются. Подавляющее большинство нейтронов, образовавшихся в подкритической секции, не могут пройти через нейтронный вентиль в обратном направлении к центральному критическому реактору, так как замедляются в воде и поглощаются в слое кадмия<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> При учете эффекта обратного пропускания нейтронов вентелем, как показал дополнительный расчет, увеличение эффективного коэффициента размножения секционированной системы не превосходит 10%.

## 23.2. Математическая модель системы

Пространственно-энергетический спектр нейтронов в отдельной подкритической секции, являющейся элементом секционированной подкритической системы, в диффузионно-возрастном приближении описывается следующей системой уравнений [230]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} [\xi \Sigma_s \varphi] &= \nabla D \nabla \varphi - \Sigma_c \varphi + \nu_f \chi(u) \left( \int_{-\infty}^{u_T} \Sigma_f \varphi du + \Sigma_{fT} \varphi_T \right), \\ \nabla D_T \nabla \varphi_T - \Sigma_{cT} \varphi_T &= +\xi \Sigma_s \varphi(r, u_T), \end{aligned} \quad (23.2.1)$$

$$\frac{\varphi}{4} - \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_1} = \eta(u), \quad \frac{\varphi_T}{4} - \frac{D_T}{2} \frac{d\varphi_T}{dn} \Big|_{S_1} = \eta_T,$$

$$\frac{\varphi}{4} + \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0, \quad \frac{\varphi_T}{4} + \frac{D_T}{2} \frac{d\varphi_T}{dn} \Big|_{S_2} = 0.$$

Здесь  $\nu_f$  — выход вторичных нейтронов на один производительно поглощенный нейтрон;

$\chi(u)$  — энергетический спектр нейтронов, возникающих в результате деления;

$S_1$  и  $S_2$  — границы подкритической секции с предыдущей и последующими секциями соответственно;

$\vec{n}$  — нормаль к границе, направленная от центра секционной системы;

$\eta(u)$  и  $\eta_T$  — плотность потоков [230] и тепловых нейтронов из предыдущей секции в данную.

С использованием многогруппового представления [230] система (23.2.1) сводится к системе уравнений диффузионного типа:

$$\begin{aligned} \nabla D_j \nabla \varphi_j - \Sigma_j \varphi_j &= W_j \varphi^{j-1} - S_j \sum_l C_l \varphi_l, \\ \frac{\varphi_j}{4} - \frac{D_j}{2} \frac{d\varphi_j}{dn} \Big|_{S_1} &= \eta_j, \quad \frac{\varphi_j}{4} + \frac{D_j}{2} \frac{d\varphi_j}{dn} \Big|_{S_2} = 0 \end{aligned} \quad (23.2.2)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Если рассматриваемая секция близка к критическому состоянию, то итерационный метод решения системы (23.2.2)

не является эффективным ввиду медленной сходимости решения [230, 334]. Поэтому для решения системы (23.2.2) был использован метод [230], основанный на матричном представлении задачи (23.2.2):

$$\begin{aligned} \nabla D \nabla \Phi - \Sigma \Phi &= 0, \\ \frac{\Phi}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\Phi}{dn} \Big|_{S_1} &= H, \quad \frac{\Phi}{4} + \frac{D}{2} \frac{d\Phi}{dn} \Big|_{S_2} = 0, \end{aligned} \quad (23.2.3)$$

где  $\Phi$  и  $H$  — векторы соответственно с компонентами  $\{\varphi_g\}, \{\eta_j\}$ ;  $D$  и  $\Sigma$  — матрицы:  $D = \|\delta_{jl} D_j\|$ ,  $\Sigma = \|\Sigma_{jl}\|$ , причем

$$\begin{aligned} \Sigma_{jl} &= S_j C_l + \delta_{jl} \Sigma_j + \delta_{j,l+1} W_j, \\ \delta_{jl} &= \begin{cases} 1, & (j = l), \\ 0, & (j \neq l). \end{cases} \end{aligned}$$

Вследствие того, что в состав вентиля входит тонкий слой, состоящий из  $U^{235}$  и кадмия, необходимо остановиться подробнее на постановке диффузионных условий на границе двух сред ( $A$  и  $B$ ), разделенных тонким поглощающим слоем ( $B$ ). В данном случае допустимо рассмотрение задачи в рамках плоской геометрии. Примем за положительное направление нормали направление из среды  $A$  в среду  $B$ .

Если в плоской задаче через  $\varphi(x, E, \mu)$  обозначить поток нейтронов в единице объема фазового пространства  $(x, E, \mu)$ , то интегральные потоки нейтронов  $\varphi_j(x, \mu)$  по каждой из энергетических групп, очевидно, имеют вид

$$\varphi_j(x, \mu) = \int_{E_j}^{E_{j+1}} \varphi(x, E, \mu) dE.$$

Здесь  $\mu = \cos \Theta$ ,  $\Theta$  — угол между нормалью и направлением движения нейтрона.

Диффузионное приближение соответствует, как известно, представлению функции  $\varphi_j(x, \mu)$  в виде

$$\varphi_j(x, \mu) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_j(x) - 3D\mu \frac{d\varphi_j(x)}{dx} \right],$$

где

$$\varphi_j(x) = \int_{-1}^1 \varphi_j(x, \mu) d\mu.$$

Предполагая, что в слое  $B$  нейтроны не рассеиваются, а только поглощаются и воспроизводятся, мы можем связать количество нейтронов, ежесекундно влетающих в слой  $B$  со стороны среды  $A$ , с количеством нейтронов, ежесекундно покидающих слой  $B$  в направлении среды  $B$ :

$$\begin{aligned} \varphi \int_0^1 \mu d\mu - 3D_B \frac{d\varphi}{dx} \int_0^1 \mu^2 d\mu = \\ = \varphi \int_0^1 \mu e^{-\frac{\Sigma_c d}{\mu}} d\mu - 3D_A \frac{d\varphi}{dx} \int_0^1 \mu^2 e^{-\frac{\Sigma_c d}{\mu}} d\mu + Q. \end{aligned} \quad (23.2.4)$$

Здесь  $d$  — толщина поглощающего слоя,  $\Sigma_c$  — макроскопическое сечение поглощения в нем,  $Q$  — количество нейтронов, рожденных в единицу времени в  $1 \text{ см}^2$  слоя.

Баланс нейтронов, летящих в противоположном направлении, запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi \int_{-1}^0 \mu d\mu - 3D_A \frac{d\varphi}{dx} \int_{-1}^0 \mu^2 d\mu = \\ = \varphi_B \int_{-1}^0 \mu e^{\frac{\Sigma_c d}{\mu}} d\mu - 3D_B \frac{d\varphi}{dx} \int_{-1}^0 \mu^2 e^{\frac{\Sigma_c d}{\mu}} d\mu - Q. \end{aligned} \quad (23.2.5)$$

Интегрируя равенства (23.2.4) и (23.2.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_B}{2} - D_B \frac{d\varphi_B}{dx} = E_3(\beta) \varphi - 3D_A \frac{d\varphi}{dx} E_4(\beta) + Q, \\ -\frac{\varphi_A}{2} - D_A \frac{d\varphi_A}{dx} = -E_3(\beta) \varphi_B - 3D_B \frac{d\varphi}{dx} E_4(\beta) - Q, \end{aligned} \quad (23.2.6)$$

где

$$\beta = \Sigma_c d; \quad E_n(\beta) = \int_1^\infty e^{-\beta t} \frac{dt}{t^n}.$$

Из системы (23.2.6) легко получить граничные условия для различных частных случаев:

а) слой  $B$  не поглощает нейтронов ( $\Sigma_c = 0$ ) – в этом случае из системы уравнений (23.2.6) получаем известные граничные условия на поверхности раздела двух сред:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_B \\ D_A \frac{d\varphi_A}{dx} &= D_B \frac{d\varphi_B}{dx} + Q \end{aligned} \right\}; \quad (23.2.7)$$

б) слой  $B$  сильно поглощает нейтроны ( $\Sigma_c = \infty$ ) – в этом случае получаем граничные условия на поверхности «черного» слоя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi_B - D_B \frac{d\varphi_B}{dx} &= Q \\ \frac{1}{2} \varphi_A + D_A \frac{d\varphi_A}{dx} &= Q \end{aligned} \right\}; \quad (23.2.8)$$

в) среда  $B$  является «черной» для нейтронов (в частности, может быть вакуумом).

Поскольку выше было предположено, что слой  $B$  не рассеивает нейтроны, то нейтрон, ушедший из среды  $A$ , обратно уже не возвращается. Это значит, что слой  $B$  можно рассматривать тоже как «черный», что приводит к условию

$$\frac{\varphi_A}{2} + D_A \frac{d\varphi_A}{dx} = Q. \quad (23.2.9)$$

В матричной форме условия на границе двух сред, разделенных тонким поглощающим слоем, запишутся в виде уравнений (23.2.6), где  $E_3$  и  $E_4$  — матрицы:

$$E_3 = \|\delta_{jl} E_3(\beta_j)\|, \quad E_4 = \|\delta_{jl} E_4(\beta_j)\|,$$

а  $D$  — матрица, введенная выше.

Дифференциальное матрично-векторное уравнение (23.2.3), а также все граничные условия были представлены в конечно-разностной форме, и решение задачи находилось с использованием метода матричной факторизации [230].

### 23.3. Результаты численных расчетов

Для уяснения физических процессов, происходящих в секционированной реакторной системе, были проведены расчеты такой системы.

Рассматривались одинаковые однородные решетки в центральном критическом реакторе и в кольцевой критической секции. Уран-графитовая квадратная гетерогенная решетка с шагом 20 x 20 см составлялась из урановых бесконечно высоких цилиндрических стержней диаметром 3,5 см с 2%-м содержанием  $U^{235}$ .

Концентрация элементов в активной зоне решетки на  $1 \text{ см}^3$  была следующая:

$$\begin{aligned}\rho_{U^{235}} &= 0,0^56247, & \rho_{U^{238}} &= 0,0^33061, \\ \rho_{A1} &= 0,0^34774, & \rho_C &= 0,07977, & \rho_{H_2O} &= 0,03346.\end{aligned}$$

Толщина слоя  $U^{235}$  в нейтронном вентиле -  $d = 0,2 \text{ см}$ ; толщина слоя воды -  $H = 2,5 \text{ см}$ .

Расчеты производились для трех значений эффективного коэффициента размножения ( $K_{эфф}$ ) в подкритической секции: 0,88; 0,93 и 0,97. Соответственно этим значениям  $K_{эфф}$  находились размеры секции  $\Delta R = R_3 - R_2$  (см. рис. 41). Конструкция нейтронного вентиля во всех случаях оставалась одинаковой.

На рисунке 35-39 представлены графики пространственно-энергетического распределения потока нейтронов, соответствующие рассмотренным случаям.

На рисунке 40, 41 представлен интеграл деления  $Q(\vec{r})$  для подкритического внутреннего реактора.

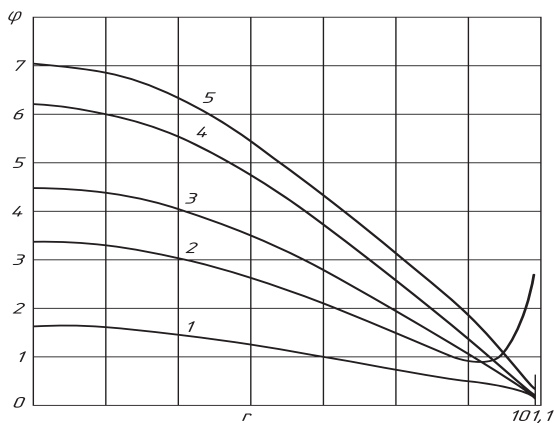


Рис. 35. Поток нейтронов  $\varphi(r, u)$  в критическом реакторе:  
 1 —  $10^{-1}\varphi(r, u = 0, 75)$ ; 2 —  $\varphi(r, u = 0)$ ; 3 —  $\varphi(r, u = 17, 5)$ ; 4 —  $10^{-1}\varphi(r, u = u_T)$ ;  
 5 —  $\varphi(r, u = 6, 5)$

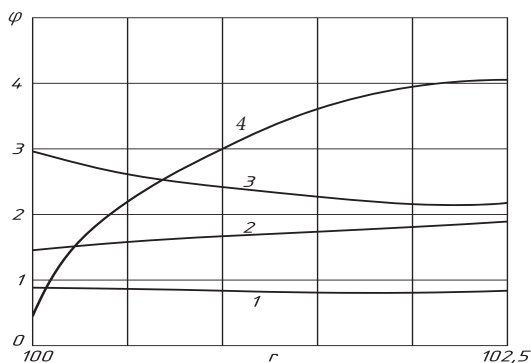


Рис. 36. Поток нейтронов  $\varphi(r, u)$  в слое воды (первый вариант):  
 1 —  $10^{-1}\varphi(r, u = 0, 75)$ ; 2 —  $\varphi(r, u = 17, 5)$ ; 3 —  $\varphi(r, u = 0)$ ; 4 —  $10^{-1}\varphi(r, u = u_T)$

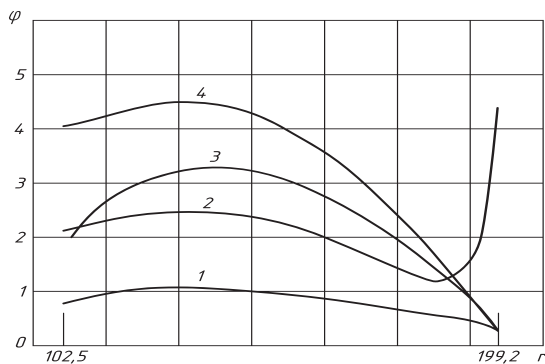


Рис. 37. Поток нейтронов  $\varphi(r, u)$  в активной зоне подкритического реактора (первый вариант): 1 —  $10^{-1}\varphi(r, u = 0, 75)$ ; 2 —  $\varphi(r, u = 0)$ ;  
 3 —  $\varphi(r, u = 17, 5)$ ; 4 —  $10^{-1}\varphi(r, u = u_T)$



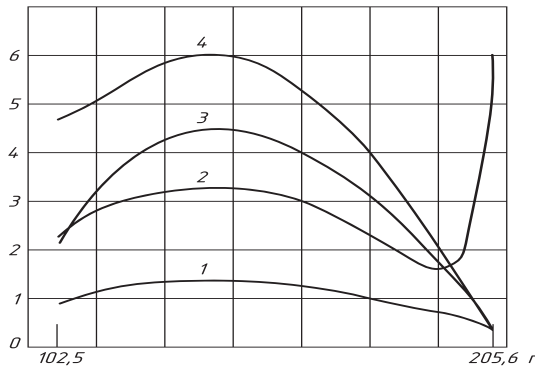


Рис. 38. Поток нейтронов  $\varphi(r, u)$  в активной зоне подкритического реактора (второй вариант): 1 —  $10^{-1}\varphi(r, u = 0, 75)$ ; 2 —  $\varphi(r, u = 0)$ ; 3 —  $\varphi(r, u = 17, 5)$ ; 4 —  $10^{-1}\varphi(r, u = u_T)$

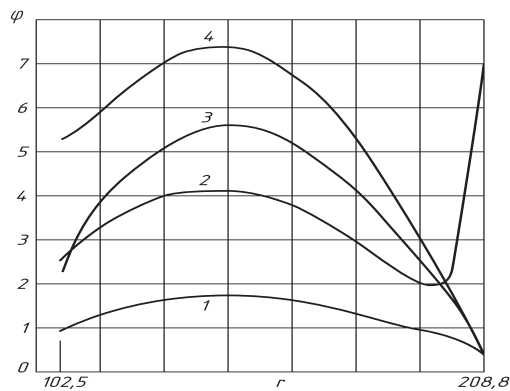


Рис. 39. Поток нейтронов  $\varphi(r, u)$  в активной зоне подкритического реактора (третий вариант): 1 —  $10^{-1}\varphi(r, u = 0, 75)$ ; 2 —  $\varphi(r, u = 0)$ ; 3 —  $\varphi(r, u = 17, 5)$ ; 4 —  $10^{-1}\varphi(r, u = u_T)$

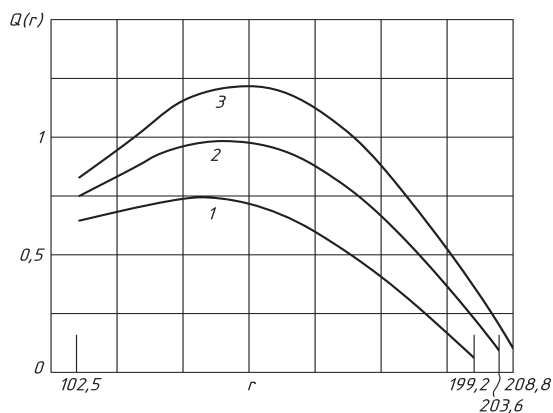


Рис. 40. Поток деления  $Q(r)$  для подкритического реактора: 1 — первый вариант; 2 — второй вариант; 3 — третий вариант

Под интегралом деления понимается величина

$$Q(\vec{r}) = \nu_f \left[ \int_{-\infty}^{u_T} \Sigma_f \varphi du + \Sigma_{fT} \varphi_T \right].$$

Отношение максимальных интегралов деления  $Q(\vec{r})$  в подкритических секциях и в критическом внутреннем реакторе для различных  $K_{эфф}$  подкритических секций имеет следующие значения:

$$\begin{array}{ccccc} K_{эфф}^i & 0,88 & 0,93 & 0,97 & \\ \max Q^I / \max Q_{кр} & 0,73 & 0,99 & 1,21 & \end{array}$$

Как видно из приведенных данных и рисунков 40, 41, с увеличением  $K_{эфф}$  в подкритическом реакторе и его приближением к единице происходит значительное увеличение потока нейтронов в подкритическом реакторе за счет подсветки нейтронами высоконапряженного критического реактора.

Таким образом, проведенные расчеты подтверждают исходные предположения, что использование секционированных реакторных систем дает возможность получать высокие потоки тепловых нейтронов.

Отношения  $Q_{max}$  к  $\bar{Q}$  [где —  $\bar{Q}$  среднее интегральное значение  $Q(\vec{r})$ ] для подкритического и внутреннего критического реакторов, а также отношения  $\bar{Q}$  к  $Q_{кр}$  имеют следующие значения:

	$K_{эфф}^{(1)} = 0,88$	$K_{эфф}^{(2)} = 0,93$	$K_{эфф}^{(3)} = 0,97$	Критический реактор
$Q_{max}^{(i)} / \bar{Q}^{(i)}$	1,40	1,40	1,40	2,12
$\bar{Q}^{(i)} / Q_{кр}$	1,11	1,50	1,84	1,0

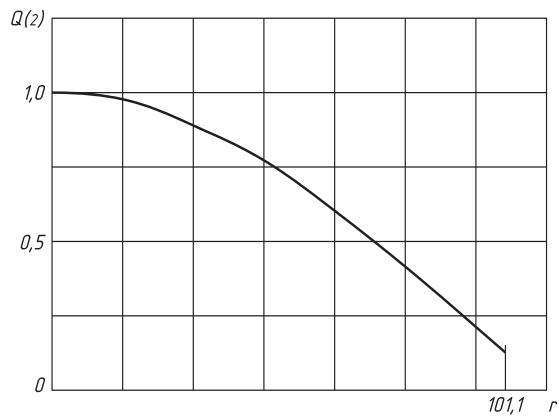


Рис. 41. Интеграл деления  $Q(\vec{r})$  для критического реактора

Интегральные значения энерговыделения в критическом реакторе и подкритических секциях, а также относительные значения удельных энерговыделений на одну ячейку равны:

	$K_{эфф}^{(1)} = 0,88$	$K_{эфф}^{(2)} = 0,93$	$K_{эфф}^{(3)} = 0,97$	Критический реактор
Интегральные значения	3286	4840	6169	1035
Относительные значения	1,09	1,47	1,80	1

Из приведенных данных следует, что распределение энерговыделения в подкритической секции может быть не менее выгодным, чем в критической секции, что подтверждает целесообразность предложенной в работе [130] схемы секционированной реакторной системы. Совершенно ясно, что если на внешней границе подкритической секции вместо слоя урана был бы отражатель из графита, распределение энерговыделения в подкритической секции стало бы еще более выгодным.

## Литература

1. *Абагян Л. П. и др.* Групповые константы для расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1964, с. 156.
2. *Абрамов А. А.* Ускорение сходимости в итерационных процессах // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 5. С. 1051.
3. *Абрамов А. А.* Идеи теории возмущений в некоторых алгоритмах линейной алгебры // В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Вып. 1. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968, с. 85.
4. *Агошков В. И.* Вариационные методы в теории переноса. Дис. ... физ. мат. наук. — Новосибирск, 1975.
5. *Агошков В. И.* Решение многомерного уравнения переноса обобщенным методом Бубнова — Галеркина. Препринт № 14. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1975.
6. *Агошков В. И.* Приближенное решение уравнения переноса в плоско-параллельной геометрии обобщенным методом Бубнова — Галеркина // В кн.: Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1975. Т. 6, № 5. С. 5.
7. *Агошков В. И.* О дифференциальных свойствах решений периодических задач о переносе частиц. Препринт № 23. — Новосибирск, 1976.
8. *Агошков В. И.* Некоторые особенности решения уравнения переноса и учет их при построении базисных функций. Препринт № 58. — Новосибирск, 1977.
9. *Агошков В. И.* О вариационной форме интегрального тождества Г. И. Марчука. Препринт № 39. — Новосибирск, 1977.

10. Агошков В. И. О гладкости решений уравнения переноса и приближенных методах их построения // В кн.: Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 44.
11. Агошков В. И. Задачи и уравнения теории переноса частиц. — М.: Изд-во ОВМ АН СССР, 1985.
12. Агошков В. И. Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости. — М.: Наука, 1988.
13. Агошков В. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Дымников В. П., Шутяев В. П. Метод сопряженных уравнений и анализ сложных систем // В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 1. — М.: Наука, 2005, с. 257–342.
14. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. — М.: Физматлит, 2002.
15. Агошков В. И., Лобарев И. В. Решение задачи на собственные значения для уравнения переноса // В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 102.
16. Агошков В. И., Попыкин А. И., Шихов С. Б. К теории малых возмущений для уравнения переноса // Сопряженные уравнения и теория возмущений в задачах математической физики. — М.: Изд-во ОВМ АН СССР, 1985, С. 76—84.
17. Агошков В. И., Шутяев В. П. Проекционно-сеточный метод для решения уравнения переноса в сферически-симметричной области // Численные методы и статистическое моделирование в теории переноса. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1980, с. 19–39.
18. Адамская И. А. Запись кинетического уравнения в сферических гармониках (криволинейные координаты — осесимметричный случай) // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 5. С. 927.

19. *Адамская И. А., Годунов С. К., Прокопов Г. П.* Выражение функционала В. С. Владимирова через сферические гармоники в тензорной форме ( $P_3$ -приближение) // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 4. С. 824.
20. *Адамчук Ю. В.* Атлас эффективных нейтронных сечений элементов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
21. *Адлер Ф., Хинман Г., Нордгейм Л.* Методы количественных оценок резонансных интегралов // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с.567.
22. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ОНТИ, 1939.
23. *Александров А. П., Африкантов И. И., Брандаус А. И., Гладков Г. А., Гнесин Б. Я., Неганов В. И., Хлопкин Н. С.* Атомный ледокол «Ленин» // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959.
24. *Алексеев П. П., Болобов П. А., Зарицкий С. М. и др.* Сравнение четырех итеративных методов решения одногрупповых уравнений для двумерных моделей быстрых реакторов // Атомная энергия. 1978. Т. 45, вып. 5. С. 386.
25. *Алиханов А. И., Владимирский В. В. и др.* Опытный физический реактор с тяжелой водой // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М., 1955.
26. *Амбарцумян В. А.* Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах // Уч. зап. ЛГУ. 1941. Т. 82. С. 141.
27. *Амуял А., Бенуа П., Горовиц Д. Ж.* Новый метод определения коэффициента использования тепловых нейтронов в элементарной ячейке // В сб.: Некоторые вопросы ядерной энергетике. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959, с. 237.
28. *Аспелунд О.* Новый метод решения уравнения Больцмана в транспортном приближении // В сб.: Физика ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1959, с. 433.

29. Ахиезер А. И., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. — М.: Гостехиздат, 1950.
30. Басс Л. П., Гермогенова Т. А., Хмылев А. Н. Модульная структура программ в осесимметричных задачах теории переноса системы «Радуга». Препринт № 97. — М.: ИПМ АН СССР, 1973.
31. Бать Г. А. Расчеты гетерогенных реакторов с небольшим числом блоков // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
32. Бать Г. А., Зарецкий Д. Ф. Эффективные граничные условия в теории диффузии нейтронов // Атомная энергия. 1958. Т. 4, № 6. С. 510.
33. Бать Г. А., Григорьева Е. А., Лебедев В. И., Прохоров А. И. Вычисление коэффициентов теплового использования в ячейках со сложными тепловыделяющими элементами : доклад (СССР), представленный на III Междунар. конференцию по мирному использованию атомной энергии, A/CONF 28/P/373. Женева, 1964. С. 141.
34. Бахвалов Н. С. О численном решении задачи Дирихле для уравнений Лапласа // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 5. С. 171.
35. Бахвалов Н. С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 5. С. 861.
36. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
37. Белкин В. Ф., Крупчицкий П. А., Сидиров Ю. С., Шве-дов О. В. Распределение плотности тепловых нейтронов по радиусу прутковых тепловыделяющих элементов. Доклад № 2034. // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
38. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1974.

39. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1959.
40. *Бернштейн С. Н.* Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций : собр. соч. Т. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1952, с. 127.
41. *Бернштейн С. Н.* О многочленах, ортогональных на конечном отрезке. Собр. соч. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 7.
42. *Бете Г.* Теоретический анализ нейтронных резонансов делящихся материалов // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 119.
43. *Биркгоф Г., Вигнер Е.* Положительность и критичность // В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1963, с. 132.
44. *Бирман М. Ш.* Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5, № 3. С. 152.
45. *Бирман М. Ш.* Об одном варианте метода последовательных приближений // Вестн. ЛГУ. 1952. Т. 9. С. 69.
46. *Блохинцев Д. И., Николаев Н. А.* Первая атомная электростанция СССР и пути развития атомной энергетики // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
47. *Блохинцев Д. И., Доллежалъ Н. А., Красин А. К.* Реактор атомной электростанции АН СССР // Атомная энергия. 1956. № 1.
48. *Блохинцев Д. И., Минашин М. Е., Сергеев Ю. А.* Физические и тепловые расчеты реактора атомной электростанции АН СССР // Атомная энергия. 1956. № 1.
49. *Блохинцев Д. И.* Физические и технические основы атомной энергетики. Доклад на сессии Академии наук УССР. // Украинск. физ. журнал 1. 1956. № 3. с. 209.



50. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехтеориздат, 1946.
51. Больцман Л. Лекции по теории газов. Сер. «Классики естествознания». Пер. с нем. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
52. Бондаренко И. И., Кузьминов Б. Д., Куцаева Л. С., Прохорова Л. И., Смиренкин Г. Н. Среднее число и спектр при делении быстрыми нейтронами. Доклад № 2187 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 1. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
53. Бояринцев Ю. Е., Узнадзе О. П. Об одном способе решения нестационарного уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 6. С.1406.
54. Брешиноква Е. Б., Орлов В. В. Решение кинетического уравнения в случае точечного мононаправленного источника // Атомная энергия. 1961. Т. 10, № 2.
55. Бримберг С., Дальстром. Вычисление температурного коэффициента эффективного резонансного интеграла для металлического урана и окиси урана // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 577.
56. Бродер Д. Л., Кутузов А. А., Левин В. В., Орлов В. В., Турусова А. В. Прохождение быстрых нейтронов через свинец и железо // Атомная энергия. 1959. Т. 7, № 4. С. 313.
57. Бродер Д. Л., Кутузов А. А., Наумов В. И., Сергеев Ю. А., Кондрашов А.П., Турусова А. В. Применение многогрупповых методов для расчета биологической защиты // В сб.: Теория и методы расчета реакторов. — М.: Госатомиздат, 1962.
58. Бродер Д. Л., Куркин С. А., Кутузов А. А., Левин В. И. Изучение пространственно-энергетических распределений нейтронов в различных средах. Доклад № 2147 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию

- атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
59. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии // Матем. сб. 1960. Т. 51, № 2. С. 227–238.
60. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных уравнений диффузии // Атомн. энерг. 1959. Т. 6, вып. 3. С. 338–340.
61. Бяков В. М., Иоффе Б. Л. Гомогенный реактор на естественном уране. Доклад № 2296 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
62. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
63. Вакспресс Э., Стоун П., Ли К. Математические методы многогрупповых расчетов двумерной пространственной задачи. Доклад № 633 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. иностр. ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959, с. 443.
64. Варга Р. С. Численные методы решения многомерных многогрупповых дифференциальных уравнений // В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1963, с. 187.
65. Варга Р. С. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
66. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
67. Вигнер Е. В. Математические проблемы теории ядерных реакторов // В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1963, с. 103.

68. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц, самосопряженных и несамопряженных уравнений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 93.
69. Владимиров В. С. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка // Приклад. матем. и мех. 1955. Т. 19, вып. 3. С. 315.
70. Владимиров В. С. Численное решение кинетического уравнения для сферы // Вычислит. матем. 1958. № 3. С. 31.
71. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Т. 59. — М.: Изд-во АН ССР, 1961.
72. Владимиров В. С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц. Диссертация // Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР. 1959.
73. Владимиров В. С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Изв. АН СССР, сер. матем. 1957. № 21. С. 3–52.
74. Владимиров В. С. Об уравнении переноса частиц // Изв. АН СССР, сер. матем. 1958. № 22. С. 475.
75. Владимиров В. С. Об интегральном уравнении, связанном со сферическими функциями // Научн. докл. высшей шк. 1958. № 6. С. 142.
76. Владимиров В. С. О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса // Вычислит. матем. 1961. № 7. С. 93.
77. Владимиров В. С. О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса // В сб.: Вычислит. матем. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, № 7.
78. Владимиров В. С. Особенности решения уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 4. С. 842.

79. *Владимиров В. С., Лебедев В. И.* Ядерная энергетика и математика // В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. — М.: Наука, 2005, с. 5–37.
80. *Владимиров В. С., Соболев И. М.* Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте – Карло // В сб.: Вычислит. матем. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, № 3, с. 130.
81. *Воробьев Ю. В.* Случайные итерационные процессы в методе переменных направлений // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 3. С. 663.
82. *Гавурин М. К.* Применение полиномов наилучшего приближения для улучшения сходимости итерационных процессов // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5, № 3. С. 156.
83. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений. — М.: Наука, 1971.
84. *Галанин А. Д.* Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. — М.: Атомиздат, 1957.
85. *Галанин А. Д.* Вычисление коэффициента теплового использования в гетерогенном реакторе // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
86. *Галанин А. Д.* О вычислении коэффициента теплового использования // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
87. *Галанин А. Д.* Поглощение и размножение нейтронов при замедлении в теории двух групп // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
88. *Галанин А. Д.* Критический размер гетерогенного реактора с малым числом блоков // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.

89. *Галанин А. Д.* Использование метода эффективных граничных условий для расчета критических размеров реактора // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
90. *Галанин А. Д.* О термализации нейтронов в гетерогенном реакторе // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
91. *Галанин А. Д.* Теория гетерогенного реактора с цилиндрическими блоками конечного радиуса // Атомная энергия. 1960. Т. 9, № 2. с. 89.
92. *Галанин А. Д., Немировская С. А., Рудик А. П., Абов Ю. Г., Белкин В. Ф., Крупчицкий П. А.* Критический опыт на тяжеловодном экспериментальном реакторе. Доклад № 2036 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959, с. 443.
93. *Галеркин Б. Г.* Стержни и пластинки // Вестн. инженеров. 1915. Т. 19. С. 897.
94. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
95. *Гельфанд И. М., Фейнберг С. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н.* О применении метода случайных испытаний (метода Монте – Карло) для решений кинетического уравнения. Доклад № 2141 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959, с. 443.
96. *Гельфанд И. М., Локуцкий О. В.* Метод прогонки для решения разностных уравнений // В кн.: Введение в теорию разностных схем / С. К. Годунова, В. С. Рябенского. — М.: Физматгиз, 1962, с. 452.
97. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Л.-М.: Физматгиз, 1958.

98. Гельфонд А. О., Шилов Г. Е. Исчисление конечных разностей. — М.: Гостехтеориздат, 1952.
99. Гермогенова Т. А. Об ограниченных решениях заданного на полубесконечном интервале неоднородного интегрального уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 1. С. 23.
100. Гермогенова Т. А. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1, № 6. С. 1001.
101. Гермогенова Т. А. О сходимости некоторых приближенных методов решения уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 3. С. 519.
102. Гермогенова Т. А. Обобщенное решение краевых задач для уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 3. С. 605.
103. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решения уравнения переноса. — М.: Препринт ИПМ АН СССР, 1968.
104. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решения уравнения переноса. — М.: Наука, 1986.
105. Гермогенова Т. А., Дегтярев С. Ф., Орлов В. В. и др. Перенос быстрых нейтронов в плоских защитах. — М.: Атомиздат, 1971.
106. Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
107. Годунов С. К. Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2, № 6. С. 972.
108. Годунов С. К., Прокопов Г. П. Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильно эллиптических задачах. — М.: Препринт ИПМ АН СССР, 1968.
109. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1973.

110. Гольдин В. Я. Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 4. С. 748.
111. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078.
112. Гольдштейн Х., Цвейфел П., Фостер Д. Современное состояние эксперимента и теории по замедлению нейтронов в водородсодержащей среде // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 688.
113. Гордеев И. В., Кардашев Д. А., Малышев А. В. Справочник по ядерно-физическим константам для расчетов реакторов. — М.: Атомиздат, 1960.
114. Гордеев И. В., Орлов В. В., Седельников Т. Х. Температурная зависимость эффективного резонансного интеграла поглощения // Атомная энергия. 1957. № 3. с. 252.
115. Гордеев И. В., Пупко В. Я. Оценка сечения поглощения нейтронов осколками в промежуточной области энергий и действие осколков в промежуточных реакторах. Доклад № 2223 // Труды второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 1. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959, с. 443.
116. Громова З. И., Дубовский Б. Г., Камаев А. В., Орлов В. В. Измерение резонансного поглощения нейтронов в реакторе атомной электростанции // Атомная энергия. 1957. № 5. с. 411.
117. Гудмен К. Научные и технические основы ядерной энергетики. Т. I-II. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
118. Гуин Р., Триби Д., Вейнберг А. Экспериментальные и теоретические исследования критических ансамблей без отражателя, содержащие водные растворы уранта-235. Доклад № 593 // Труды II Междунар. конференции по мирному

- использованию атомной энергии. Докл. иностранных ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
119. *Гуревич И. И., Померанчук И. Я.* Теория резонансного поглощения в гетерогенных системах // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
120. *Гурвич Х., Эрлих Р.* Системы на высокообогащенном ядерном горючем с использованием тепловых и промежуточных нейтронов // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с.362.
121. *Давиденко Д. Ф.* О применении метода вариации параметра к построению итерационных формул повышенной точности для определения численных решений нелинейных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 3. С. 499.
122. *Давыдов А. С.* Теория атомного ядра. — М.: Физматгиз, 1958.
123. *Давыдов Б. И.* Ж. exper. и теорет. физ. 1937. № 7. С. 1069.
124. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы (спектральная теория). Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
125. *Деклу А.* Метод конечных элементов. Пер. с франц. — М.: Мир, 1976.
126. *Дементьев В. Г., Лебедев В. И., Нечепуренко Ю. М.* Спектральный анализ модели ядерного реактора с запаздывающими нейтронами // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов. Нейтроника-98. — Обнинск: ФЭИ, 1999, с. 143–150.
127. *Допши Г.* Метод упрощения геометрии активной зоны реактора для физических расчетов. Доклад № 325 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. иностранных ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.



128. Дроздов С. И., Зарецкий Д. Ф., Кудрин Л. П., Седельников Т. Х. О формировании спектра тепловых нейтронов. Доклад № 2033 // Труды II Международ. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 1. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
129. Дубовский Б. Г. Секционированные реакторные системы // Атомная энергия. 1959. Т. 7, № 5. С. 456.
130. Дубовский Б. Г. Атомная энергия. 1959. Т. 4, вып. 5. С. 456.
131. Дубовский Б. Г. и др. Атомная энергия. 1964. Т. 16, вып. 1.
132. Дьяконов Е. Г. Метод переменных направлений решения систем конечно-разностных уравнений // Докл. АН СССР, 1961. Т. 138, № 2. С. 271.
133. Дьяконов Е. Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру // ЖВМ и МФ, 1966. Т. 6, № 1. С. 12.
134. Дьяконов Е. Г., Лебедев В. И. Метод расщепления для третьей краевой задачи. Вычислительные методы и программирование. Вып. IV. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1967, с. 101.
135. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1960.
136. Дядькин И. Г. Пространственно-энергетическое угловое распределение нейтронов в многокомпонентных, включая водород, безграничных средах // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
137. Егiazаров М. Б., Дикарев В. С., Мадеев В. Г. Измерение резонансного поглощения нейтронов в уран-графитовой решетке. Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии 1-5 июля 1955 г. Заседание отделения физикоматематических наук.
138. Емельянов В. С. Будущее атомной энергетики в СССР. Доклад № 2027 // Труды II Международ. конференции по мир-

- ному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
139. *Ершов Ю. И., Шихов С. Б.* Математические основы теории переноса. В 2-х т. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
140. *Желязны Р.* Метод разложения по собственным функциям в теории транспорта нейтронов. Доклад (ПНР), представленный на III Междунар. конференцию по мирному использованию атомной энергии. A/CONF 28/P/498. Женева, 1964.
141. *Жуков А. И.* О сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. 1955. Т. 117, № 2. С. 174.
142. *Заграфов В. Г.* Метод оценки критических параметров тел произвольной формы из делящегося вещества // Атомная энергия. 1960. Т. 8, вып. 1. С. 23.
143. *Зарецкий Д. Ф., Одинцов Д. Д.* Эффективные граничные условия для «серых тел» // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
144. *Зубарев Т. Н., Марчук Г. И., Соколов А. К.* Критические массы гомогенных реакторов и ядерная безопасность. Отчет АН СССР. 1960.
145. *Зубарев Т. Н.* Мигающий реактор // Атомная энергия. 1958. Т. 5, № 6. С. 605.
146. *Зубарев Т. Н.* Введение в теорию ядерных реакторов. — М.: Изд-во МАИ, 1959.
147. *Кадомцев Б. Б.* О функции влияния в теории переноса лучистой энергии // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 3. С. 541.
148. *Казарновский М. В.* Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в тяжелом газообразном замедлителе // Эксперимент. и теор. физ. 1957. Т. 33, № 6(12). С. 1533.

149. Казарновский М. В., Шапиро Ф. Л. Теория диффузии тепловых нейтронов с учетом распределения скоростей // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
150. Казарновский М. В., Степанов А. В., Шапиро Ф. Л. Термализация и диффузия нейтронов в тяжелых средах. Доклад № 2148 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
151. Казачковский О. Д. Экономика ядерного горючего в быстрых энергетических реакторах. Доклад № 2028 // Труды II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
152. Каллиган Д. Гомогенные критические системы // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
153. Каллихен и др. Физика реакторов // Докл. иностр. ученых на Междунар. конференции по мирному использ. атомной энергии. Женева, 1955. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 179.
154. Камаев А. В., Дубовский Б. Г., Вавилов В. В., Поцов Г. А., Паламарчук Ю. Д., Иванов С. П. Экспериментальное изучение эффектов взаимодействия двух подкритических реакторов // В сб.: Критические массы реакторов. — М.: Госатомиздат, 1961.
155. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. Сер. ОМЭН. 1933. Т. 5. С. 647.
156. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
157. Канторович Л. В. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48, № 7. С. 485.

158. Каплан И., Черник Д. Уран-графитовые решетки. Брукхейвенский реактор // В сб.: Экспериментальные реакторы и физика реакторов. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
159. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения  $S_n$ -методом // В кн.: Физика ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
160. Карлсон Б. Численное решение задач кинетической теории нейтронов // В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. — М.: Госатомиздат, 1963.
161. Кахан Т., Гози М. Физика и расчет ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1960.
162. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.
163. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // В сб.: Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2, № 2. С. 266.
164. Коген Е. Обзор теорий замедления нейтронов до тепловых энергий // В сб.: Экспериментальные реакторы и физика реакторов. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
165. Коген Е. Последние работы по термализации нейтронов // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 634.
166. Кодд Д., Шеферд Л., Тайт Д. Физика реакторов на быстрых нейтронах // В сб.: Успехи в области ядерной энергии. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 289.
167. Козлов Н. И. Применение вариационного метода к определению параметров критического сферического реактора // В сб.: Некоторые математические вопросы нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 143.
168. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. — М.: Мир, 1969.
169. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

170. Кондратьев К. Я. Лучистая энергия солнца. — М.: Гидрометиздат, 1954.
171. Красносельский М. А., Крейн С. Г. Итеративный процесс с минимальными невязками // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). С. 2.
172. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко М. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
173. Кочергин В. П., Орлов В. В. Длина замедления нейтронов // Атомная энергия. 1959. Т. 6, № 1. С. 34.
174. Красин А. К., Дубовский Б. Г. Физический бериллиевый реактор // Атомная энергия. 1956. № 4.
175. Красин А. К., Дубовский Б. Г., Ланцов М. Н., Глазков Ю. Ю., Гончаров Р. К., Камаев А. В., Герасева Л. А., Вавилов В. В., Инютин Е. И., Сеченков А. П. Изучение физических характеристик реактора с бериллиевым замедлителем // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959.
176. Крейц. Измерение резонансных интегралов на уране // 1944 г. Мат. Комиссии по атомной энергии США. Ядерные реакторы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956, с. 217.
177. Кузнецов Е. С. Теория негоризонтальной видимости // Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1943. № 5.
178. Кузнецов Е. С. Общий метод построения приближенных уравнений переноса лучистой энергии // Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1954. № 4.
179. Кузнецов Е. С. Лучистое равновесие газовой оболочки, окружающей черную сферу // Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1951. № 3. С. 69.
180. Кузнецов Е. С. К методике расчета ячейки гетерогенного реактора // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 488.

181. Кузнецов Ю. А. Некоторые вопросы теории и приложений итерационных процессов. Диссертация. Новосибирск, 1969.
182. Кузнецов Ю. А. К теории итерационных процессов // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 274.
183. Кузнецов Ю. А. О симметризации приближенных задач теории переноса // В кн.: Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1978, с. 125.
184. Кузнецов Ю. А. О симметризации итерационных процессов // В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1969, с. 30.
185. Кузнецов Е. С., Марчук Г. И. Вычислительные методы в теории переноса излучения // В кн.: Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 3-12 июля 1961 г. Т. 2. Секцион. Докл. — Л.: 1964, с. 571-580.
186. Кузнецов Ю. А., Овчинский Б. В. Результаты численного решения интегрального уравнения теории рассеяния света в атмосфере // Тр. Геофизич. ин-та АН СССР. 1949. № 4.
187. Кузнецов Ю. А., Протасов А. В. Об одном подходе к решению кинетического уравнения для сферы // В кн.: Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1987, с. 41.
188. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // Успехи матем. наук. 1940. Вып. 8. С. 125.
189. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1951.
190. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1968.

191. Курчатov И. В. Некоторые вопросы развития атомной энергии в СССР (Лекция, прочитанная 25 апреля 1956 г. в английском науч.-исслед. центре в Харуэлле.) // Атомная энергия. 1956. № 3. С. 5.
192. Кухцевич В. И., Казанский Ю. А., Николайшвили Ш. С., Цыпин С. Г. Прохождение рассеянного  $\gamma$ -излучения в воде // Атомная энергия. 1958. Т. 4, № 2. С. 138.
193. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1965.
194. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гостехиздат, 1953.
195. Лалетин Н. И. Элементарные решения уравнения переноса нейтронов для задач с цилиндрической и сферической симметрией // Атомная энергия. 1966. Т. 20, вып. 6. С. 509.
196. Лалетин Н. И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса ( $S_N$ -приближения) // В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. — М.: Атомиздат, 1969, с. 228.
197. Лалетин Н. И. Распространение нейтронов в гетерогенной среде // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959.
198. Ландау Л. Д., Мейман Н. Н., Халатников И. М. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток // Тр. III всесоюзного математического съезда. Т. II. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
199. Латышев А. В. О решении граничных задач для уравнения переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34, № 2. С. 234–245.
200. Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4, № 3. С. 449; № 4. С. 649.

201. Лебедев В. И. Метод характеристик для решения кинетического уравнения. — ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 2. С. 251.
202. Лебедев В. И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения // В кн.: Численные методы решения задач математической физики. — М.: Наука, 1966, с. 154.
203. Лебедев В. И. О нахождении решений кинетических задач // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 5. С. 895.
204. Лебедев В. И.  $P_{NI}$ -уравнения. — ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 4. С. 813.
205. Лебедев В. И. Об итерационном КР-методе. — ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 6. С. 1250.
206. Лебедев В. И. О нахождении решений некоторых задач переноса. Symposium of Neutron Thermalization and Reactor Spectra. Ann Arbor, USA 17-21 July, 1967.
207. Лебедев В. И. К вопросу о сходимости метода итерационных отклонений // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 5. С. 67.
208. Лебедев В. И. О сходимости КР-метода для некоторых задач переноса. — ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 226.
209. Лебедев В. И. О построении операции Р в КР-методе. — ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 4. С. 762.
210. Лебедев В. И. О КР-методе и разностных схемах для кинетического уравнения // В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. — М.: Атомиздат, 1969, с. 43.
211. Лебедев В. И. О нахождении решений кинетических задач теории переноса. Диссертация. — Новосибирск. 1967.
212. Лебедев В. И. КР-метод итераций для кинетического уравнения // мат. совещания по математическим методам решения задач ядерной физики, Дубна, 17-20 ноября 1964. С. 93.



213. Лебедев В. И., Курченкова Г. И., Цапелкин Е. С. Метод Галеркина для диффузионных уравнений // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 4. С. 957.
214. Лебедев В. И., Пляшкевич В. Ю. Решение кинетических уравнений методом Галеркина // В кн.: Сборник докладов по программам и методам физического расчета быстрых реакторов. — Димитровград: Изд-во СЭВ, 1975, с. 141.
215. Лебедев В. И., Финогенов С. А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11, № 2. С. 425.
216. Лебедев В. И., Шишков Л. К., Ярославцева Л. Н. Сравнение итерационных методов решения уравнения диффузии для гексагональных конечно-разностных сеток // В кн.: Разностные и вариационно-разностные методы. Вып. 5. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1979, с. 5.
217. Лейпунский А. И., Абрамов А. И., Андреев В. Н., Барышников А. И., Бондаренко И. И., Галков В. И., Голубев В. И., Гулько А. Д., Гусейнов А. Г., Казачковский О. Д., Козлов И. В., Краснояров Н. В., Кузьминов Б. Д., Морозов В. Н., Николаев М. Н., Смиренкин Г. Н., Стависский Ю. Я., Украинцев Ф. И., Усачев Л. Н., Фетисов Н. И., Шерман Л. Е. Исследования по физике реакторов на быстрых нейтронах. Доклад № 2038 // Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
218. Лейпунский А. И., Грабин В. Г., Аристархов Н. Н., Бондаренко И. И., Казачковский О. Д., Любимцев О. И., Пашков С. А., Пинхасик М. С., Рене К. К., Стависский Ю. Я., Украинцев Ф. И., Усачев Л. Н., Стумбур Э. А. Экспериментальные быстрые реакторы в СССР // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959.
219. Лобарев И. В. Метод возмущений в исследовании простоты собственных значений интегрального уравнения Пайерлса // Сопряженные уравнения и теория возмущений

- в задачах математической физики. — М.: Изд-во ОВМ АН СССР, 1985, с. 136-150.
220. *Ловенштейн В., Окрент Д.* Основные положения физики энергетических реакторов на быстрых нейтронах. Доклад № 637 // Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. иностр. ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
221. *Локуцкий О. В.* Численные методы решения уравнений в частных производных. Всесоюзное совещание по функциональному анализу и его применениям // Успехи матем. наук. 1956. Т. XI, вып. 3(69). С. 224.
222. *Лонг Дж. и др.* Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Избранные докл. иностр. ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
223. *Лукьянов А. А., Орлов В. В.* Теория эффективных сечений в области частичного перекрыwania резонансов для тяжелых ядер // Атомная энергия. 1961. № 3.
224. *Лукьянов А. А., Орлов В. В.* Влияние резонансной структуры сечений на диффузию нейтронов // В кн.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961, с. 105.
225. *Люстерник Л. А.* Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Тр. матем. ин-та АН СССР. 1947. Т. 20. С. 49.
226. *Льюис Дж.* Ценность. Сопряженная функция. — М.: Атомиздат, 1972.
227. *Майоров Л. В., Труханов Г. Я.* Некоторые методы решения задач термализации нейтронов. Symposium of Neutron Thermalization and Reactor Spectra. Ann Arbor, USA, 17-21 July, 1967.
228. *Маклин Р., Померанс Г.* Резонансные интегралы захвата // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 203.

229. Мандл М., Хаулет Дж. A Method for Calculating the Critical Mass of an Intermediate Reactor. Доклад № 430 // Междунар. конференция по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955.
230. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1958.
231. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1961.
232. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. 264 с.
233. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. 608 с.
234. Марчук Г. И. К вопросу о многогрупповом методе расчета ядерных реакторов // Атомная энергия. Приложение № 1. 1958.
235. Марчук Г. И. Многогрупповой метод расчета реактора атомной электростанции // Атомная энергия. 1956. № 2.
236. Марчук Г. И. О приближенных методах расчета ядерных реакторов // Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1-5 июля 1955. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 371-374.
237. Марчук Г. И., Агошков В. И. О выборе координатных функций в обобщенном методе Бубнова - Галеркина // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 6. С. 1253.
238. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционносеточные методы. — М.: Наука, 1981.
239. Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. — М.: Наука, 1993.
240. Марчук Г. И., Бельская Ж. Н. О применении сопряженных уравнений к расчету защиты от излучения // В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. — М., 1963, с. 99-102.

241. Марчук Г. И., Дубовский Б. Г., Смелов В. В., Милютин З. Н. К расчету секционированных ядерно-энергетических установок // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
242. Марчук Г. И., Ильин В. П. Резонансный захват нейтронов в кольцевом блоке // В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. Сб. ст. — М.: 1962, с. 191–199.
243. Марчук Г. И., Имшенник В. С., Баско М. М. Физика термоядерного взрыва шара из сжиженного дейтерия нормальной плотности. Невозможность сферическисимметричного термоядерного взрыва при нормальной плотности жидкого дейтерия // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 3. С. 289–295.
244. Марчук Г. И., Кочергин В. П. Эффективный метод решения двумерного уравнения диффузии для ячеек квадратной и шестиугольной формы // Атомная энергия. 1965. Т. 18, вып. 6. С. 638.
245. Марчук Г. И., Кочергин В. П. Приближенный метод расчета критических масс сферических реакторов с бесконечным отражателем // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Госатомиздат, 1961.
246. Марчук Г. И., Кочергин В. П., Погудалина Е. И., Кузнецова Л. И. О применении эффективной одnogрупповой теории к расчету ядерных реакторов // В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. Сб. ст. — М., 1962, с. 79–85.
247. Марчук Г. И., Кочергин В. П., Невиница А. И., Узнадзе О. П. Критические параметры гомогенных размножающихся систем. — М.: Атомиздат, 1965.
248. Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. К вопросу об оптимальных итерационных процессах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 6. С. 1331.
249. Марчук Г. И., Илясова Г. А., Колесов В. Е., Кочергин В. П., Кузнецова Л. И., Погудалина Е. И. Критические массы

- уран-бериллиевых реакторов // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Госатомиздат, 1961.
250. Марчук Г. И., Илясова Г. А., Колесов В. Е., Кочергин В. П., Кузнецова Л. И., Погудалина Е. И. Критические массы водных смесей соединений урана и плутония // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Госатомиздат, 1961.
251. Марчук Г. И., Илясова Г. А., Колесов В. Е., Кочергин В. П., Кузнецова Л. И., Погудалина Е. И. Критические массы уран-графитовых реакторов // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Госатомиздат, 1961.
252. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте - Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976.
253. Марчук Г. И., Михайлус Ф. Ф. Замедление нейтронов в среде с резонансным поглощением // Атомная энергия. 1958. № 6.
254. Марчук Г. И., Николайшвили Ш. С. Применение метода сферических гармоник к задачам теории переноса. I. Общие свойства  $P_n$ -приближения // В сб.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1962, с. 5.
255. Марчук Г. И., Николайшвили Ш. С., Погудалина Е. И., Бельская Ж. Н., Кочубей Н. П. Применение метода сферических гармоник к задачам теории переноса. II.  $P_2$ -приближение // В сб.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1962.
256. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1981.
257. Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций // В кн.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961, с. 30.

258. Марчук Г. И., Пененко В. В., Султангазин У. М. О решении кинетического уравнения методом расщепления // В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1966, с. 152.
259. Марчук Г. И., Пупко В. Я., Погудалина Е. И., Смелов В. В., Тютерев И. П., Платонова С. Т., Дружинина Г. И. Некоторые вопросы физики ядерных реакторов и методы их расчета. Доклад № 2151 // Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советских ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
260. Марчук Г. И., Смелов В. В. К расчету коэффициента теплового использования с учетом термализации нейтронов // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
261. Марчук Г. И., Смелов В. В. Многогрупповой метод расчета пространственно-энергетического распределения потока тепловых нейтронов и применение теории возмущений // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961, с. 143–160.
262. Марчук Г. И., Султангазин У. М. О сходимости метода расщепления для уравнения переноса излучения. — М.: Госатомиздат, 1965. Т. 161, № 1. С. 66.
263. Марчук Г. И., Султангазин У. М. К вопросу о решении кинетического уравнения переноса методом расщепления // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, №4. С. 857–860.
264. Марчук Г. И., Султангазин У. М. К обоснованию метода расщепления для уравнения переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 85.
265. Марчук Г. И., Турчин В. Ф., Смелов В. В., Илясова Г. А. Методы расчета спектра медленных нейтронов // Атомная энергия. 1962. Т. 13, вып. 6. С. 534–546.
266. Марчук Г. И., Яненко Н. Н. Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 6. С. 1291.

267. Марчук Г. И., Яненко Н. Н. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики // В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1966, с. 5.
268. Масленников М. В. К теории сферической проблемы Милна // В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 56.
269. Масленников М. В. Проблемы Милна с произвольной индикатрисой // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 5. С. 895.
270. Масленников М. В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием // Труды МИАН. 1968. Т. 47. С. 3-132.
271. Масленников М. В. К проблеме Вика // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 59.
272. Материалы Комиссии по атомной энергии США. Ядерные реакторы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
273. Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов / под ред. Я. В. Шевелева. — М.: Атомиздат, 1974.
274. Меррей Р. Физика ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1959.
275. Милн В. Э. Численный анализ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
276. Михайлов Г. А. Расчеты критических систем методом Монте - Карло // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 1. С. 71.
277. Михайлов Г. А. Оценка некоторых нелинейных функционалов и приближенный расчет групповых констант теории переноса методом Монте-Карло // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 3. С. 590.
278. Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте - Карло. — Новосибирск: Наука, 1974.

279. Михайлус Ф. Ф. Применение вариационного метода к расчету критического режима цилиндрического реактора // В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 165.
280. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1957.
281. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Гостехиздат, 1952.
282. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. — М.: Физматгиз, 1966.
283. Морозов В. Н. О решении кинетических уравнений с помощью  $S_n$ -метода // В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1962, с. 91.
284. Мортон К. Вычисление вероятности избежания резонансного захвата // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 594.
285. Мостовой В. И., Дикарев В. С., Егузаров М. Б., Салтыков Ю. С. Измерение спектра нейтронов в уран-водных решетках // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959.
286. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.
287. Мухин К. Н., Макарев В. К., Венедиктов А. П. Диффузия тепловых нейтронов в анизотропных средах // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
288. Нелкин М. Slow Neutrons Inelastic Scattering and Neutron Thermalisation. Доклад на симпозиуме по неупругому рассеянию. Вена, 1960.
289. Николаева М. Н. О релаксационном методе Саусвелла // Тр. Математического института им. В. А. Стеклова. Вып. XXVIII. — М.: Изд-во АН СССР, 1949.



290. *Николайшвили Ш. С.* Прохождение  $\gamma$ -излучения через плоский слой // В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 183.
291. *Николайшвили Ш. С.* Приближенное решение уравнения переноса методом моментов // Атомная энергия. 1961. Т. 9, № 2.
292. *Николайшвили Ш. С.* О решении односкоростного уравнения переноса с использованием приближения Ивона – Мартенса // Атомная энергия. 1966. Т. 20, вып. 4. С. 344.
293. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
294. *Новожилов А. И., Шихов С. Б.* Метод усреднения ядерных констант для расчета быстрого реактора с учетом ценности нейтронов // Атомная энергия. 1960. Т. 8, № 3. С. 209.
295. *Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч. 1. Дифференциальные уравнения и их применение. Вып. 5. — Вильнюс: Изд-во Ин-та физики и матем. АН Лит. ССР, 1973.
296. *Окрент Д. и др.* Обзор теоретических и экспериментальных основ физики реактора на быстрых нейтронах // В сб.: Экспериментальные реакторы и физика реакторов. — М.: Гостехиздат, 1956.
297. *Орлов В. В.* Альбедные уравнения в теории диффузии и замедления нейтронов // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
298. *Орлов В. В.* Взаимная экранировка блоков резонансного поглотителя нейтронов в «тесной» решетке // Атомная энергия. 1958. Т. 4, № 6. С. 531.

299. Орлов В. В., Голашвили Т. В., Васкин А. И. Резонансное поглощение нейтронов в гетерогенных реакторах // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Госатомиздат, 1961.
300. Орлов В. В., Лукьянов А. А. Влияние интерференции потенциального и резонансного рассеяния на резонансное поглощение нейтронов в веществе // В сб.: Теория и методы расчета реакторов. — М.: Госатомиздат, 1962.
301. Орлов В. В., Цыпин С. Г. Защита транспортных установок с ядерным двигателем. Сб. статей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
302. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
303. Пененко В. В. Об алгоритмах и системе программирования задач расчета двумерных реакторов и некоторых задач теории переноса. Диссертация. — Новосибирск, 1965.
304. Петров Ю. В. Резонансное поглощение в теснорасположенных малых блоках // Атомная энергия. 1957. № 4.
305. Пляшкевич В. Ю. Вариационный метод решения кинетических уравнений в периодических решетках. — М.: Препринт ИАЭ-2549, 1975.
306. Пляшкевич В. Ю. Об одном вариационном методе решения кинетических уравнений // В кн.: Вариационно-разностные методы решения задач математической физики. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 86.
307. Птицын А. Р. К вопросу о нахождении пространственно-энергетического распределения нейтронов от плоского источника в бесконечной среде // Атомная энергия. 1960. Т. 9, № 3. С. 216.
308. Птицына Н. В. Применение вариационного метода к некоторым обобщениям задачи Милна // В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 28.

309. Пупко В. Я. Анализ зависимости между критической загрузкой и критическим объемом для реакторов различного типа // Атомная энергия. Приложение № 1. 1958.
310. Пупко В. Я., Ермакова Л. И. О параметрах реактора с минимальной критической загрузкой // Атомная энергия. 1959. Т. 7, № 6. С. 560.
311. Пупко В. Я., Зродников А. В., Лихачев Ю. И. Метод сопряженных функций в инженерно-физических исследованиях. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
312. Радковский А., Красик С. Физические проблемы реактора с водой под давлением (PWR). Докл. иностр. ученых на Муждунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Атомная энергетика. Женева, 1955. — М., Госэнергоиздат, 1956, с. 347.
313. Рейнолдс А., Нелкин М., Розенблум М., Уитмор У. Термализация нейтронов на химически связанных водороде и углероде // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 648.
314. Рейнольдс Ф. В. Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Избранные докл. иностр. ученых. Т. 3. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959, с. 7.
315. Романов Ю. А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Атомиздат, 1960.
316. Романова Л. М. Задача Милна для полупространства с анизотропным рассеянием и захватом нейтронов // В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 8.
317. Румянцев Г. Я. Граничные условия в методе сферических гармоник // Атомная энергия. 1961. Т. 10, вып. 1. С. 26.

318. Румянцев Г. Я. Об использовании четных приближений в методе сферических гармоник // В сб.: Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Атомиздат, 1961.
319. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. — М.: Физматгиз, 1956.
320. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2, № 5. С. 787.
321. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
322. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
323. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. — М.: Физматгиз, 1960.
324. Саульев В. К. Замечание к вопросу о расчете цилиндрических реакторов // Атомная энергия. 1957. № 7. С. 53.
325. Саульев В. К. Об одном способе численного интегрирования уравнений диффузии // Докл. Ан СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1077.
326. Сегё Г. Ортогональные многочлены. Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1963.
327. Скворцов С. А. Водо-водяные реакторы (ВВЭР) в СССР // В сб.: Ядерные реакторы и ядерная энергетика. — М.: Атомиздат, 1959. С. 105.
328. Скофилд П., Хэссит А. Расчет спектра тепловых нейтронов // В сб.: Физика ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1959. С. 496.
329. Слесарев И. С., Сироткин А. М. Вариационно-разностные схемы в теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978.

330. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978.
331. Смелов В. В. Об эффективном методе расчета нейтронного поля в геометрически сложных решетках гетерогенных реакторов // Атомная энергия. 1972. Т. 33, вып. 5. С. 915.
332. Смелов В. В. О приближенном методе гомогенизации гетерогенного реактора // Атомная энергия. 1959. Т. 6, № 5. С. 546.
333. Смелов В. В. К вопросу о термализации нейтронов // Атомная энергия. 1957. Т. 3, № 10. С. 317.
334. Смелов В. В. Численный метод расчета пространственно-энергетического спектра тепловых нейтронов и приближенный метод гомогенизации гетерогенного реактора. Диссертация. 1959.
335. Смелов В. В., Илясова Г. А. Применение эффективного метода решения уравнения переноса для расчета шестиугольной и квадратной ячеек гетерогенного реактора // Атомная энергия. 1968. Т. 24, № 3. С. 235.
336. Смелов В. В. О симметризации нечетного  $P$ -приближения односкоростного уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, № 1. С. 121.
337. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, 4. — М.: Гостехиздат, 1951.
338. Соболев С. Л. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
339. Соболев С. Л. Новый метод в теории рассеяния света // Астрон. журнал. 1951. Т. 28, вып. 5.
340. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
341. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Гостехтеориздат, 1954.

342. *Соболев С. Л., Люстерник Л. А., Канторович Л. В.* Функциональный анализ и вычислительная математика // Тр. III всесоюзного математического съезда. Т. II. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
343. *Соболев С. Л., Мухина Г. В.* Определение термических напряжений в среде с пустотами // Атомная энергия. 1958. Т. 5, № 2. С. 178.
344. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. матем. журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 769.
345. *Спинрад Б., Черник Ж., Корнголд Н.* Резонансный захват в урановых и ториевых блоках // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 539.
346. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
347. *Стюарт Дж., Гофман П., Сторм М.* Физические основы расчета реакторов на промежуточных нейтронах. Доклад № 2381 // Тр. Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. иностр. ученых. Т. 3. — М.: Атомиздат, 1959.
348. *Стюарт Дж., Цвейфель П.* Самоэкранирование и эффект Доплера при поглощении нейтронов // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1959, с. 600.
349. *Султангазин У. М.* О решении уравнения переноса в случае анизотропного рассеяния методом расщепления // Сиб. матем. журнал. 1967. Т. 8, № 1. С. 156.
350. *Султангазин У. М.* Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. — Алма-Ата: Наука, 1979.
351. *Сушкевич Т. А.* Математические модели переноса излучения. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
352. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Гостехтеориздат, 1953.

353. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 3. С. 393.
354. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 529.
355. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 4. С. 562.
356. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 4. С. 779.
357. Трощев В. Е., Юдинцев В. Ф., Федянин В. И. Об ускорении сходимости итераций при решении кинетического уравнения // Докл. АН СССР. 1968. Т. 8, № 2. С. 452.
358. Турчин В. Ф. Рассеяние нейтронов на кристаллах в некогерентном приближении // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1961.
359. Турчин В. Ф. Решение уравнения замедления нейтронов с помощью «сопряженных моментов» // В сб.: Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1961.
360. Турчин В. Ф. Рассеяние нейтронов в жидкостях. Доклад // Симпозиум по рассеянию нейтронов в твердых телах и жидкостях. Вена, 1960.
361. Турчин В. Ф. Медленные нейтроны. — М.: Госатомиздат, 1963.
362. Усачев Л. Н. Уравнение для ценности нейтронов кинетического реактора и теория возмущений // В кн.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 251.
363. Усачев Л. Н. Методы расчета реакторов на быстрых нейтронах. Диссертация. 1954.

364. Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г. Теория возмущений и планирование эксперимента в проблеме ядерных данных для реакторов. — М.: Атомиздат, 1980.
365. Усачев Л. Н., Ставинский В. С. Некоторые вопросы теории промежуточных реакторов (памяти А. С. Романовича) // Отчет АН СССР, 1956.
366. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.
367. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922.
368. Фейнберг С. М. Некоторые вопросы теории уран-водной решетки // Доклад на сессии АН СССР. 1956.
369. Фейнберг С. М. Гетерогенные методы расчета реакторов. Обзор результатов и сравнение с экспериментом // В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
370. Фейнберг С. М., Конобеевский С. Т., Доллежалъ Н. А., Емельянов И. Я., Цыкапов В. А., Булкин Ю. М., Жирнов А. Д., Филиппов А. Г., Щипакин О. Л., Перфильев В. П., Самойлов А. Г., Агеенко Г. И. Исследовательский реактор С. М. мощностью 50 Мвт // Атомная энергия. 1960. Т. 8, № 6. С. 493.
371. Фейнберг С. М., Анциферов Е. С., Катков В. П., Комиссаров Л. В., Левина И. К., Никольский Ю. В., Новиков А. И., Осмачкин В. С., Столяров С. В., Шевелев Я. В. Выгорание горючего в водо-водяных реакторах и эксперименты с уран-водной решеткой. Доклад № 2145. // Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советск. ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
372. Фейнберг С. М., Воробьев Е. Д., Грязев В. И., Климентов В. Б., Лященко Н. Я., Цыканов В. А. Промежуточный



- реактор для получения потоков нейтронов высокой интенсивности. Доклад № 2142. // Тр. II Междунар. конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. советск. ученых. Т. 2. Женева, 1958. — М.: Атомиздат, 1959.
373. *Фейнберг С. М., Шихов С. Б., Троянский В. Б.* Теория ядерных реакторов. Т. 1-2. — М.: Атомиздат, 1978, 1983.
374. *Фурсов В. С.* Работы Академии наук СССР по уранграфитовым реакторам. Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1-5 июля 1955 г. Пленарное заседание. — М.: Изд-во АН СССР.
375. *Харви Дж., Сандерс Дж.* Обзор данных по эффективным сечениям и выходам нейтронов для  $U^{233}$ ,  $U^{235}$ ,  $U^{239}$  // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 9.
376. *Хисамутдинов А. И.* Выборка по важности в теории переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1970. Т. 10, № 4. С. 999-1005.
377. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
378. *Чебышев П. Л.* О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных. Полн. собр. соч. Т. 3. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 108.
379. *Черник Д.* Теория уран-водных решеток // В сб.: Экспериментальные реакторы и физика реакторов. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
380. *Читайкин В. И.* О работах Физико-энергетического института по термоядерному оружию // В сб.: Наука и общество: история советского атомного проекта. 40-50-е годы. Междунар. симпозиум ИСАП-96, 14-18 мая 1996, Труды Т. 2. — М.: ИЗДАТ, 1999, с. 471-475.
381. *Чуянов В. А.* О сходимости приближенного решения кинетического уравнения (метод квадратур типа Гаусса) //

- В сб.: Некоторые математические задачи нейтронной физики. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960, с. 199.
382. Чуянов В. А. Многогрупповой расчет реактора атомной электростанции на быстродействующей электронной счетной машине «Стрела» // Атомная энергия. 1959. 7, № 1. С. 64.
383. Шевелев Я. В. Диффузия нейтронов в плоской уран-водной решетке // Атомная энергия. 1957. 2, № 3. 224.
384. Ширков Д. В. Метод синтетического ядра для задач диффузии нейтронов в замедлителях без водорода // Атомная энергия. Приложение № 1. 1958.
385. Шихов С. Б. Учет влияния изменения размеров на критическую массу быстрого реактора с помощью теории возмущений // Атомная энергия. 1959. Т. 6, вып. 2. С. 162.
386. Шихов С. Б. Некоторые вопросы математической теории критического состояния реактора // В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. — М.: Атомиздат, 1969, с. 210.
387. Шихов С. Б. Вопросы математической теории реакторов. — М.: Атомиздат, 1973.
388. Шихов С. Б., Крянев А. Вопросы математической теории реакторов. Нелинейный анализ. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
389. Шихов С. Б., Шмелев А. И. Учет влияния произвольного изменения размеров на критическую массу быстрого реактора с помощью теории возмущений // В кн.: Физика ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1968, с. 67.
390. Шишков Л. К. Методы решения диффузионных уравнений двумерного ядерного реактора. — М.: Атомиздат, 1976.
391. Шутяев В. П. Вопросы теории возмущений для решения задач переноса нейтронов. Автореф. канд. диссертации. — М.: Изд-во МФТИ, 1983.

392. *Шутяев В. П.* Некоторые свойства гладкости решения нестационарной задачи переноса в плоском слое // Препринт ОВМ АН СССР № 81. 1985.
393. *Шутяев В. П.* Спектр разностной задачи для уравнения переноса в плоском слое и его асимптотическое поведение // Препринт ОВМ АН СССР № 38. — М., 1982.
394. *Шутяев В. П.* Некоторые свойства гладкости решения уравнения переноса по энергетической переменной // В сб.: Численные методы и статистическое моделирование в теории переноса. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1980.
395. *Эгельстраф П., Юз Д.* Резонансная структура  $U^{233}$ ,  $U^{235}$ ,  $U^{239}$  // В сб.: Успехи в области ядерной энергетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 76.
396. *Юз Д.* Нейтронные исследования на ядерных котлах. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
397. *Яненко Н. Н.* О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности // Изв. вузов. Математика. 1961. Т. 4(23). С. 148.
398. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
399. *Яненко Н. Н.* Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 6. С. 1207.
400. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций. — М.: Гостехтеориздат, 1951.
401. *Agoshkov V. I.* Boundary Value Problems for Transport.
402. *Agoshkov V. I., Dubovskii P. B., Shutyaev V. P.* Methods for Solving Mathematical Physics Problems. — Cambridge: Cambridge International Science Publishing, 2006.

403. *Agoshkov V. I., Bardos C., Parmuzin E. I., Shutyaev V. P.* Numerical analysis of iterative algorithms for an inverse boundary transport problem // *Math. Models and Methods in Applied Sciences*. 2000. 10. 1.11-29.
404. *Aitkin A.* Studies in practical mathematics. On the iterative solution of a system of linear equations // *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1950. V. 63. P. 52.
405. *Amaldi E., Fermi E.* On the Absorbtion and the Diffusion of Slow Neutrons // *Phys. Rev*. 1936. V. 50. P. 899.
406. *Arkuszewski J., Kulikowska T., Mika J.* Box Explicit Method in Neutron Transport Theory. — *Inst. of Nuclear Research. Warszawa*, 1971. No. 1330/XXI/PR.
407. *Arkuszewski I.* Rigorous analysis of the diamond approximation for the Neutron Transport Eguation. — *Vienna*, 1972.
408. *Behrens D.* The Effect of Holes in a Reacting Material on the Passage of Neutrons // *Proc. Phys. Soc.* 1949. V. 62(S. A.). P. 607.
409. *Bereiss E.* Decomposition of the stationary isotropic transport in three independent space variables. Тезисы доклада на Международном конгрессе математиков. М., 1966 // *Прикл. матем. и матем. физ.* 1966. Т. 12. С. 3.
410. *Bethe H., Tonks L., Hurwitz H.* Neutron Penetration and Slowing Down at Intermediate Distances through Medium and Heavy Nuclei // *Phys. Rev*. 1950. V. 80. P. 11.
411. *Boffi V.* On the Slowing Down of Neutrons in an Homogeneous Infinite Medium // *Ann. Phys.* 1960. V. 2, 3. P. 435.
412. *Borysiewicz M., Stankiewicz R.* Variational Formulation and Projectional Methods for the Second Order Transport Equation. — Preprint 05-400. (Institute of Nuclear Research Computing Center CYFRONET.) Poland, 1977.
413. *Brockhouse B.* Structural Dynamics of Water by Neutron Spectrometry // *Nuovo cimento, Suppl.* 1959. V. 9, No. 1. P. 44.

414. *Buckner U.* Über ein unbeschränkt anwendbares Iterationsverfahren für Systeme linear Gleichungen // Arch. Math. 1950. Bd. 2. S. 172.
415. *Buslik A. L.* Extremum Variational Principles for the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Arbitrary Adjoint Source // Nucl. Sci. and Engng. 1969. V. 35, No. 3. P. 303.
416. *Case K. M.* Elementary solutions of the transport equations and their applications // Ann. Phys. 1960. V. 9. P. 233.
417. *Case K., Hoffmann F., Placzek G.* Introduction to the Theory of Neutrons Diffusion. Los Alamos, 1953.
418. *Cassels J.* The inelastic scattering of very slow neutrons by aluminium // Proc. Roy. Soc. 1951. A. 208. P. 527.
419. *Cercignani C.* Mathematical Methods in Kinetic Theory. — New York: Plenum, 1969.
420. *Cohen E.* The Neutron Velocity Spectrum in a Heavy Moderator // J. Nucl. Sci. and Eng. 1957. No. 2. P. 27.
421. *Cribier D., Gakrot B.* Diffusion quasi-élastique des neutrons froids par le fer et coefficient - d'autodiffusion du liquide // J. Phys. et Radium. 1960. No. 21. P. 69.
422. *Daniel J.* The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations // SIAM Num. Anal. 1967. V. 4, No. 1. P. 10.
423. *Dardel G.* The Interaction of Neutrons with Matter Studied with a Pulsed Neutron Source // J. Trans. Roy. Inst. Technol. 1954. V. 75, No. 1. P. 10.
424. *Davis J. A.* Transport Error Bounds Via  $P_n$ -Approximations // Cl. Sci. and Engng. 1968. V. 31. P. 127.
425. *Davison B.* Remark on the Variational Methods // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 694.

426. *Davison B.* Mathematicians in Nuclear Theory // *Canad. Math. Bull.* 1959. V. 2. P. 59.
427. *Davison B.* Influence of a Black Sphere and Black Cylinder Upon the Neutron Density, in an Infinite Non-Capturing Medium // *Proc. Phys. Soc.* 1951. A. 64. P. 881.
428. *Davison B., Mandl M.* On the Neutron Spectrum for  $v^{-\alpha}$  Absorption Cross-Section // *Proc. Phys. Soc.* 1954. A. 67. P. 967.
429. *Douglas J.* On the Relation Between Stability and Convergence in the Numerical Solution of Linear Parabolic and Hyperbolic Differential Equations // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1956. V. 4.
430. *Douglas J.* On the Numerical Integration of  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$  Implicit Methods // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1955. V. 3. P. 42.
431. *Douglas J., Rachford H.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. V. 82, No. 2. P. 421.
432. *Douglas J., Gunn J. E.* A general formulation of alternating direction method. Part 1. Parabolic and hyperbolic problems // *Num. Math.* 1964. V. 6, No. 5. P. 428.
433. *Dudley T., Daitch P.* Transport effects in the  $P_3$ -treatment of cylindrical rods in a square lattice // *Nucl. Sci. and Engng.* 1966. V. 25. P. 14.
434. *Ehrlich R., Hurwitz H.* Multigroup Methods for Neutron Diffusion Problems // *Nucleonics.* 1954. V. 12, No. 2. P. 23.
435. *Engel H.*  $P_3$ -Approximation zur Berechnung der thermischen Ausnutzung // *J. Atomikern Energie.* 1958. V. 4. P. 4.
436. *Fenkyö I.* Über eine Klasse von Integralgleichungen // *Publs. Math. Debrecen.* 1952. V. 2. P. 248.
437. *Fermi E.* Sul moto dei neutroni nelle Sostanze idrogenate // *Ricerca scient.* 1936. V. 2, No. 1-2.

438. *Franicis N., Hurwitz H., Zweifel P.* Criticality and Flux Calculations for Hydrogenous Assemblies // J. Nucl. Sci. and Engng. 1957. No. 2. P. 3.
439. *Friedman B.* The iterative solution of elliptic difference equations. Report No. 40-7698. Inst. of Math. Sciences. N.-Y., University, 1957.
440. *Fröman P. O.* On Neutron Diffraction Phenomena According to the Kinematic Theory II // Arkiv fys. 1952. V. 4. P. 191.
441. *Foderado A., Garabedian H.* A New Method for the Solution of Group Diffusion // J. Nucl. Sci. and Engng. 1960. V. 8. P. 44.
442. *Fucks K.* Perturbation theory in neutron multiplication problems // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62. P. 791.
443. *Garabedian P.* Estimation of the relaxation factor for small mesh size // Math. Tables and Other Aids Comput. 1956. No. 56. P. 183.
444. *Gelbard E. M.* An Iterative Method for Solving the  $P_1$  Equations in Slab Geometry // Nucl. Sci. and Engng. 1958. V. 3, No. 4.
445. *Gelbard E., Davis J., Pearson J.* Iterative Solutions to the  $P_1$  and Double- $P_1$  Equations // Nucl. Sci. and Engng. 1959. V. 5. P. 36.
446. *Gelbard E. M., Hageman L. A.* The Synthetic Methods as Applied to the Sne-Equations // Nucl. Sci. and Engng. 1969. V. 37, No. 2. P. 288.
447. *Glauber R.* Time-Dependent Displacement Correlations and Inelastic Scattering by Crystals // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 1692.
448. *Golub G. H., Varga R. S.* Chebyshev semi-iterative methods, successive overrelaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods. Parts 1, II. // Num. Math. 1961. V. 3. P. 147.
449. *Greenberg W., Van der Mee C., Protopopescu V.* Boundary Value Problems in Abstract Kinetic Theory. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1987.

450. *Hartree D.* A Method for the Numerical Integration of the Linear Diffusion Equation // Proc. Combr. Phyl. Soc. 1958. V. 54. P. 2.
451. *Hopf E.* Mathematical problem of radiative equilibrium // Cambridge Tracts. 1934. V. 31. P. 233.
452. *Honeck H.* The Distribution of Thermal Neutrons in Space and Energy in Reactor Lattices // Nucl. Sci. and Engng. 1960. V. 8. P. 193.
453. *Hurwitz H., Nelkin M., Habatler G.* Neutron thermalisation // Nucl. Sci. and Engng. 1956. V. 1. P. 280.
454. *Hurwitz H., Zweifel P.* Slowing Down of Neutrons by Hydrogenous Moderators // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. P. 293.
455. *Hurwitz H., Erlich R.* Comparison of Theory and Experiment for Intermediate Assambless // J. Reactor Sci. Techn. 1956.
456. *Hyman M.* On the Non-Iterative Numerical Solution of Boundary Value Problems // Appl. Sci. Res. Res. 1952. V. 2.
457. *Jacobi G.* Über eine neue Auflösungsart der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen // Astron. Nachr. 1845. Bd. 22, No. 523. S. 297.
458. *Jörgens K.* An asymptotic expansion in the theory of neutron transport // Commun Pure and Appl. Math. 1958. V. 11. P. 219.
459. *Kaplan S., Davis J.* Canonical and Involutory Transformators of the Variational Problems of Transport Theory // Nucl. Sci. and Engng. 1967. V. 28. P. 166.
460. *Kellog O.D.* On the existence and closure of sets of characteristic functions // Math. Ann. 1922. V. 86. P. 14.
461. *Kellog R. B., Noderer L. C.* Scaled iterations of linear equations // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1966. V. 8, No. 4. P. 114.
462. *Kopp H.* Synthetic method of solution of the transport equation // Nucl. Sci. and Engng. 1963. V. 17. P. 65.



463. *Kothari L., Singwi K.* Cold Neutron Scattering in Aluminium // *Philos. Mag.* 1957. V. 2. P. 694.
464. *Kourganoff V., Busbridge J.* Basic Methods in Transfer Problems. Oxford, 1952.
465. *Lax P. D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. P. 159.
466. *Lesaint P., Raviart P. A.* On a finite element method for solving the neutron transport equation. — Université Paris VI, Laboratoire Analyse Numerique, L.A. Vienna, IAEA. 1972. P. 189.
467. *Lehner, Wing* An asymmetric operator arising in the theory of neutron diffusion // *Communs Pure and Appl. Math.* 1956. V. 9. P. 487.
468. *Lehner, Wing* On the spectrum of an asymmetric operator arising in the transport theory of neutron. — *Ibid.* 1955. V. 8. P. 213.
469. *Liebmann H.* Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und Konformer Abbildung (nach Ideen von Boltzmann und Jacobi) *Sitzungsberichte der Bayer // Akad. Wiss. Math.-Phys.* 1918. Bd. 47. S. 385.
470. *Lions J. L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. V. 1, 2. — Dunod. Paris. 1968.
471. *Lions J.* Equations differentielles operationnelles dans les espaces de Hilbert. Centro. Int. Estivo. Varenna. 1963.
472. *Marek I.* On a problem of mathematical physics // *Aplikace matematiky.* 1966. V. 11. P. 89.
473. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P.* Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems. — N.-Y.: CRC Press Inc., 1996.

474. *Marchuk G. I., Lebedev V. I.* Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport. — N.-Y.: Harwood Academic Publisher, 1986.
475. *Mark C.* Neutron Density Near a Surface // *Phys. Rev.* 1947. V. 72. P. 558.
476. *Marshak R.* Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei // *Rev. Mod. Phys.* 1947. V. 12. P. 185.
477. *Marshak R.* Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere // *Ibid.* 1947. V. 71. P. 443.
478. *Marshak R.* Variational Method for Asymptotic Neutron Densities // *Phys. Rev.* 1947. 71. 668.
479. *Marshak R., Brooks H., Hurwitz H.* Introduction to the theory of diffusion and slowing down of neutrons // *Nucleonics.* 1949. V. 4, № 6, P. 43; V. 5, № 1. P. 59.
480. *Mertens R.* On Milnes Problem for a Rayleigh Single Scattering Law  $1 + \cos^2 \theta$  // *Compt. rend. Acad. sci. colon.* 1954. V. 238. P. 53.
481. *Mertens R.* Sur la resolution en n-ieme approximation des problemes de diffusion multiple // *Compt. rend. Acad. sci. colon.* 1953. V. 237, No. 25. P. 1644.
482. *Mertens R.* Sur le diffusion multiple de particules chargees // *Compt. rend. Acad. sci. colon.* 1953. V. 236, No. 18. P. 1753.
483. *Mika J.* Approximation Theory for the Neutron Transport Equation in Rectangular Geometry // In: *Numerical Reactor Calculations.* IAEA. Vienna. 1972. P. 129.
484. *Nelkin M.* Neutron thermalization // *Nucl. Sci. and Engng.* 1957. V. 2. P. 199.
485. *Peaceman D., Rachford H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *J. Soc. and Appl. Math.* 1955. V. 3. P. 28.

486. *Peierls R.* Critical conditions in the neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. V. 35. P. 610.
487. *Perks M. A.* *Progr. Nucl. Energy*, series IV, Nechnjlogy, Engineering, Safety. 3. Lond. 1958.
488. *Picard E.* Memoire sur la theorie des equationsaux derives partie ´lles et la me ´thode des approximations successives // J. Math. Pures et Appl. 1890. V. 4. P. 6.
489. *Placzek G.* On the Theory of the Slowing Down of Neutron in Heavy Substances // Phys. Rev. 1946. V. 69, No. 9–10. P. 423.
490. *Placzek G.* Incoherent Neutron Scattering by Polycrystals // Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 895.
491. *Placzek G.* The Scattering of Neutrons by Systems of Heavy Nuclei // Phys. Rev. 1952. V. 86. P. 377.
492. *Placzek G., Seidel W.* Milne's Problem in Transport Theory // Phys. Rev. 1947. V. 72, No. 7. P. 550.
493. *Placzek G., Van Hove L.* Interference effects in the Total Neutron Scattering Cross-Section of Crystals // Nuovo cimento. 1955. V. 1. P. 233.
494. *Rayleigh J. W.* Phil. Mag. 1899. V. 47. P. 566; Sci. Papers. 1899. V. 4. P. 407.
495. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // J. reine und angew. Math. 1908. V. 135. P. 25.
496. *Schofield P.* Space-Time Correlation Function Formalism for Slow Neutron Scattering // Phys. Rev. 1960. V. 4. P. 239.
497. *Shutyaev V. P.* Necessary and sufficient conditions for solvability of the initial boundary value transport problem // In: Math. models of nonlinear excitation, transport, dynamics, control in condensed systems and other media. — N.-Y.: Plenum, 1999, P. 77–84.

498. *Shutyaev V. P.* Data assimilation for the time-dependent transport problem // Banach Center Publications. 2000. V. 52. P. 213-232.
499. *Southwell R.* Relations Methods in Engineering Science Oxford. Univ. Press. 1943.
500. *Soodak G., Campbell K.* Elementary Pile Theory. — N.-Y., 1950.
501. *Spenser L., Fano U.* Penetration and Diffusion of X-Rays: Calculation of Spatial Distribution by Polynomial Expansion // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1951. V. 46. P. 446.
502. *Spinrad B.* Anisotropic Diffusion Lengths in Diffusion Theory // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. P. 548.
503. *Stiefel E.* Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications // Nat. Bur. Stand. Appl. Math., Ser. 1958. V. 49. P.1.
504. *Stuart G.* Multiple Scattering of Neutrons // J. Nucl. Sci. and Engng. 1957. V. 2. P. 617.
505. *Temple G.* The general theory of relaxation methods applied to linear systems // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1939. V. 169. P. 476.
506. *Thie J.* Failure of neutron transport approximation in small cell in cylindrical geometry // Nucl. Sci. and Engng. 1961. V. 9. P. 286.
507. *Thompson A.* Distribution and Numerical Computation of Critical Size // J. Appl. Phys. Neutron 1951. V. 22. P. 1223.
508. *Ukai S.* Solution of Multi-Dimensional Neutron Transport Equation by Finite Element Method // J. Nucl. Sci. and Techn. 1972. V. 9, No. 6. P. 366.
509. *Van Hove L.* Correlations Space and Time and Born Approximation Scattering in Systems of Interacting Particles // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 249.
510. *Varga R. S.* Matrix iterative analysis. New Jersey. 1963.

511. *Vineyard G.* X-Rays and Spectra El. Small-Angle Scattering // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 751.
512. *Vineyard G.* Scattering of Slow Neutrons by a Liquid // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 999.
513. *Verde M., Wick G.* Some Stationary Distributions of Neutrons in an Infinite Medium // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 852.
514. *Wachspress E. L.* Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.-Y., 1966.
515. *Wang M., Guth E.* On the Theory of Scattering Particularly of Charged Particles // Phys. Rev. 1951. V. 84, No. 6. P. 1092.
516. *Weinberg A., Wigner E.* The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. — Chicago, 1958.
517. *Weinberg A.* Current status of nuclear reactor theory // Amer. J. Phys. 1952. V. 20. P. 401.
518. *Weinstock R.* Inelastic Scattering of Slow Neutrons // Phys. Rev. 1944. V. 65. P. 1.
519. *Wick G.* Über ebene Diffusionsprobleme // Z. f. Phys. 1943. Bd. 121. S. 702.
520. *Wick G.* On the space distribution of slow neutrons // Phys. Rev. 1949. V. 75, No. 5. P. 738.
521. *Wigner E.* Theoretical Physics in the Metallurgiens Laboratory of Chicago // J. Appl. Phys. 1946. V. 17. P. 857.
522. *Wilkinson J.* The algebraic eigenvalue problem. Oxford, Clarendon Press, 1965.
523. *Zemach A., Glauber R.* Dynamics of Neutron Scattering by Molecules // Phys. Rev. 1952. V. 101. P. 1.
524. *Zienkiewicz O. C.* The finite element method: from intuition to generality // Appl. Mech. Rev. 1970. V. 23. P. 249.

525. Zweifel P., Hurwitz H. Transformation of Scattering Cross-Sections // J. Appl. Phys. 1954. V. 25, No. 10. P. 1241.

## Приложение

### **О работах физико-энергетического института по термоядерному оружию<sup>1)</sup>**

Общеизвестно, что с конца 1940-х гг. в ФЭИ разрабатывались силовые ядерные энергетические установки для различных средств доставки ядерного оружия. В этом направлении ФЭИ добился рекордных показателей по ряду важнейших параметров. Наиболее яркий пример — высокие скоростные и маневренные качества подводной лодки, оснащенной силовой ядерно-энергетической установкой (СЯЭУ) разработки ФЭИ (тип ПЛ — «Альфа» по терминологии НАТО). Ходовые испытания показали, что ПЛ с такой СЯЭУ способна уклоняться даже от торпед. Это достижение было занесено в книгу рекордов Гиннеса.

Вместе с тем практически неизвестно, что в ФЭИ в период с 1951 по 1955 г. велись интенсивные расчетно-теоретические работы по термоядерному взрывному устройству (водородной бомбе) и ряду других вопросов, непосредственно связанных с физикой работы и действиями таких устройств. Об этих работах упомянуто в статье Ю. Б. Харитона, В. Б. Адамского и Ю. Н. Смирнова в журнале «Успехи физических наук» (№ 2, 1966 г.). В статье говорится о работах ФЭИ только по так называемой «трубе» («труба» — длинный цилиндр, наполненный жидким дейтерием). К началу 50-х г. XX в. наряду с арзамасской и московской группами Я. Б. Зельдовича к отдельным вопросам по этому направлению было подключено несколько молодых сотрудников Д. И. Блохинцева в Обнинске. Им поручили решение задачи по переносу энергии нейтронами для случая, если бы в «трубе» произошло термоядерное поджигание, а также исследование распространения детонационной волны в дейтерии.

---

<sup>1)</sup>Данный материал представлен на основе доклада В. И. Читайкина на международной конференции по истории советского атомного проекта (май 1996, Дубна, Россия).

Хотелось бы полнее осветить интересную страницу в истории советского атомного проекта, связанную с вкладом ФЭИ в решение проблемы. Данный материал подготовлен на основании научно-технических отчетов, справок и других документов, хранящихся в архиве ФЭИ, и личных воспоминаний некоторых непосредственных участников тех работ.

Как сказано в статье Ю. Б. Харитона, В. Б. Адамского и Ю. Н. Смирнова, началом исследований по термоядерному взрывному устройству (ТВУ) в СССР следует считать открытый отчет 1946 г. «Использование ядерной энергии легких элементов» авторов И. И. Гуревича, Я. Б. Зельдовича, И. Я. Померанчука и Ю. Б. Харитона (опубликован в 1991 г. в УФН, № 5). Затем, работы по ТВУ резко активизировались, особенно после первых успешных испытаний атомных взрывных устройств, и велись по различным направлениям (см. статью Ю. Б. Харитона, В. Б. Адамского и Ю. Н. Смирнова). Принципиальные экспериментальные результаты по ТВУ были получены в 1953 и 1955 гг. Расчетно исследовались различные схемы ТВУ.

Все работы по ТВУ были сосредоточены в КБ-11 (впоследствии ВНИИЭФ), где проводились теоретические и расчетные исследования, физические эксперименты, разрабатывалась конструкция и проводилась ее технологическая и экспериментальная отработка, происходили изготовление ВУ и подготовка к испытаниям.

В 1951 г. в ФЭИ (тогда лаборатория «В») — в Обнинске начались теоретические и расчетные работы по ТВУ (водородной бомбе). Физическая схема ее отличалась от рассматриваемых в то время ТВУ во ВНИИЭФ и от испытанных в 1953 и 1955 гг. конструкций. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что исследовалась возможность осуществления термоядерной детонации большой сферической массы дейтерия, разжигаемой из центра (так называемая «сферическая система»).

Подробно исследовались следующие вопросы:

— термоядерная кинетика, в том числе термоядерная реакция с участием «быстрых» частиц, то есть частиц, не находящихся в тепловом равновесии;



— баланс энергии в зоне термоядерного горения с учетом переноса энергии нейтронами, гамма-квантами, «быстрыми» частицами;

— скорости обменных процессов между излучением и веществом (время установления теплового равновесия);

— формирование фронта детонационной волны (ДВ), поведение газодинамических характеристик на фронте и за фронтом ДВ с учетом различных механизмов переноса энергии и термоядерного энерговыделения.

В работах ФЭИ была сформулирована полная физикоматематическая модель всех основных процессов, протекающих при работе ТВУ. Эта модель была реализована в математических программах (одномерная сферическая геометрия, метод конечных разностей).

Была выполнена серия расчетов, по результатам которых была предложена конструкция ТВУ. По расчету значение энерговыделения такой конструкции почти вдвое превышало значение, полученное при испытании «слойки». Но оно соответствовало не более чем 2%-му выгоранию дейтерия. Таким образом, добиться главного — устойчивой стационарной термоядерной детонации в D-шаре, разжигаемом из центра, — не удалось. После 1955 г. эти работы были прекращены. Развитие ТВУ пошло по другому пути.

Начало работ по ТВУ в Обнинске было положено отчетом Д. И. Блохинцева «Газодинамика вещества при высоких температурах» (1951). Окончательные результаты по сферической системе на жидком дейтерии содержатся в двух «толстых» сводных отчетах 1954 и 1955 гг. Исполнителями их были: Н. В. Легошина, Н. Я. Лукиных, И. П. Маркелов, Е. И. Погудалина, А. Р. Птицын, В. И. Сердобольский, В. В. Смелов, Т. Тушкина. Ответственные исполнители: Н. И. Булеев, В. С. Имшенник, Б. Б. Кадомцев, Г. И. Марчук, Ю. П. Райзер. Руководители работ: Д. И. Блохинцев, А. С. Давыдов, Е. С. Кузнецов.

В ФЭИ в работах Т. Х. Сердобольского изучалась возможность использования в ТВУ не только жидкого дейтерия, но и твердого носителя дейтерия. В. С. Имшенником под руководством А. С. Давыдова и Д. И. Блохинцева изучались «Гидродинамические, термодинамические и электродинами-

ческие свойства неравновесной высокотемпературной плазмы» (название итогового отчета В. С. Имшенника). В 1955 г. Б. Б. Кадомцевым была защищена кандидатская диссертация на тему «Перенос энергии и импульса быстрыми частицами в дейтериевой среде». Руководитель — Д. И. Блохинцев. Необходимо отметить, что в архивах ФЭИ отчетов о научно-исследовательской работе по конструкции ТВУ типа «труба» не имеется.

Работами по сферическому ТВУ с использованием дейтерия не исчерпывалась деятельность ФЭИ по ядерно-оружейной тематике. В 1953–1955 гг. были выполнены работы по физике ядерного взрыва в атмосфере. Была построена полная физико-математическая модель основных процессов, сопровождающих ядерный взрыв в земной атмосфере. Подробно рассмотрено интересное явление — минимум яркости огненного шара («притухание»), которое было обнаружено экспериментально при проведении воздушных ядерных испытаний. В работах ФЭИ были проанализированы различные гипотезы, объясняющие это явление, и показана их несостоятельность. Найдено верное объяснение — влияние переходов на молекулах примеси  $\text{NO}_2$ .

Работы по изучению явлений, сопровождающих воздушный ядерный взрыв, были выполнены Ю. П. Райзером под руководством А. С. Давыдова и Д. И. Блохинцева. В 1955 г. Ю. П. Райзером была защищена кандидатская диссертация на тему «Об оптических процессах в огненном шаре и охлаждении воздуха излучением». Руководитель — Д. И. Блохинцев. Результаты исследований Ю. П. Райзера, выполненных им в ФЭИ, вошли в знаменитую книгу Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» (1962).

Основные результаты и значение работ ФЭИ по ядерно-оружейной тематике состоят в следующем:

- предложен оригинальный способ осуществления термоядерного горения и создания термоядерной (водородной) бомбы. Идея состояла в воспламенении большой массы дейтерия в виде сферы. Инициирование термоядерной детонации должно быть осуществлено из центра сферической системы;

- выполнен полный расчетно-теоретический анализ предложенного ТВУ с дейтерием. В расчетах получено значение

мощности взрыва. Исследованы различные механизмы энергетических потерь, которые делают практически невозможным осуществление стационарной термоядерной детонации в анализируемой системе;

— в ходе исследований по физике ядерного взрыва в атмосфере была сформулирована полная физико-математическая модель процессов, сопровождающих воздушный взрыв. Созданы теоретические основы одного из методов определения мощности воздушного взрыва.

Глубокие физико-теоретические и расчетные исследования по термоядерной детонации, выполнявшиеся обнинской группой, повлияли на оценку перспектив разработок по «трубе». В статье Ю. Б. Харитона, В. Б. Адамского и Ю. Н. Смирнова сказано, что работы по «трубе», проводившиеся арзамасской и московской группами Я. Б. Зельдовича, были признаны «полностью бесперспективными». Совещание, на котором было принято это решение, состоялось в Министерстве среднего машиностроения в начале 1954 г. Вел совещание И. В. Курчатов. Одним из наиболее важных физических аргументов, приведших к такому решению, была отрицательная роль переноса энергии нейтронами, рождающимися в термоядерных реакциях. Это явление подробно исследовалось в работах ФЭИ. На совещании в Министерстве доклад по этим результатам делал Б. Б. Кадомцев. В статье Ю. Б. Харитона и др. (УФН, 1996 г.) говорится, что «... именно протяженное в пространстве энерговыделение от нейтронов, наряду с комптонизацией, также изучавшейся в Обнинске, исключало возможность детонизации».

Основные черты проводившихся в ФЭИ в период с 1951 по 1955 г. ядерно-оружейных исследований состоят в следующем:

1. В ФЭИ разрабатывалась конструкция ТВУ. Работы велись не по отдельным физическим вопросам, связанным с разработкой ТВУ, а по всей их совокупности. В ходе исследований разрабатывалась конкретная конструкция ТВУ. Расчетно оценивалось влияние некоторых конструктивных элементов.

2. Независимость исследований от аналогичных работ ВНИИЭФ. Координация работ осуществлялась на высоком административном уровне. Исследователи из ФЭИ не были знакомы

с работами ВНИИЭФ по ядерно-оружейной тематике. В работах ФЭИ отсутствуют ссылки на аналогичные работы, проводимые в то же время во ВНИИЭФ. В диссертации Ю. П. Райзера, посвященной явлениям при воздушном ядерном взрыве, есть выражение признательности Я. Б. Зельдовичу за обсуждения.

3. Высокий научный уровень исследований. В работах ФЭИ в математическом отделе сформулирована полная физическая модель всех процессов, разработана соответствующая математическая модель. Выполнены сквозные расчеты. Полученные в ФЭИ результаты по термоядерной плазме были впоследствии развиты в работах других институтов. Ряд отчетов ФЭИ по ядерно-оружейной тематике были направлены в конце 1960-х гг. по запросу Министерства во ВНИИТФ (Снежинск) для постоянного использования.

Среди работавших в начале 1950-х гг. в ФЭИ по ядерно-оружейной теме немало тех, кто впоследствии достиг высоких результатов и стал известным ученым: Д. И. Блохинцев, Б. Б. Кадомцев, Г. И. Марчук, Ю. П. Райзер, В. С. Имшенник и др. После 1955 г. работы по ядерно-оружейной тематике в ФЭИ были полностью прекращены. Математический отдел ФЭИ переключился на создание новой концепции расчета ядерных реакторов для подводных лодок.

В 2009 г. была опубликована статья Г. И. Марчука, В. С. Имшеника, М. М. Баско [243], в которой наряду с обзором вышеупомянутых работ представлено численное решение гидродинамической задачи о термоядерном взрыве в шаре жидкого дейтерия нормальной плотности с использованием современной физико-математической модели DEIRA, разработанной в теории инерциального термоядерного синтеза. Детальные численные расчеты подтвердили указанный выше «исторический» результат.

## Комментарии

к работам Г. И. Марчука  
по численным методам в теории переноса  
и методам расчета ядерных реакторов

Шутяев В. П.

Во второй половине XX в. перед нашей страной возникла проблема мирного использования энергии атома. Математикам предстояло решить новые математические задачи, описывающие процессы переноса нейтронов и тепла в веществе, выполнить невиданный до того времени объем вычислительной работы. Задачи теории переноса частиц, будучи существенно многомерными, достаточно сложными и актуальными, представляют собой достойный пример исследования с точки зрения основных проблем вычислительной математики. Своеобразие и важность этих задач влияли и будут влиять на развитие основных концепций и методов вычислительной математики и на прогресс вычислительной техники. Вычислительные задачи по расчету ядерных реакторов оказались даже более сложными и трудоемкими, чем аналогичные задачи по ядерному оружию, работы над которыми развернулись несколько лет ранее.

Методы расчета ядерных систем возникли как синтез исследований многих ученых — математиков и физиков — и институтов как в теоретических, так и в прикладных аспектах.

К атомному проекту Г. И. Марчук был подключен в 1953 г. по постановлению правительства, когда он был приглашен в Лабораторию «В» Первого главного управления Совета Министров СССР (позже переименованную в Физикоэнергетический институт Госкомитета СССР по использованию атомной энергии). В Обнинске, где находился ФЭИ, под руководством Д. И. Блохинцева математики участвовали в работах по созданию термоядерной бомбы. Гидродинамическая задача о термоядерном взрыве в шаре жидкого дейтерия нор-

мальной плотности была решена в 1952–1954 гг. в рамках советского атомного проекта. Главный результат состоял в том, что взрывная ударная волна в дейтерии сильно затухает из-за потерь энергии в результате излучения и нелокальности энерговыделения быстрых нейтронов. В то время этот отрицательный результат по сути означал тупиковость буквального пути создания водородной бомбы.

Когда лабораторию «В» преобразовали в Физико-энергетический институт, Г. И. Марчук, назначенный начальником математического отдела, приступил к новой проблеме — расчету ядерных реакторов для атомных электростанций и подводных лодок.

В период работы в Обнинске с 1953 по 1962 г. Г. И. Марчук предложил новые методы расчета ядерных реакторов, которые до настоящего времени составляют основу моделирования имитационных расчетов промышленных реакторов. Большую известность получили его работы по теории переноса излучения. Результаты этих исследований обобщены в его докторской диссертации (1956) и в монографии «Численные методы расчета ядерных реакторов» (1958). В 1959–1961 гг. Г. И. Марчук принял участие в разработке требований к ядерной безопасности для заводов и других предприятий атомной промышленности, проводившейся по инициативе И. В. Курчатова.

Многогрупповые расчеты ядерного реактора для первой в мире АЭС в г. Обнинске, запущенной 27 июня 1954 г., были успешно выполнены коллективом сотрудников под руководством Г. И. Марчука. За работы по методам расчета ядерных реакторов и их применениям к разработке АЭС и ядерного подводного флота Г. И. Марчук был удостоен Ленинской премии (1961).

В 1958 г. вышла в свет монография Г. И. Марчука «Численные методы расчета ядерных реакторов», переизданная затем в 1961 г. под названием «Методы расчета ядерных реакторов» в существенно переработанном и дополненном виде. Эти монографии вызвали большой научный интерес, а изложенные в них результаты стали основополагающими для развития методов расчета ядерных реакторов в нашей стране.

Одной из первых проблем в теории ядерных реакторов, изученных Г. И. Марчуком, была проблема корректной замены

интегро-дифференциального уравнения Больцмана эффективными малогрупповыми моделями. Основным здесь был вопрос выбора групповых констант. На основе теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений Г. И. Марчук разработал методы построения таких моделей. Им были получены выражения для групповых констант, которые в определенном смысле являются оптимальными. Было показано также, что они слабо зависят от сопряженных функций. Это обстоятельство позволило сформулировать практические численные алгоритмы определения групповых констант, близких к оптимальным. Г. И. Марчуком и сотрудниками возглавляемого им отдела в Физико-энергетическом институте в 50-е гг. XX в. были созданы эффективные малогрупповые модели реактора в различных приближениях метода сферических гармоник. Эти модели широко использовались для серийных расчетов критических масс ядерных реакторов, и в том числе первой атомной электростанции.

В ряде задач теории ядерных реакторов необходимо детально учитывать тепловое движение ядер среды в реакторе, кристаллические эффекты и молекулярные связи. Для решения этих задач Г. И. Марчуком и В. В. Смеловым были разработаны специальные методы. Предложенные ими алгоритмы базировались на математическом аппарате, не связанном с конкретным выбором функций рассеяния нейтронов, и являются универсальными. Ими были созданы методы расчета спектра медленных нейтронов в различных приближениях метода сферических гармоник. В применении к данному классу задач в их работах получил дальнейшее развитие метод матричной факторизации.

Сопряженная система уравнений реактора широко использовалась Г. И. Марчуком и его коллегами еще на ранних стадиях построения теории и методов расчета ядерных реакторов. Отметим некоторые из важных ее приложений.

Это, прежде всего, теория возмущений спектрального параметра — первого собственного значения соответствующей однородной задачи. Спектральный параметр и его возмущение связаны с критической массой самоподдерживающейся цепной реакции. Полученные Г. И. Марчуком формулы играют важную роль в оценке первого собственного значения по отноше-



нию к тем или иным вариациям входных данных, необходимых для физического расчета ядерного реактора. Эти исследования послужили основой решения важнейших обратных задач по восстановлению физических параметров моделей.

Сюда относится также разработка систем ядерной безопасности с помощью наиболее точных расчетов критических масс ядерных систем различных спектров, подкрепленных экспериментальными данными. Последние работы инициировались И. В. Курчатовым, и их выполнение было высоко оценено самим Игорем Васильевичем.

Г. И. Марчуком и руководимым им коллективом в Физико-энергетическом институте были созданы методы физического расчета ядерных реакторов, испытанные на большом расчетном и экспериментальном материале. Ими создан один из первых в СССР пакетов прикладных программ в области расчета реакторов, получивших широкое распространение в научных учреждениях Советского Союза.

Отмеченные научные результаты отражены в упомянутых выше монографиях Г. И. Марчука и в его совместной с В. И. Лебедевым монографии «Численные методы в теории переноса нейтронов» (1971, 1981).

Впоследствии Г. И. Марчук и его ученики продолжали интенсивные исследования в области теории переноса и методов расчета ядерных реакторов и получили ряд крупных результатов по данному научному направлению.

Развитие методов решения многомерных нестационарных задач переноса связано с методами расщепления, основанными, как правило, на неоднородных разностных аппроксимациях исходной задачи. Сущность метода расщепления состоит в редукции сложного оператора к простейшим. При таком подходе интегрирование данного уравнения сводится к последовательному интегрированию уравнений более простой структуры. При этом разностные схемы обязаны удовлетворять условиям аппроксимации и устойчивости только в конечном итоге. Это дает возможность гибкого построения схем по существу для всех основных задач математической физики. Г. И. Марчук внес большой вклад в разработку данных методов. Им был предложен и развит метод расщепления по физическим процессам.



Сущность этого метода состоит в редуцировании исходной задачи, описывающей сложный физический процесс, к последовательности простейших задач, каждая из которых описывает элементарный физический процесс. Г. И. Марчук сформулировал основные требования для правомерности такой редукции и построил абсолютно устойчивые разностные схемы второго порядка точности для решения ряда важных нестационарных задач математической физики.

В работах Г. И. Марчука были разработаны и обоснованы схемы расщепления для систем уравнений, не принадлежащих к классу Коши — Ковалевской. В докладе Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко на конгрессе ИФИП (1965) метод расщепления был сформулирован для систем интегро-дифференциальных уравнений, в том числе для уравнений переноса частиц. В дальнейшем в применении к задачам теории переноса метод расщепления был существенно развит в работах Г. И. Марчука с его учениками (У. М. Султангазин, В. В. Пененко и др.). Были предложены монотонные схемы расщепления для задач переноса, при которых решения остаются в классе положительных функций.

Наряду с разностными методами решения задач теории переноса важный вклад был сделан Г. И. Марчуком в разработку проекционно-сеточных алгоритмов. В последние десятилетия проекционные методы получили качественно новое развитие, что обусловлено и успехами в теории аппроксимации, и имевшейся глубокой теоретической базой данных методов. Это привело к развитию теории и широкому практическому использованию новой формы проекционных методов — проекционно-сеточных (метод конечных элементов), которые можно рассмотреть как классические проекционные методы, но использующие базисные функции с финитными носителями. Проекционно-сеточные методы вобрали в себя лучшие черты проекционных (слабые требования на гладкость решения и исходных данных, необходимых для обоснования и исследования алгоритма, сохранение в приближенной задаче «хороших» свойств точной задачи — симметричности операторов и т. п., более точное описание интегральных характеристик решения и др.) и разностных методов (разреженность матриц, сравни-

тельная простота решения систем алгебраических уравнений). Кроме того, использование локальных базисных функций позволило в большинстве случаев автоматизировать процесс приближенного решения задачи с помощью современных ЭВМ. В работах Г. И. Марчука, В. И. Агошкова отмечены многие трудности, специфические для проекционно-сеточных алгоритмов в задачах теории переноса, обладающих рядом «неприятных» особенностей. Это, прежде всего, существенная многомерность таких задач. Имеются значительные трудности, связанные с вопросами обоснования применения проекционно-сеточных методов к решению задач теории переноса и получения количественных оценок скоростей сходимости.

Одной из трудностей следует признать и проблему аппроксимации границ и граничных условий. К известной проблеме аппроксимации геометрической границы области здесь добавляется задача отыскания и приближения «освещенных» и «теневых» частей границы, что вызвано зависимостью граничных условий от угловых переменных. Отметим, наконец, что многие задачи теории переноса обладают несамосопряженными операторами, при этом часто в них возникает необходимость одновременного решения как прямой, так и сопряженной задач. Перечисленные обстоятельства делают теорию и практическое использование проекционно-сеточных методов в задаче переноса нейтронов значительно более трудными, с одной стороны, но и привлекательными — с другой.

В работах Г. И. Марчука и В. И. Агошкова обосновано применение обобщенного метода Бубнова — Галеркина со специальными базисными функциями к решению уравнения переноса в плоскопараллельной, сферически-симметричной и трехмерной геометриях, изучена устойчивость алгоритмов.

Большое влияние на развитие методов расчета ядерных реакторов оказали работы Г. И. Марчука по итерационным методам. Краевые задачи для кинетического уравнения являются типичными многомерными задачами. Как правило, число неизвестных значений функций в системе разностных уравнений, аппроксимирующих кинетическое уравнение, столь велико, что при решении этих систем уравнений итерационными методами не представляется возможным из-за ограниченности па-

мяти ЭВМ одновременно запомнить все неизвестные, полученные на одном итерационном шаге.

Ввиду многомерности задач переноса могут стать неприемлемыми многие хорошо разработанные и эффективные итерационные методы только потому, что они требуют запоминания полной информации о предыдущем приближении. Таким образом, специфика задач переноса требует разработки таких быстросходящихся итерационных методов, которые требовали бы запоминания не всей информации о проводимом итерационном шаге, а только части ее существенно меньшей размерности. Это открывает возможность эффективно использовать вариационные методы решения, ибо в этом случае существенно облегчается задача подсчета скалярных произведений.

В фундаментальной монографии Г. И. Марчука и В. И. Лебедева «Численные методы в теории переноса нейтронов» представлены эффективные итерационные алгоритмы решения задач теории ядерных реакторов, дано обоснование алгоритмов и выявлена специфика итерационных методов для задач переноса.

Исследования Г. И. Марчука и его учеников в области теории переноса и методов расчета ядерных реакторов не только позволили получить ряд крупных результатов по данному направлению, но и оказали огромное влияние на развитие основных концепций и методов вычислительной математики в целом.

Издатель – Российская академия наук

Публикуется в авторской редакции

Издается по решению Научно-издательского совета  
Российской академии наук (НИСО РАН)  
и распространяется бесплатно

Оригинал-макет подготовлен в ООО «Амирит»

Подписано в печать 07.05.2018 г.

Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 14,03. Тираж 100 экз. Заказ № 47/29117.

Отпечатано в типографии ООО «Амирит»,  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.

Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33

E-mail: [zakaz@amirit.ru](mailto:zakaz@amirit.ru)

Сайт: [amirit.ru](http://amirit.ru)