



Отделение математических наук

**А.Л. Афенди́ков, И.С. Меньшов,  
К.Д. Меркулов, П.В. Павлухин**

**Метод адаптивных  
декартовых сеток для решения задач  
газовой динамики**

Москва 2017

УДК 533  
ББК 22.17  
М54

*Афендииков А.Л., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Павлухин П.В.*

**Метод адаптивных декартовых сеток для решения задач газовой динамики**

В работе рассмотрены методы и подходы для решения задач газовой динамики на высокопроизводительных вычислительных системах. Для них наиболее предпочтительной является организация структурированного доступа в память, поэтому в предлагаемых методах используются декартовы сетки, включая и разновидность с локальной адаптацией. Рассматриваемые методы позволяют на сетках такого типа решать задачи со сложной геометрией, а предлагаемые параллельные алгоритмы для них обеспечивают хорошую масштабируемость на вычислительных системах с массивным параллелизмом.

**Ключевые слова:** вычислительная газовая динамика, метод свободной границы, декартовы сетки, адаптация сеток, обтекание движущихся тел.

*Afendikov A.L., Menshov I.S., Merkulov K.D., Pavlukhin P.V.*

**Adaptive cartesian grid method for solving gas dynamics problems**

Methods and approaches for solving gas dynamics problems on HPC systems are considered. Structured memory access is preferable for these systems so Cartesian grids including sub-type with local adaptation are employed in proposed methods. It is possible to solve problems with complex geometry using considered methods based on such grids and corresponding parallel algorithms provide good strong scalability on massively-parallel computing systems.

**Key words:** computational fluid dynamics, free boundary method, Cartesian grids, mesh refinement, flow past moving bodies gas.

ISBN 978-5-906906-57-1

© Российская академия наук, 2017  
© А.Л. Афендииков, И.С. Меньшов,  
К.Д. Меркулов, П.В Павлухин, 2017

## Введение

Решение задач газовой динамики на современных вычислительных системах с новыми архитектурами сопряжено с рядом возникающих при этом трудностей. Первая связана с дискретизацией расчетной области. В случае если она является геометрически сложной, сеточное разбиение в подавляющем большинстве случаев не структурировано. Построение сетки при этом требует значительных вычислительных ресурсов и нередко «ручного» вмешательства для ее коррекции, что приводит к немалым временным затратам. Неструктурированные сеточные разбиения порождают нерегулярный доступ к памяти. Как результат, производительность программных реализаций методов для сеток данного типа оказывается ограничена не числом выполняемых в единицу времени арифметических операций (compute-bound), а пропускной способностью памяти (memory-bound). В большей степени это критично для массивно-параллельных вычислителей, поскольку эффективность их работы зависит в первую очередь от упорядоченности обращений в память. Поэтому наиболее предпочтительно использовать структурированные сеточные разбиения, для которых характерен регулярный шаблон обращений в память. Но построение таких сеток, согласованных с границей расчетной области, может оказаться в ряде случаев трудновыполнимой или вовсе неразрешимой задачей.

Другая сложность обусловлена взаимосвязным развитием численных методов и архитектуры процессоров. Для решения задач на системах с ограниченными вычислительными ресурсами использовались сетки низкого разрешения. Чтобы получить на них более точное решение, приходилось строить численные методы высокого порядка со сложной алгоритмической структурой. С другой стороны, вычислительные ядра процессоров также становились все более «тяжелыми»: внеочередное исполнение команд, преднакачка данных, прогнозирование ветвлений, векторные инструкции позволяли эффективно реализовывать сложные методы. Но масштабируемость вычислительных систем на таких «тяжелых» ядрах ограничена, и их дальнейшее усложнение приводит к большому снижению эффективности. Это стало причиной появления систем на новых массивно-параллельных архитектурах с большим числом простых ядер. Вот здесь и проявилась

проблема: накопленный за десятилетия «багаж» численных методов оказался плохо подходящим для реализации на новых вычислителях, поскольку высокая производительность в них достигается не за счет эффективного исполнения каждого из небольшого (порядка 10) числа «тяжелых» потоков, а за счет одновременной обработки значительно большего (порядка 1000) числа «легких». Иными словами, простое устройство ядра массивно-параллельных вычислителей влечет за собой требование вычислительного примитивизма для применяемых численных методов.

Явные методы хорошо подходят для реализации на новых архитектурах, но их применение сильно ограничено из-за условия устойчивости. В задачах со сложной геометрией, где неизбежно в сеточном разбиении будут присутствовать разномасштабные ячейки, глобальный шаг интегрирования по времени будет определяться размерами наименьшей из них, что приведет к неоправданно высокому росту вычислительной сложности. Неявные методы позволяют обойти это ограничение, но они значительно сложнее с точки зрения указанных выше требований, особенно в части возможного их распараллеливания. Таким образом, проблема выбора и создания методов и эффективных параллельных алгоритмов под них для решения широкого класса задач газовой динамики носит актуальный характер.

Реализация неявных схем для графических ускорителей (GPU) является непростой задачей, поскольку имеющаяся, как правило, в них зависимость по данным значительно затрудняет написание эффективного решателя, особенно в отсутствие средств глобальной синхронизации на GPU. В частности, в [1] метод LU-SGS [2], использующийся для решения СЛАУ, порожденной неявными схемами, рассматривается как один из хороших методов для расчетов на графических ускорителях. Однако, из-за возникающей в нем зависимости по данным, сильно усложняющей распараллеливание, был выбран другой – DP-LUR, в котором отсутствует зависимость по данным, но при этом и выше вычислительная сложность.

В первой главе приводится оригинальный параллельный алгоритм для метода LU-SGS, в точности соблюдающий работу своего последовательного прототипа и масштабирующийся на несколько сотен графических ускорителей. Помимо собственно численного метода, важную роль, как уже было сказано, играет тип сеточного разбиения – GPU значительно эффективнее работа-

ют с регулярными структурами данных, в которых представляются структурированные сеточные разбиения, чем с нерегулярными, характерными для неструктурированных сеток. Применение структурированных сеток, адаптированных к геометрии расчетной области, накладывает ограничения на сложность геометрии расчетной области. Мы предлагаем метод, который позволяет проводить расчеты в областях с достаточно сложной геометрией на простых несогласованных декартовых сетках (по тексту мы их называем несвязными сетками), что делает его подходящим кандидатом для реализации на GPU. В дальнейшем будем называть его методом свободной границы. Он сводится к альтернативной постановке, в которой внутренние граничные условия моделируются компенсационным потоком – специальной поправкой в правой части определяющей системы уравнений. Это дает возможность вести сквозной расчет по всем ячейкам расчетной области, включая ячейки, приходящиеся на геометрию, в единообразной манере. Иными словами, данный метод обладает алгоритмической однородностью, весьма важной для массивно-параллельных архитектур.

Разделы первой главы будут посвящены методу декартовых сеток без локальной адаптации, методу свободной границы расчета внутренних граничных условий на поверхностях, не согласованных с исходной декартовой сеткой, и параллельной реализации для вычислительной системы с множеством графических ускорителей.

Даже на вычислительных системах с большим числом графических ускорителей расчет сложных трехмерных задач со сложной пространственной геометрией требует очень больших сеток и, как следствие, значительное увеличение расчетного времени и затрат по памяти. Чтобы уменьшить эти ресурсы, можно применить принцип локальной адаптации расчетной сетки. Имея некоторую базовую регулярную декартовую сетку, мы можем измельчать счетные ячейки только там, где это необходимо, исходя из особенностей конкретной газодинамической задачи, а также ее геометрических особенностей. Напротив, там, где решение начинается вести себя гладким образом, и нет необходимости более в мелком пространственном разрешении расчетной области, ячейки объединяются вплоть до уровня базовой регулярной сетки. Это позволяет существенно сократить расчетное время задачи без серьезных потерь в качестве результата.

Метод локальной адаптации декартовых сеток совместно с методом свободной границы, представленные во второй главе, открывают широкие возможности для использования даже простого персонального компьютера при решении двумерных газодинамических задач, и позволяет достигнуть особенно значимых результатов при адаптации методики для параллельных вычислительных систем и счета трехмерных задач со сложной геометрией твердых включений. Сохраняющийся при этом регулярный характер сеток (их декартовость), делают возможным использование простых вычислительных алгоритмов, выполнение которых идеально подходит для многопоточных вычислений на GPU.

В разделах второй главы на примере двумерной газодинамической модели подробно рассматриваются вопросы динамической локальной адаптации сеток и реализация на них метода свободной границы.

## **1. Регулярные декартовые сетки**

### **1.1. Базовый численный метод**

Рассматривается численное решение системы уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной сжимаемой жидкости. Система определяющих уравнений в декартовых координатах записывается в консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

где подразумевается суммирование по индексу координатного направления  $k$ ,

$\mathbf{q} = (\rho, \rho u_m, \rho E)^T$  – вектор консервативных переменных,

$\mathbf{f}_k = (\rho u_k, \rho u_k u_m + \delta_{km} p, \rho u_k H)^T$  – векторы потоков

$m = 1, 2, 3$ ,  $\delta_{km}$  – символ Кронекера,  $\rho$ ,  $u_k$ ,  $p$  – плотность, компоненты вектора скорости и давление соответственно,  $E = e + 0.5 u_k u_k$ ,  $H = e + p/\rho$  – удельные полная энергия и энтальпия. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния, связывающим термодинамические параметры среды, которое в настоящей работе берется в форме уравнения состояния идеального совершенного

с показателем адиабаты  $\gamma$ :  $p = (\gamma - 1)\rho e$ . В расчетах, которые будут представлены ниже, показатель адиабаты берется для случая воздуха,  $\gamma = 1.4$ .

Дискретизация по пространству выполняется декартовой сеткой, ориентированной вдоль координатных направлений, с шагами  $h_k$ , которые, вообще говоря, могут быть переменными. Применяя метод конечного объема к уравнениям (1), приходим к следующей системе полудискретных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \left( \frac{\Delta \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i, \quad (2)$$

где  $i$  является обобщенным индексом ячейки, зависящим от индекса координатного направления  $k$  и принимающим значение порядкового номера ячейки в этом направлении.

Разность потоков в правой части (2)

$$\Delta \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \mathbf{F}_{k,i-1/2}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$  – численный поток, аппроксимирующий дифференциальный поток  $\mathbf{f}_k$  на грани между ячейками  $i$  и  $i+1$ . Этот численный поток берется в виде функции двух векторных аргументов

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-), \quad (4)$$

удовлетворяющей условию аппроксимации  $\mathbf{F}_k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z})$ . Здесь  $\mathbf{z}$  обозначает вектор примитивных переменных,  $\mathbf{z} = (\rho, u_k, p)$ .

Верхние индексы «+» и «-» в правой части уравнений (3) указывают, что соответствующие величины берутся в центре грани  $i+1/2$ . Выбор этих величин определяется точностью схемы. Например, схема первого порядка точности по пространству получается при простом выборе

$$\mathbf{z}_i^+ = \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{z}_{i+1}^- = \mathbf{z}_{i+1}. \quad (5)$$

Для увеличения порядка аппроксимации схемы необходимо применять подсеточную реконструкцию параметров более высокого порядка точности [7]. В настоящей работе мы используем кусочно-линейное подсеточное восполнение, обобщающее на неравномерные сетки интерполяцию схемы MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [3]:

$$\mathbf{z}^{\pm} = \mathbf{z} \pm 0.5\delta^{\pm} \left[ (1 - k^{\pm})\Delta^{\mp} + (1 + k^{\pm})\Delta^{\pm} \right] \quad (6)$$

с конечными разностями  $\Delta^{+} = \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i$ ,  $\Delta^{-} = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}$ . В этом уравнении для сокращения записи опущен индекс ячейки  $i$ ,  $\delta^{+} = h_i / (h_i + h_{i+1})$ ,  $\delta^{-} = h_i / (h_i + h_{i-1})$  – параметры неравномерности сетки,  $k^{\pm} = k(\delta^{\pm})$  – функция, определяющая порядок аппроксимации интерполяционной схемы. При выборе  $k(\delta) = -1$  получается стандартная MUSCL схема второго порядка точности [4],  $k(\delta) = 1$  дает неустойчивую центрально-разностную схему второго порядка,  $k(\delta) = 0$  отвечает схеме Фромма [5],  $k(\delta) = (12\delta^2 - 1) / (12\delta)$  приводит к MUSCL схеме третьего порядка аппроксимации по пространству. Ниже мы используем этот (последний) вариант схемы.

Схемы порядка точности по пространству второго и выше являются немонотонными и приводят к нефизичным осцилляциям в численных решениях вблизи поверхностей сильных разрывов [6]. Для подавления этих осцилляций используют ограничители производных [7,4]. Действие ограничителя сводится к модификации разностей  $\Delta^{\pm}$  таким образом, чтобы интерполяция (6) не приводила к образованию локальных экстремумов.

Наиболее распространенными являются minmod ограничитель [3, 7]:

$$\Delta^{+} = \min mod(\Delta^{+}, \varphi\Delta^{-}), \quad \Delta^{-} = \min mod(\Delta^{-}, \varphi\Delta^{+})$$

$$\varphi = \frac{3-k}{1-k}, \quad \min mod(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy < 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & \text{если } xy \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

и ограничитель Ван Альбада [8]:

$$\mathbf{z}^{\pm} = \mathbf{z} \pm 0.5s\delta^{\pm} \left[ (1 - sk^{\pm})\Delta^{\mp} + (1 + sk^{\pm})\Delta^{\pm} \right] \quad (8)$$

$$s = \max \left( 0, \frac{2\Delta^{+}\Delta^{-}}{\Delta^{+}\Delta^{+} + \Delta^{-}\Delta^{-} + \varepsilon} \right)$$

где  $\varepsilon$  – малое число, служащее для предотвращения деления на ноль ( $\varepsilon \sim 10^{-12}$  для операций с двойной арифметикой,  $\varepsilon \sim 10^{-6}$  – для одинарной). Первый ограничитель производных не является



непрерывно-дифференцируемой функцией и может приводить к заикливаюнию невязки в процессе сходимости решения. Мы используем второй ограничитель в виде гладкой функции, который во многих задачах решает проблему заикливания невязки.

Метод С.К. Годунова [9] применяется для аппроксимации функции численного потока. В этом подходе поток вычисляется на решении автомодельной задачи Римана для системы локально-одномерных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

с начальными данными  $\mathbf{z}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{z}_i^+, & x < 0 \\ \mathbf{z}_{i+1}^-, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Решение этой задачи подробно описывается в монографии [10]. Оно фактически сводится к решению одного линейного уравнения относительно давления контактной зоны, что может быть реализовано ньютоновскими итерациями. Остальные параметры решения имеют точные аналитические выражения. Обозначим это решение как  $\mathbf{z}(t, x) = \mathbf{Z}^{R,k}(\lambda, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-)$ , где  $\lambda = x / t$  – автомодельная переменная. Тогда стандартный годуновский численный поток будет иметь вид

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \mathbf{f}_k[\mathbf{Z}^{R,k}(0, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-)] \quad (10)$$

Расчет численного потока выполняется на каждом ребре счетной ячейки и является по сути основной (в смысле временных затрат) операцией расчетного цикла. Поэтому в целях повышения эффективности схемы С.К. Годунова были разработаны различные безытерационные приближенные решения задачи Римана [11]. Одно из таких приближений приводит к численному потоку, предложенному В.В. Русановым [12]. Ниже мы будем использовать его в линеаризации численного потока. Он имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) + \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_{i+1}^-) - (|u_k| + c)_{i+1/2} [\mathbf{q}(\mathbf{z}_{i+1}^-) - \mathbf{q}(\mathbf{z}_i^+)] \}, \quad (11)$$

где индекс  $i + 1 / 2$  означает осреднение, например

$$(*)_{i+1/2} = 0.5 \left[ (*)_i^+ + (*)_{i+1}^- \right].$$

Интегрирование по времени системы полудискретных уравнений (2)–(4) с численным потоком в форме (10) проводится с

использованием явно-неявной схемы [13], которая обеспечивает минимальное вовлечение диссипативной неявной компоненты, гарантируя при этом свойство невозрастания  $\max$  нормы (НВМН) для случая линейных уравнений. При надлежащем выборе шага по времени эта схема автоматически переходит в базовую явную схему второго порядка точности по времени и пространству, удовлетворяющую свойству НВМН.

Построение гибридной явно-неявной схемы начинается с выбора базовой явной схемы. В качестве такой схемы мы берем двухшаговую схему типа предиктор–корректор, хотя и другой выбор тоже возможен. В этой схеме на первом шаге вычисляются значения предиктора на полшаге по времени по явной эйлеровой схеме:

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n)}{h_k} \right)_i \quad (12)$$

с потоком  $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$ , определяемым по интерполированным на грани ячейки значениям,

$$\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) - \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^-). \quad (13)$$

Здесь верхний индекс  $n$  обозначает дискретный уровень по временной переменной. Решение на новом временном слое  $n+1$  получается по явной схеме второго порядка точности на шаге  $\Delta t$  с потоками, вычисляемыми по значениям предиктора:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left( \frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Описанная выше схема типа предиктор–корректор гарантирует (в линейном случае) свойство НВМН при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви на шаг интегрирования по времени,

$$\Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^n) \text{ для всех } i, \quad (15)$$

где функция в правой части определяется локальными скоростью течения и скоростью звука:

$$\lambda_i(\mathbf{z}^n) = K_s \left( \frac{|u_k| + C}{h_k} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Здесь  $K_s$  – коэффициент запаса ( $0 < K_s \leq 1$ ).

Запишем базовую явную схему в операторном виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\Delta t, \mathbf{q}^n), \quad (17)$$

где  $L_2(\cdot)$  обозначает дискретный двухшаговой оператор перехода (12)–(14). Введем для каждой счетной ячейки параметр промежуточного слоя – скалярный параметр  $\omega_i$ ,  $0 \leq \omega_i \leq 1$ . Определим также вектор решения на промежуточном слое  $\mathbf{q}^\omega = \omega \mathbf{q}^n + (1 - \omega) \mathbf{q}^{n+1}$ . Тогда гибридная явно- неявная схема записывается в следующем виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (18)$$

Очевидно, что при выборе  $\omega_i = 1$  во всех счетных ячейках, гибридная схема переходит в точности в ее явный аналог. В другом предельном случае  $\omega_i = 0$  она становится чисто неявной эйлеровской схемой с пространственной аппроксимацией второго порядка точности.

Неявная составляющая гибридной схемы привносит излишнюю диссипацию, которая стабилизирует численное решение, но при этом занижает его точность. Поэтому оптимальным решением в конструировании гибридной схемы будет выбор наибольших значений параметра промежуточного слоя  $\omega_i$  в счетных ячейках, обеспечивающий максимальное участие явной компоненты, при условии выполнения свойства НВМН.

Оказывается, что такой выбор можно сделать. Заметим, что гибридная схема может быть переписана в эквивалентной форме как

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^\omega + \omega_i \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (19)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (19) в точности представляет явную двухшаговую схему перехода с переменного промежуточного слоя  $t^\omega = \omega t^n + (1 - \omega) t^{n+1}$  на верхний слой  $t^{n+1}$ . Поэтому невозрастание  $\max$  нормы

$$\|\mathbf{q}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{q}^\omega\|_\infty \quad (20)$$

будет выполняться при условии

$$\omega_i \Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^\omega). \quad (21)$$

Следствием неравенства (20) является неравенство  $\|\mathbf{q}^{n+1}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{q}^n\|_{\infty}$  [13]. Поэтому неравенство (21) является также необходимым условием выполнения свойства НВМН численных решений гибридной схемы.

Неравенство (21) будет выполняться, если положить

$$\omega_i = \min \left[ 1, \frac{\lambda_i(\mathbf{z}^{\omega})}{\Delta t} \right] \quad (22)$$

или с учетом уравнения (16)

$$\omega_i = \min \left[ 1, \frac{K_s}{\Delta t} \left( \frac{|u_k^{\omega}| + C^{\omega}}{h_k} \right)_i^{-1} \right]. \quad (23)$$

Как видно, параметр промежуточного слоя в каждой счетной ячейке зависит от решения на верхнем временном слое. Таким образом, гибридная схема является фактически неявной, требующей решения нелинейной системы уравнений на каждом временном шаге. Отметим также, что выбором величины шага  $\Delta t$  можно уменьшить число решаемых в системе уравнений, переведя в части счетных ячеек гибридную схему в чисто явную. Более подробно решение системы нелинейных уравнений обсуждается ниже.

## 1.2. Метод свободной границы для расчета внутренних граничных условий

Для реализации внутренних граничных условий на декартовой сетке, не связанной с геометрией области решения, используется метод свободной границы (МСГ) [14, 15]. Кратко опишем основные положения этого метода.

Пусть  $\Omega$  является областью, занятой твердым телом,  $\Gamma = \partial\Omega$  – его граница. Тогда уравнения Эйлера (1) описывают течение газа в области  $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega$ , и граничным условием для этих уравнений служит соотношение

$$u_k n_k = 0, \mathbf{x} \in \Gamma \quad (24)$$

где  $\mathbf{n} = (n_k)$  – вектор единичной внешней к  $\Omega$  нормали на поверхности  $\Gamma$ .

Суть метода свободной границы сводится к замене решения краевой задачи для однородной системы уравнений Эйлера в ограниченном пространстве решением неоднородной системы во всем пространстве. Исходная система уравнений модифицируется путем добавления в правую часть некоторого вектора  $\mathbf{F}_w$ , который далее называется компенсационным потоком:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = -\mathbf{F}_w. \quad (25)$$

По своей структуре модификация уравнений (25) напоминают штрафные функции, которые используются в методе погруженной границы (Immersed boundary method) [16]. По сути же, это разные подходы. Штрафные функции являются объемными и никак не учитывают подсеточную структуру геометрии. Компенсационные потоки, напротив, определяются на поверхности, задающей геометрию объекта, и вычисляются, как будет видно ниже, с учетом геометрических характеристик объекта на подсеточном уровне.

Система модифицированных уравнений (25) решается во всем пространстве  $\mathcal{R}^3$ , а компенсационный поток  $\mathbf{F}_w$  подбирается таким образом, чтобы сужение решения уравнения (25) в  $\mathcal{R}^3$  на область  $\mathcal{R}^3 \setminus \Omega$  в точности совпадало с решением исходной краевой задачи. В работе [14] предлагается выражение для компенсационного потока  $\mathbf{F}_w$ , которое обеспечивает выполнение этого условия:

$$\mathbf{F}_w = \begin{pmatrix} \rho u_k n_k \\ \rho u_k u_m n_k + (p - p_w) n_m \\ \rho u_k n_k H \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}, \Gamma), \quad (26)$$

где  $\delta(\mathbf{x}, \Gamma)$  обозначает обобщенную функцию Дирака поверхности  $\Gamma$ , определяемую соотношением

$$\int_V \delta(\mathbf{x}, S) \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_{V \cap \Gamma} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad \forall V \in \mathcal{R}^3. \quad (27)$$

Величина  $p_w$  в уравнениях (26) представляет собой мгновенную реакцию жесткой стенки на воздействие со стороны потока жидкости. Для случая идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma$  эта реакция определяется в зависимости от знака нормальной компоненты относительной скорости следующим образом.

Если  $u_k n_k < 0$ , то давление стенки  $p_w$  соответствует давлению за фронтом формирующейся ударной волны и определяется по формуле [17]:

$$p_w = p \left[ 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 + \sqrt{\gamma^2 M^2 + \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{16} M^4} \right]. \quad (28)$$

В противном случае  $u_k n_k > 0$  формируется волна разрежения, и давление стенки имеет вид

$$p_w = p \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (29)$$

Здесь  $M$  обозначает относительное число Маха,  $M = u_k n_k / a$ , где  $a$  – скорость звука.

Отметим, что выбор компенсационного потока в форме соотношений (27)–(29) не является единственным с математической точки зрения. Наверное, можно указать другие формы правой части, при которых краевое условие (24) будет также выполняться. Наш выбор основан на естественном физическом обосновании. Поток  $\mathbf{F}_w$  моделируется двумя составляющими. Первая компенсирует протекающие через поверхность  $\Gamma$  массу, импульс и энергию, а вторая определяет реакцию стенки и соответствующую ей работу.

При численной реализации МСГ предполагается, что поверхность  $\Gamma$ , задающая геометрию тела, представляется набором

дискретных элементов  $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$ . В большинстве случаев это

плоские многогранники или треугольные пространственные элементы. Ячейки декартовой сетки разбиваются границей тела на три типа: жидкостные – те, которые полностью находятся вне  $\Gamma$ , твердые, лежащие целиком внутри  $\Gamma$  и, соответственно, пересекаемые. Пересекаемые ячейки наряду с расчетным вектором определяются также подсеточной структурой геометрии тела. В настоящей работе мы используем линейное восполнение, которое задается объемом долей, занимаемой жидкостью в пересекаемой ячейке,  $\omega_f$ , и вектором внешней нормали (направленной в сторону жидкости)  $\mathbf{n}_f$ ,  $|\mathbf{n}_f| = S_f$ , где  $S_f$  – площадь плоского элемента, аппроксимирующего пересечение счетной ячейки с поверхностью  $\Gamma$ .

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности  $\Gamma_j$ . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными площадям пересечения:  $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$ ,  $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$ , где  $C$  обозначает область ячейки сетки. Объемную долю  $\omega_f$  в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить через средние расстояния от жидких вершин ячейки,  $d^+$ , и, соответственно, от твердых вершин,  $d^-$ , до плоскости, нормальной к  $\mathbf{n}_f$  и проходящей через опорную точку  $\mathbf{x}_0$ :

$$\omega_f = d^+ / (d^+ + d^-). \quad (30)$$

Опорная точка определяется по центрам элементов поверхности  $\mathbf{X}_j$

$$\mathbf{x}^j = \frac{|\mathbf{n}^{j-1}| \mathbf{x}^{j-1} + \mathbf{x}_j s_j}{|\mathbf{n}^{j-1}| + s_j}, \quad \mathbf{n}^j = \sum_{k=1}^j \mathbf{n}_k s_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^M, \quad (31)$$

где  $M$  – число элементов поверхности  $\Gamma$ .

Дискретизация системы уравнений (25) проводится в два этапа с применением метода разделения по физическим процессам. На первом этапе выполняется интегрирование однородной системы на множестве жидких и пересекаемых ячеек по численной схеме, рассмотренной в предыдущем разделе:

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left( \frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Таким образом, решение на этом этапе,  $\mathbf{q}_i^*$ , описывает изменение газодинамических параметров на временном шаге в соответствии с моделью Эйлера, но без учета влияния стенки на параметры течения.

На втором этапе полученное решение корректируется компенсационным потоком правой части. Вывод соответствующих дискретных уравнений мы получим из физических соображений, упомянутых выше.

Беря решение  $\mathbf{q}_i^*$  в качестве начальных данных, проинтегрируем однородную систему уравнений Эйлера по жидкостной части счетной ячейки:

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \sum_{\sigma \in f} \mathbf{F}_\sigma S_\sigma + \mathbf{F}_p S_f, \quad (33)$$

где  $\mathbf{F}_p = (0, p_w n_m, 0)^T$  – численный поток на стенке, суммирование в правой части ведется по граням ячейки, полностью или частично находящимся в жидкости,  $S_\sigma$  – площадь жидкостной части грани. Поскольку на этом этапе учитывается только влияние стенки, потоки на гранях  $\mathbf{F}_\sigma$  вычисляются по значениям  $\mathbf{q}_i$  из ячейки.

Используя свойство консервативности потока, уравнение (33) можно переписать в виде

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = -\mathbf{F}_c S_f + \mathbf{F}_p S_f \quad (34)$$

с потоком  $\mathbf{F}_c = (\rho u_k n_k, \rho u_k u_m n_k + p n_m, \rho u_k n_k H)^T$  и  $V_i = h_1 h_2 h_3$ . Сумма потоков в правой части как раз дает введенный выше компенсационный поток,  $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p$ .

Для интегрирования по времени уравнения (34) мы берем неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли  $\omega_f$ , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^* - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}). \quad (35)$$

Объединяя (32) и (35), приходим к следующей численной схеме:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left( \frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}), \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-),$$

которая является абсолютно устойчивой при вычислении параметра промежуточного слоя по формуле (23) и обеспечивает третий порядок точности по пространству и второй порядок по времени.

Решение нелинейной системы уравнений (36) находится безматричным методом приближенной факторизации LU-SGS



[2,18]. Этот метод экономичен и сводится к прямому и обратному циклам по счетным ячейкам, которые фактически реализуют явную схему. Детали метода решения описываются в следующем разделе.

### 1.3. Решение уравнений дискретной модели

Для решения уравнений (36) используем итерационный метод Ньютона. Он приводит к линейной системе относительно итерационных вариаций  $\delta^s(\cdot) = (\cdot)^{n+l,s+1} - (\cdot)^{n+l,s}$ , где  $s$  – итерационный индекс:

$$\left( I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s \right) \delta^s \mathbf{q}_i = -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left( \frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+l,s}) - \Delta t \frac{\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \delta^s \mathbf{F}_{k,i-1/2}}{h_k}. \quad (37)$$

В этом уравнении  $\Delta^s = (\cdot)^{n+l,s} - (\cdot)^n$  обозначает итерационное приращение на временном шаге,  $A_w = \partial \mathbf{F}_w / \partial \mathbf{q}$  – якобиан компенсационного потока по вектору консервативных переменных.

Линеаризация численного потока  $\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2}$  выполняется приближенно, используя следующие упрощения. Во-первых, несмотря на то, что параметр  $\omega$  зависит от итерационных значений, при линеаризации он предполагается замороженным. Во-вторых, при линеаризации не учитываются подсеточные интерполяции расчетного вектора и считается, что численный поток зависит от значений параметров в счетной ячейке, как в стандартной схеме первого порядка точности. И в-третьих, в качестве функции численного потока берется не точно годуновский поток, а его приближение в форме В.В. Русанова, которое определяется соотношением (11). При этих допущениях линеаризация численного потока сводится к простому выражению

$$\begin{aligned} \delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} = & (1 - \omega_i) \frac{A_{k,i}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_i + \\ & + (1 - \omega_{i+1}) \frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $A_{k,i}^{\omega,s} = A_k(\mathbf{z}_i^{\omega,s}) = \partial \mathbf{f}_k / \partial \mathbf{q}$  – якобиан потока в  $k$ -ом направлении по вектору консервативных переменных и верхний индекс  $\omega$  указывает на то, что значение параметра в счетной ячейке берется с промежуточного слоя.

С учетом уравнения (38) система уравнений (37) сводится к линейной системе относительно итерационных невязок  $\delta^s \mathbf{q}$ :

$$D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t(1 - \omega_{i+1})}{h_k} \left[ \frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i+1} + \frac{\Delta t(1 - \omega_{i-1})}{h_k} \left[ \frac{A_{k,i-1}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i-1}, \quad (39)$$

где

$$D_i^s = I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s + \frac{\Delta t(1 - \omega_i)}{2h_k} \left[ (|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s} \right] \mathbf{R}_i^s = -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left( \frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1,s}). \quad (40)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет удобно в правой части уравнения (39) сделать обратную линеаризацию, перейдя от произведения якобиана и итерационного приращения консервативного вектора к приращению соответствующего потокового вектора. Обозначая спектральный радиус якобиана через  $r_k = |u_k| + c$ , результирующую систему уравнений можно привести к следующему виду:

$$D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t(1 - \omega_{i+1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}) + \frac{\Delta t(1 - \omega_{i-1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1}). \quad (41)$$

Решение этой системы ищется безматричным итерационным методом LU-SGS [18]. Матрица системы является семидиагональной. Запишем ее в расщепленном операторном виде:

$$D \delta \mathbf{q} + L(\delta \mathbf{q}) + U(\delta \mathbf{q}) = \mathbf{R}^s \quad (42)$$

введя верхне-треугольный матричный оператор

$$L(\delta \mathbf{q}) = \frac{\Delta t(1 - \omega_{i+1})}{2h_k} \left( \delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1} \right)$$

и нижне-треугольный матричный оператор

$$U(\delta \mathbf{q}) = -\frac{\Delta t(1 - \omega_{i-1})}{2h_k} \left( \delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1} \right).$$

Переписывая систему уравнений (42) в виде

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\delta \mathbf{q} = \mathbf{R} + LD^{-1}U, \quad (43)$$

для нахождения решения мы затем используем ее приближенную факторизацию, которая состоит в отбрасывании последнего слагаемого в правой части уравнения (43). В результате получается упрощенная система

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\delta \mathbf{q} = \mathbf{R}, \quad (44)$$

которая эффективно решается двумя расчетными циклами по ячейкам в прямом и обратном направлениях (по индексу ячейки) соответственно:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^* &= D^{-1}[\mathbf{R} - L(\delta \mathbf{q}^*)], \\ \delta \mathbf{q}^s &= \delta \mathbf{q}^* - D^{-1}U(\delta \mathbf{q}^s). \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что отбрасываемые в описанной выше приближенной факторизации члены оказываются по порядку малости величинами  $O(\Delta t^2)$ . Поэтому, если при решении задачи используется малый шаг по времени, внесенная факторизацией ошибка будет небольшой.

#### 1.4. Параллельная программная реализация и результаты численных экспериментов

Введение компенсационного потока не изменяет структуру результирующей СЛАУ (37), полученной в результате линейаризации дискретной системы уравнений, поскольку данный поток представляет собой локальную добавку. Данное свойство позволяет строить параллельный алгоритм для метода LU-SGS таким же образом, как и в случае использования согласованных сеток. Решение системы с факторизованной матрицей может

быть представлено как обход всех ячеек сеточного разбиения в прямом и обратном направлениях, причем возникающая при этом зависимость по данным носит локальный характер и определяется только порядком обхода всех геометрически соседних ячеек относительно каждой из них. Иными словами, в зависимости от того, «до» или «после» относительно текущей ячейки в порядке обхода располагается соседняя, выполняются те или иные вычисления. Сам порядок обхода можно выбирать произвольным образом, основываясь не только на геометрическом соседстве ячеек. Этим и воспользуемся при построении параллельного алгоритма.

Одновременный счет в ячейках возможен только в том случае, если они не являются геометрически соседними. Выбор обхода ячеек в этом случае сводится к задаче о раскраске графа, две соседние вершины в котором всегда должны быть разного цвета. В случае структурированных, а именно, используемых в методе свободной границы декартовых сеток, достаточно двух цветов, что порождает «шахматный» порядок обхода ячеек, когда вычисления проводятся сначала над «черными», а затем над «белыми» ячейками. Подмножество каждого цвета можно считать одновременно, что приводит к параллельному алгоритму для одного GPU: сначала считаются только «черные», затем — только «белые» ячейки. Однако в случае использования нескольких GPU этот алгоритм приводит к неизбежному простоям во время обмена соседними ячейками между ускорителями. Это в конечном итоге ограничивает масштабируемость алгоритма, поскольку пересылки данных между GPU выполняются фактически в 3 этапа: из памяти ускорителя в память CPU, затем пересылка по сети в другой узел и копирование из памяти CPU на этом узле в память GPU.

Для обхода этого ограничения был изменен порядок обхода ячеек. Расчетная область разбивается на блоки с примерно равным числом ячеек с топологией, аналогичной сеточному разбиению: прямоугольники, расположенные «стык в стык». Блоки также разбиваются в «шахматном» порядке, в каждом из них выделяется внутренняя и граничная части. Глобальный обход строится следующим образом: сначала выполняется обход всех внутренних частей «черных» блоков; затем в каждом «белом» блоке обходится сначала первая половина внутренних ячеек, а потом граничная часть; далее, во всех черных блоках обходятся

граничные части и, наконец, в белых блоках обходятся оставшиеся половины внутренних ячеек (рис. 1). Данная схема позволяет совмещать во времени расчет внутренних частей блоков с обменом граничными ячейками между соседними блоками на разных GPU. Расчет каждой части блоков выполняется в соответствии с указанной выше «шахматной» раскраской ячеек. Детали алгоритма можно найти в [19].

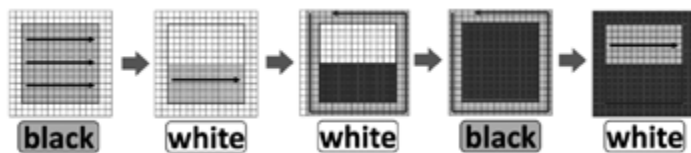


Рис. 1. Схема обхода ячеек для параллельного алгоритма LU-SGS

Программная реализация была выполнена на CUDA C с использованием Stream API и неблокирующих вызовов MPI, что позволило добиться совмещения счета и многофазной передачи данных между графическими ускорителями. Все вычислительные операции выполняются при этом на GPU, CPU используются лишь для межузловых обменов.

Детальное тестирование предлагаемого метода было проведено на задаче обтекания крыловидного профиля NACA 0012. Угол атаки составлял  $\alpha = 1.25^\circ$ , число Маха набегающего потока –  $M = 0.8$ . Использовались сетки 2 типов: связанная с поверхностью профиля структурированная C-сетка с разрешением 400 ячеек вдоль границы профиля и общим разрешением 1000x150 и несвязная декартова сетка с разрешением внутри описанного вокруг профиля прямоугольника 200x24 и общим разрешением 650x324.

Расчеты на этих сетках проводились по гибридной явно-неявной схеме второго порядка точности с числом Куранта  $C = 10$ . Распределение коэффициента давления  $C_p$  и скорости сходимости к стационарному решению приведены на рис. 2. Как видно, результаты на разных сетках, включая и скорость сходимости, хорошо согласуются. Характерной особенностью течения является небольшой локальный минимум в распределении давления, возникающий сразу за ударной волной на наветренной стороне профиля. Видно, что эта особенность лучше воспроизводится на декартовой сетке, чем на согласованной, где она фактически отсутствует и начинает проявляться при увеличении сеточного

разрешения. Это связано со свойством ортогональности, естественно присущим декартовой сетке, которое лучше обеспечивает выполнение повышенной точности схемы.

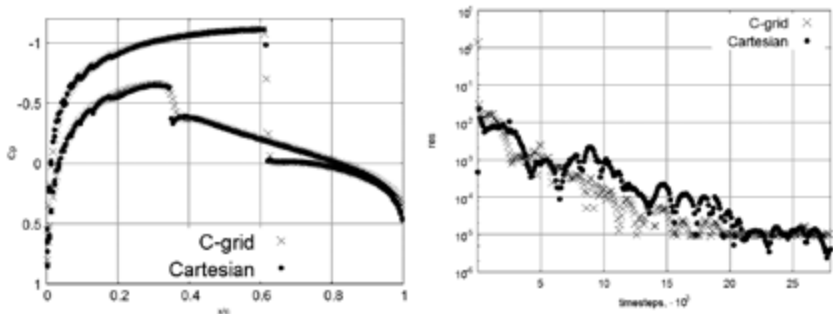


Рис. 2. Распределение  $C_p$  (слева) и скорость сходимости (справа) на согласованной (C-grid) и несвязной (Cartesian) сетках,  $NACA0012$ ,  $M = 0.8$ ,  $\alpha = 1.25^\circ$ , число Куранта 10.

Расчетные значения коэффициентов подъемной силы и сопротивления,  $C_l$  и  $C_d$ , полученных на согласованной и несвязной декартовой сетках, приведены в табл. 1. Разница значений этих коэффициентов составляет менее 1%.

Табл. 1. Аэродинамические коэффициенты:  $NACA0012$ ,  $M=0.8$ ,  $\alpha=1.25^\circ$ .

| Коэффициент | Декартова сетка | C-сетка |
|-------------|-----------------|---------|
| $C_l$       | 0,3012          | 0,3036  |
| $C_d$       | 0,02184         | 0,02199 |

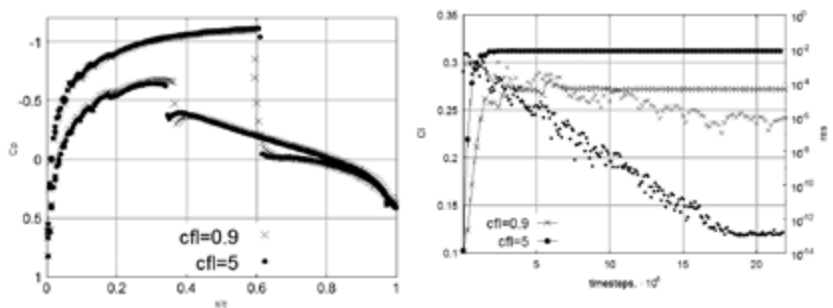


Рис. 3. Распределение  $C_p$  (слева), зависимость  $C_l$  от времени и скорость сходимости (справа) для чисел Куранта 0.9 и 5 на несвязной сетке,  $NACA0012$ ,  $M = 0.8$ ,  $\alpha = 1.25^\circ$ .

Были проведены также расчеты на несвязной декартовой сетке с разными временными шагами, которые обнаружили известное свойство неединственности решений уравнений Эйлера. В этой серии расчетов применялась чисто неявная схема ( $\omega = 0$ ), чтобы исключить возможную зависимость стационарного решения от шага по времени. На рис. 3 (слева) приведены два распределения коэффициента давления  $C_p$ , полученные при числах Куранта 0.9 и 5. Сетка и метод решения абсолютно одинаковые. Видно, что это два разных решения, отличающихся положением и профилем ударных волн (в частности, на подветренной стороне ударная волна имеет более резкий профиль для решения с числом Куранта 5). На рис. 3 (справа) мы приводим графики сходимости невязки и коэффициента подъемной силы. Как следует из этих данных, оба решения выходят на стационарный режим. Различие в значениях коэффициента подъемной силы при этом оказывается порядка 15%. Неединственность решения, обнаруженная в этих расчетах, наблюдалась и исследовалась также в работах [20–22] по трансзвуковому обтеканию крыловидных профилей.

Корректность работы компенсационного потока проверялась также на задачах взаимодействия сверхзвукового потока газа (число Маха  $M = 3$ ) с клином (угол раствора  $10^\circ$ ) на режимах с образованием ударной волны и волны разрежения. Использовалась равномерная несогласованная декартовая сетка с разрешением  $1200 \times 480$  ячеек. Число Куранта в расчетах составляло  $C = 4$ . Расчетные значения угла ударной волны  $\beta$  и угла  $\gamma$ , внутри которого формируется веер волны разрежения, приведены в табл. 2. Там же для сравнения указаны соответствующие аналитические значения.

Табл. 2. Сверхзвуковое обтекания клина: угол раствора  $10^\circ$ ,  $M=3$ .

| Численное решение, $\beta^\circ$ | Аналитическое решение, $\beta^\circ$ | Численное решение, $\gamma^\circ$ | Аналитическое решение, $\gamma^\circ$ |
|----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 17.4                             | 17.383                               | 13.2                              | 13.24                                 |

Для проверки метода был выполнен расчет нестационарной задачи взаимодействия ударной волны с группой цилиндров из работы [16]. Расчет проводился на декартовой равномерной сетке разрешением  $1024 \times 1024$  ячеек с использованием 32 GPU. Расчетные данные представлены на рис. 4 (справа), где изобра-

жена мгновенная численная шлирен-визуализация потока. Для сравнения представлен аналогичный расчет, выполненный с помощью одного из методов штрафных функций [16] (рис.4, слева). Решения оказались очень близки, но при этом метод компенсационных потоков не дает нефизичных возмущений вблизи поверхностей цилиндров. Это связано с тем, что в методе штрафных функций нет подсеточного разрешения геометрии; геометрия там представлена более грубо, с точностью до ячейки сеточного разбиения.

Наконец, был проведен валидационный расчет трехмерного обтекания модели DLR F6 [23м]. Число Маха набегающего потока составляло  $M=0.75$ , угол атаки –  $\alpha = 1^\circ$ , разрешение расчетной сетки –  $408 \times 520 \times 1256$  ячеек. Расчет проводился с использованием 162 GPU СК «Лобачевский» по гибридной явно-неявной схеме с числом Куранта  $C = 4$ . Результаты расчета представлены на Рис. 5. Следует отметить, что расчетное значение коэффициента подъемной силы оказалось несколько выше экспериментального ( $C_{l_{\text{exp}}} = 0.5$ ). Подобное превышение (порядка 0.5–0.6) наблюдается также и в численных решениях, полученных на согласованных сетках [23] и объясняется недостаточностью модели Эйлера.

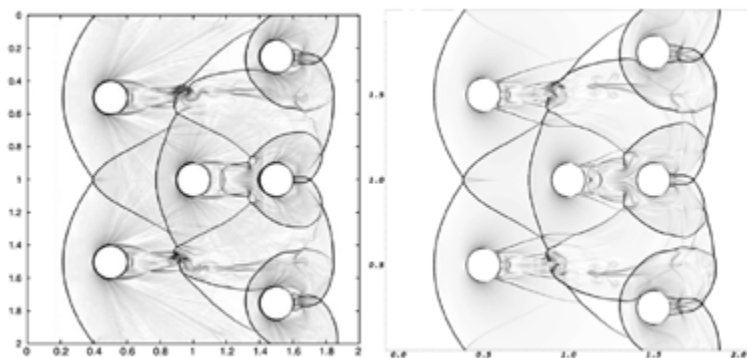


Рис. 4. Численная визуализация течения около системы цилиндров,  $M = 3$ ; слева – метод штрафных функций [20], справа – настоящий метод компенсационных потоков.



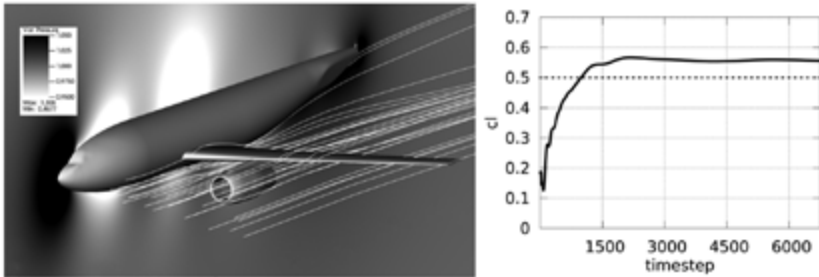


Рис. 5. Модель DLR F6,  $M = 0.75$ ,  $\alpha = 1^\circ$ ; слева – поле давления в плоскости симметрии и линии тока, справа – зависимость коэффициента подъемной силы  $C_l$  от времени.

Исследование эффективности работы с большим числом GPU проводилось на задаче с фиксированной сеткой в 150 млн ячеек на СК «Ломоносов». Программный комплекс показал хорошую масштабируемость на несколько сотен ускорителей – эффективность счета составила 75% на 768 GPU (Рис. 6). Ее удалось добиться благодаря оригинальной схеме обхода ячеек расчетной области, допускающей совмещение обменов между GPU со счетом, и ее программной реализации с использованием асинхронных функций CUDA и MPI.

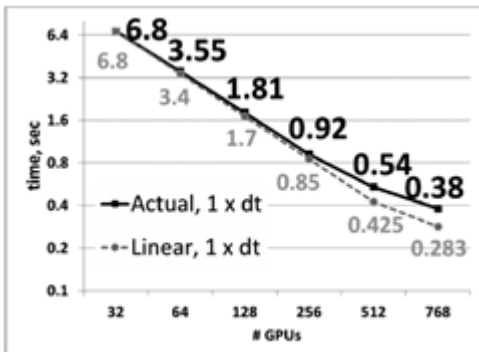


Рис. 6. Время счета в зависимости от числа GPU, пунктиром показан график линейной масштабируемости.

Таким образом, выше был описан эффективный численный метод, позволяющий рассчитывать сложные трехмерные нестационарные газодинамические течения на простейших декартовых сетках, не связанных с геометрией расчетной области. В основе метода лежит гибридная явно-неявная схема С.К. Году-

нова, обеспечивающая минимальное вовлечение неявной компоненты при сохранении свойства НВМН. Был предложен способ реализации граничных условий на декартовой сетке посредством введения в правую часть исходных уравнений специальных компенсационных потоков. Это позволяет уйти от решения краевой задачи в части пространства к решению уравнений с компенсационным потоком во всем пространстве, т.е. фактически заменить краевую задачу задачей Коши. Решение дискретных уравнений выполняется методом приближенной LU-SGS факторизации, что существенно упрощает алгоритмическую часть метода. Это свойство (вычислительный примитивизм) позволило авторам разработать эффективный алгоритм параллельных вычислений на гибридных CPU/GPU вычислительных системах. Приведенные в работе результаты тестовых расчетов и сравнение с альтернативными расчетами на связанных с геометрией сетках убедительно показывают достоверность и работоспособность предложенного метода, а также его высокую масштабируемость и эффективность.

Формальное обобщение предложенной методики на задачи вязкого обтекания не представляет особого труда. Можно включить вязкие потоки в базовую гибридную явно-неявную схему по аналогии с тем, как это делается, например, в работе [24], и модифицировать компенсационный поток пересекаемой ячейки, добавив к нему силу вязкого трения на поверхности тела. Основная проблема здесь – вычисление этой силы для режимов с большими числами Рейнольдса, при которых максимально возможная с точки зрения практической реализации адаптация сетки к геометрии не сможет обеспечить необходимого для погранслоного пристеночного течения сеточного разрешения. Для этих случаев возможно придется строить специальные пристеночные модели и включать их в расчетный процесс (см., например, [25]). Кроме этого, можно использовать принцип локальной адаптации базовой сетки с целью получения более точного дискретного представления расчетной области в приграничных областях и других областях, где решение претерпевает резкое изменение. Вопросам локальной адаптации декартовых сеток посвящен второй раздел настоящей главы.

## 2. Локально-адаптивные декартовые сетки

### 2.1. Преимущества и трудности применения адаптивных сеток

Вопрос о динамической адаптации сеток для повышения точности численного решения задач газовой динамики не нов [27-31]. Однако при проведении расчетов на современных многопроцессорных вычислительных системах подобная адаптация приобретает дополнительную специфику, которая делает необходимым развитие новых подходов, один из которых состоит в использовании простых регулярных сеток. Такие сетки, как правило, не согласованы с геометрией задачи. В настоящей работе мы используем подход, основанный на локальной адаптации несогласованных декартовых сеток. Для учета граничных условий на таких несогласованных сетках применяется метод свободной границы [14,15].

Данная глава посвящена двумерным сеткам с динамической локальной адаптацией. Значительная часть работы посвящена алгоритмам построения и модификации декартовых сеток с динамической локальной адаптацией, а также методам численного расчета газодинамических задач на данном классе сеток. Описывается алгоритм многоуровневой адаптации сетки по произвольному критерию. Для переноса данных между сетками различных уровней измельчения предлагается метод функциональной реконструкции на основе WENO-подхода. Для расчета задач обтекания тела на сетках с локальным уточнением используется метод свободной границы. Преимущества и особенности представленных алгоритмов, индикаторы для измельчения и огрубления ячеек проанализированы на различных задачах газовой динамики.

Реализация алгоритмов решения задач газовой динамики на параллельных вычислительных системах сверхвысокой производительности связана с рядом трудностей и особенностей. Желание использовать графические ускорители приводит к необходимости упрощения вычислительных алгоритмов и узкой локализации расчетных шаблонов, а для повышения точности расчетов требуются подробные сетки, и, как следствие, расчеты могут идти весьма долгое время.

Декартовы сетки идеально подходят для алгоритмов, приспособленных для использования GPU благодаря простоте про-

граммной реализации методов расщепления по направлениям, регулярным шаблонам обращения в память, отсутствию необходимости вычисления нормалей и прочих геометрических характеристик расчетных ячеек. Однако, использование структурированных декартовых сеток для получения качественного результата зачастую требует использования сеток столь большого размера, что вычислительные эксперименты могут занимать астрономическое время.

Математическое моделирование физических явлений, которые описываются кусочно-гладкими функциями, имеющими локализованные области с большими градиентами рассматриваемых величин, налагает жесткие ограничения на структуру численного алгоритма. Распространённые подходы к численному решению таких задач (методы конечных элементов, конечных объёмов, конечных разностей, спектральные методы) будут неэффективны на равномерных сетках, когда требуется локальная высокая точность решения. Уменьшение размера всех расчетных ячеек приводит к значительному росту вычислительной сложности задачи, а повышение порядка аппроксимации разностной схемы — к появлению осцилляций и усложнению алгоритма.

Поэтому эффективно использовать сетки с возможностью выборочного измельчения элементов. Признак деления крупной ячейки на несколько малых может быть разным: большой локальный градиент сеточной функции, пограничный слой вблизи обтекаемого тела, граница раздела фаз в многофазной задаче.

Однако с применением локально-адаптивных декартовых сеток (далее ЛАД) связано и большое количество сложностей. Во-первых, значимым становится формат представления сеток. Он должен сохранять однородность доступа к памяти, минимизировать используемые для счета ресурсы, при этом обеспечить возможность написания всего необходимого функционала с помощью достаточно простых алгоритмов. Поиск соседних ячеек не должен становиться вычислительно сложной операцией. Кроме того, нуждаются в рассмотрении такие вопросы, как — хранить или вычислять координаты адаптированных ячеек, находить всех соседей при необходимости или хранить внутри ячейки ссылки на некоторые из них, как расположить в динамической памяти поля физических величин, чтобы доступ к ним не требовал много лишнего времени из-за неконформности сетки? Отдельной проблемой служит распараллеливание алгоритмов

на неструктурированных сетках: для вычислительных систем с общей памятью актуальны вопросы размещения счетных ячеек в памяти, порядка обхода этих ячеек; для систем с распределенной памятью встает вопрос динамической балансировки памяти между ее узлами.

### **3. Представление неконформной сетки в памяти компьютера**

Определение оптимального и удобного формата представления данных — одна из ключевых задач при использовании сеток с локальной адаптацией. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение производится по какому-то заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для них хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения [32].

Для описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации предлагается следующий формат. Ячейка может разбиваться только на четыре равновеликих части делением пополам по каждому из направлений. В этом случае удобно говорить о наличии четырех потомков данной ячейки. Берется первоначальная прямоугольная (допустима и неравномерная) сетка размера  $M \times N$  с ячейками, которым приписан нулевой уровень.

Каждая ячейка адаптивной сетки описывается своим уровнем  $lv$  (т.е. сколько разбиений начиная с нулевого уровня было проведено для ее получения) и виртуальным положением на этом уровне — парой индексов  $(i, j)$ , таких, какими они были бы в случае полного заполнения данного уровня. Каждый узел дерева хранит флаг наличия подразбиения. Если он равен единице, ячейка обязательно имеет 4 потомка и хранит указатели на них, для листовых ячеек дерева эти указатели нулевые, но устанавливаются ненулевые указатели на координаты и вектор физических параметров.

Кроме того, с особенностями численных методов газовой динамики связано еще одно дополнительное ограничение на конфигурацию сетки: соседние ячейки могут отличаться не более, чем в 2 раза.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки различных конфигураций без использования лишней памяти. Этот

формат будем называть четверичным деревом по числу потомков родительской ячейки (см. рис. 7).

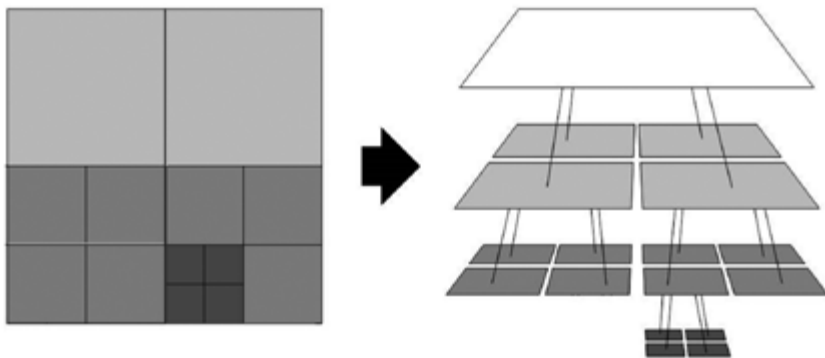


Рис. 7. Четверичное дерево, как формат представления двумерной декартовой сетки с измельчением.

#### 4. Особенности выбранного формата представления данных

Описанный выше формат характеризуется рядом особенностей, которые становятся очень полезными при разработке алгоритмов над описываемыми сетками:

1) Ячейка 1-го уровня с индексами  $(i, j)$  обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами  $([i/2], [j/2])$ , где  $/$  – операция целочисленного деления, а нумерация обоих индексов начинается с нуля,  $i = \overline{0, M-1}; j = \overline{0, N-1}$ .

2) Число соседей варьируется от 6 до 12, **прямых соседей (вдоль осей) – от 4 до 8.**

3) Если записать виртуальные координаты ячейки  $(i, j)$  на ее уровне  $lvl$  в двоичной системе исчисления так, чтобы число знаков двоичной записи составляло  $lvl$ , то можно заметить следующее полезное свойство. Пара цифр, стоящих на  $k$ -й позиции двоичных записей индексов  $i$  и  $j$  определяет положение  $k$ -ого прародителя в ячейке  $k$ -1-ого:  $(0,0)$  –  $k$ -ый прародитель является нижней и левой ячейкой ячейки  $k$ -1-ого уровня,  $(1,0)$  – верхней и левой,  $(0,1)$  – нижней и правой,  $(1,1)$  – верхней и правой, соответственно.

Последнее свойство иллюстрируется рис. 8. Для ячейки с  $lvl = 2$  и  $(i,j) = (1,2)$ , показанной оранжевым, двоичная запись виртуальных индексов есть  $(01_2, 10_2)$ . Первые цифры индексов – 0 и 1 – показывают, что сначала рассматривается нижний правый потомок базовой ячейки (бордовая стрелка), 2-е цифры – 1 и 0 – адресуют ячейку как верхнего левого подпотомка выбранной ячейки 1-го уровня (белая стрелка).

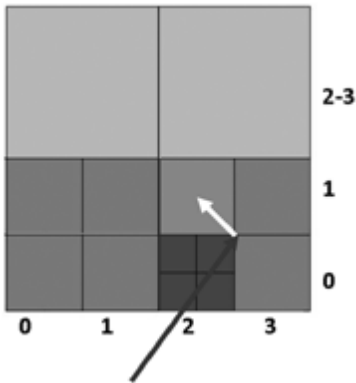


Рис. 8. Иллюстрация к определению адреса ячейки через двоичную запись ее виртуальных индексов на уровне адаптации.

Таким образом, 3 адресных координаты ячейки,  $(lvl, i, j)$  однозначно определяют топологическое положение рассматриваемой ячейки на многоуровневой локально-адаптивной сетке.

## 5. Алгоритмы обхода и модификации ЛАД-сетки

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: в двойном цикле обходятся все элементы базовой сетки, в случае, если текущая ячейка является конечной (листовой), то применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем процедуру для всех четырех потомков данной ячейки.

Для поиска соседей удобно пользоваться свойством 3 используемого формата данных из предыдущего раздела. Будем подразумевать, что ячейка обладает соседями, равными себе по размеру во все стороны вдоль каждой из осей. Если ее координаты  $(lvl, i, j)$ , тогда, например, правый сосед –  $(lvl, i, j+1)$ . При поиске ячейки с такими координатами (прохождении по определяемому координатами пути) возможны 3 случая: мы нашли такую ячейку и она физическая (листовая), она подразбитая, тогда правыми соседями

ми исходной будут 2 левых потомка найденной. Если же мы не дошли до искомой ячейки и остановились на уровне  $lvl-1$ , то эта ячейка и будет правым соседом исходной, просто предыдущего уровня  $lvl-1$ .

Для случая двух уровней, соседей текущей ячейки по каждой из осей можно получить простым оптимизированным перебором на основе половинного деления и умножения индексов, пользуясь только первым свойством описанных сеток.

## 6. Уравнения движения газа

В настоящей работе предлагается вариант адаптации сеток для решения задачи о движении идеального газа, пригодный для массивного распараллеливания. Математическая постановка задачи сводится к решению системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \operatorname{grad}(p) = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} H) = 0, \end{array} \right.$$

в области  $V(\Gamma) \subset \mathbf{R}^2$ , ограниченной некоторой заданной замкнутой кривой  $\Gamma = \Gamma(x, y)$ . Здесь введены стандартные обозначения:  $\mathbf{U}$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $H = E + p / \rho$  – полная удельная энтальпия,  $E = e + 0.5 \mathbf{U}^2$  – полная удельная энергия,  $e$  – удельная внутренняя энергия.

Уравнения системы соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания подобных систем служат уравнения состояния. Газ предполагается идеальным, т.е.  $p = (\gamma - 1) \rho e$

Для уравнений Эйлера ставится стандартная начально-краевая задача в области  $V(\Gamma)$ .



## 7. Численный метод

Запишем в векторном виде систему определяющих уравнений в консервативных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = 0,$$

где  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$  – вектор консервативных переменных, а  $\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H)^T$ ,  $k = x, y$  – векторы потоков по направлениям.

Эта система численно решается на временном шаге  $\Delta t$  на неподвижной декартовой сетке. Для этого используется метод конечного объема с приближенным решением задачи о распаде произвольного разрыва по Русанову [33] или точным по Годунову [10].

Если расчетная сетка состоит одновременно из ячеек разных уровней (например, нулевого и первого), она становится неконформной и насчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле:

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[ \sum_{\sigma x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right], \quad (46)$$

где  $\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n$  – значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня  $lv$  с виртуальными индексами  $(i, j)$  на этом уровне на временном шаге с номером  $n$ . Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие площади части границы.

## 8. Пересчет шага интегрирования по времени

Устойчивость оператора в правой части (46) обеспечивается переменным шагом по времени, который вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot (\Delta t)_{CFL}, \quad 0 < K_{safe} < 1,$$

где  $K_{safe}$  – коэффициент запаса,  $(\Delta t)_{CFL}$  – максимальный курантовский шаг.  $(\Delta t)_{CFL}$  пересчитывается по формуле:

$$(\Delta t)_{CFL} = \min_{\Omega}(\tau_x, \tau_y),$$
$$\tau_i = \min_{\Omega} \left( \frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|} \right), i = x, y,$$

где  $\Delta i$  – пространственный шаг по  $i$ -му направлению в конкретной ячейке,  $c_0$  – скорость звука в ячейке, минимум берется по всей расчетной области.

## 9. Необходимость применения гладкого проектирования решения

При изменении конфигурации сетки необходимо как-либо заполнять обновленные ячейки данными. Объединение нескольких ячеек заведомо связано с потерей данных, и потому консервативное осреднение выглядит наилучшим решением. Однако при измельчении сетки необходимо заполнить новые ячейки данными, зная только информацию о их родителе и, возможно, его соседях. Простой снос значений из родительских ячеек в дочерние порождает ступенчатость в распределениях физических величин, нарушает гладкость самого численного решения и не позволяет получить более точное решение чем то, каковым оно было до измельчения.

Разумным выглядит применение некоторой гладкой интерполяции физических величин на основе некоторого окружения разбиваемой ячейки. Особенно актуальным является гладкое восполнение новоявленных потомков становится при использовании численных методов 2-го и больших порядков.

Для подсеточной реконструкции численных решений часто применяются методы на основе WENO-интерполяции [34,35], не порождающие нефизичных осцилляций газодинамических полей. С учетом физических особенностей решаемых задач, необходимо, чтобы реконструкция оставалась консервативной, то есть суммы интегралов всех параметров по подячейкам соответствовали интегралу старых значений этих же параметров по всей родительской ячейке.

Можно показать, что для удовлетворения требованию консервативности подходит только линейная реконструкция, при которой распределение величин внутри ячейки помимо значения в ее центре описывается еще величиной градиента.

## 10. Независимые шаблоны

Для построения линейно независимых шаблонов, по которым будут рассчитываться градиенты сеточной функции рассматривается реальная конфигурация сетки в окрестности текущей ячейки. Ячейки-соседи нумеруются против часовой стрелки, начиная с правого нижнего (при отсутствии такового – с правого) соседа, заканчивая нижним правым (при отсутствии этого – нижним). Через точки - центры ячеек-соседей с подряд идущими номерами (1 и 2, 2 и 3 и т.д.) и центр текущей ячейки строятся шаблоны, которые опять же нумеруются против часовой стрелки с шаблона, образуемого центрами соседей 1, 2 и текущей ячейки. Последний шаблон получается на основе центра соседа под номером 1 и соседа с наибольшим номером. Пример набора пронумерованных шаблонов представлен на рис. 9.

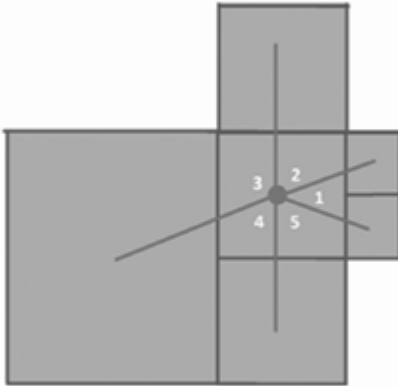


Рис. 9. Пример набора шаблонов для вычисления градиентов при расчете WENO-производной.

## 11. Вывод градиентов по шаблону

По любым трем узлам на плоскости, не лежащим на одной прямой можно составить единственный градиент. Например, для шаблона, образованного центрами соседних ячеек с номерами 1 и 2, при том, что это правый верхний и верхний правый соседи соответственно, его можно вычислить следующим образом.

Пусть  $U$ -исследуемая консервативная величина, заданная сеточной функцией на некотором множестве узлов,  $U_0, U_1, U_2$  – ее значения в узлах 0, 1 и 2 соответственно,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  – линейные

размеры ячейки с центром в узле 0, тогда можно составить следующую систему линейных уравнений относительно градиента

$$\nabla U_{102} = \left( \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{102}, \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{102} \right) = (U_{x,102}, U_{y,102}) :$$

$$\begin{cases} U_0 + \frac{3}{4} \Delta x U_{x,102} + \frac{1}{4} \Delta y U_{y,102} = U_1, \\ U_0 + \frac{1}{4} \Delta x U_{x,102} + \frac{3}{4} \Delta y U_{y,102} = U_2 \end{cases},$$

откуда можно получить следующее выражение градиента:

$$(U_{x,102}, U_{y,102}) = \left( \frac{U_1 - 3U_2 + 2U_0}{2\Delta x}, \frac{U_2 - 3U_1 + 2U_0}{2\Delta y} \right).$$

Аналогично вычисляются оставшиеся градиенты.

## **12. Оценка вклада отдельных шаблонов и интерполяционная формула**

Относительный вес шаблонов из каждой группы прямо пропорционален заматаемой шаблоном площади внутри рассматриваемой ячейки и обратно – расстоянию от центра привязки шаблона до центра ячейки.

Далее по каждому шаблону вычисляем градиент, итоговый считаем как взвешенную сумму градиентов по шаблонам с весами  $\frac{1}{(\beta + \varepsilon)^2}$ , где  $\beta$ - показатель гладкости (модуль градиента),

$\varepsilon$  – малое число, позволяющее избежать деления на ноль. В конце нормируем все веса так, чтобы их сумма равнялась единице. Итоговое выражение градиента есть сумма 8 градиентов по шаблонам с соответствующими нормированными весами.

## **13. Сравнение расчетов на сетках нулевого и первого уровней**

Для демонстрации эффекта измельчения сетки с целью уточнения численных решений были проведены два расчета. В обоих использовалась квадратная область  $[0; 1] \times [0; 1]$  с граничными ус-

ловиями нулевой экстраполяции. Часть области выше главной диагонали ( $y > x$ ) считалась на измельченной сетке, нижняя – на базовой. Размер базовой сетки –  $200 \times 200$  ячеек. Здесь и далее все расчеты проводились с коэффициентом запаса  $K_{safe}$  равным  $1/2$ .

Начальным условием первой задачи являются симметричные относительно разделяющей сетку диагонали точечные взрывы (круглые области радиуса  $0,05$  в точках  $(0,2; 0,8)$  и  $(0,8; 0,2)$  с повышенным давлением  $p = 10$ ). В остальной части примитивный вектор газодинамических переменных одинаков –  $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 1)$ . На рисунке 10 показаны распределения давления и плотности в расчетной области на момент времени  $t = 1$ , на рис. 11 – распределения двух компонент скорости. Уже по этим данным видно, что двукратное измельчение сетки позволяет лучше улавливать фронты ударных волн, точнее описывать конфигурации газового течения.

Во второй задаче аналогичный точечный взрыв помещен в центр исходного квадрата. В качестве результатов представлены поля плотности и давления (рис. 12), а также срезы плотности и давления по второй диагонали квадрата (рис. 13).

Графики показывают, что результат расчета на мелкой сетке более гладкий, профили давления и плотности получаются более четкими, пики большими по амплитуде. По срезам хорошо видна и количественная разница между двумя результатами.

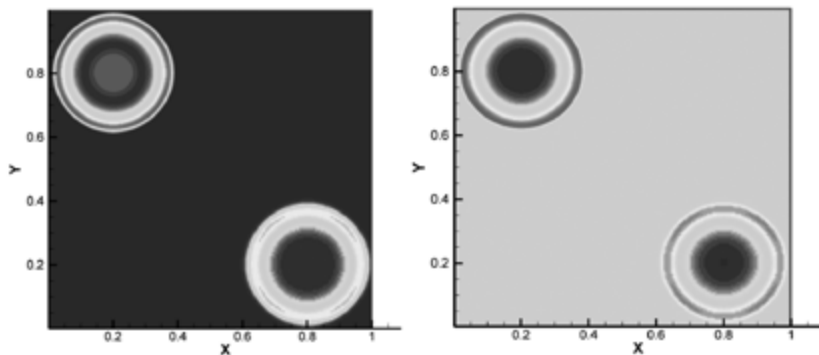


Рис. 10. Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой ( $200 \times 200$  ячеек, ниже главной диагонали) и мелкой ( $400 \times 400$  ячеек, выше главной диагонали) сетках.

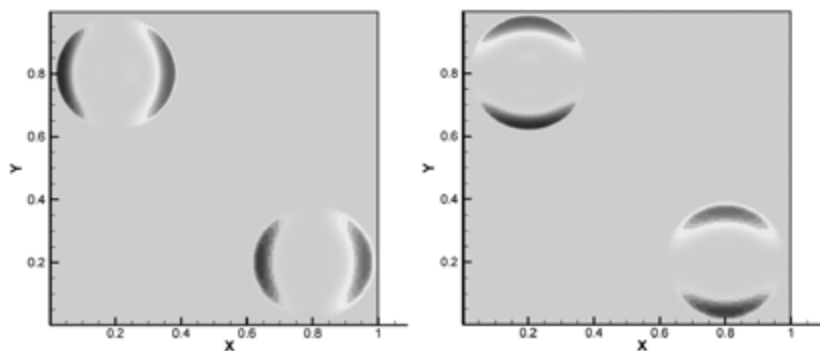


Рис. 11. Поля скоростей  $U_x$  (слева) и  $U_y$  (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках.

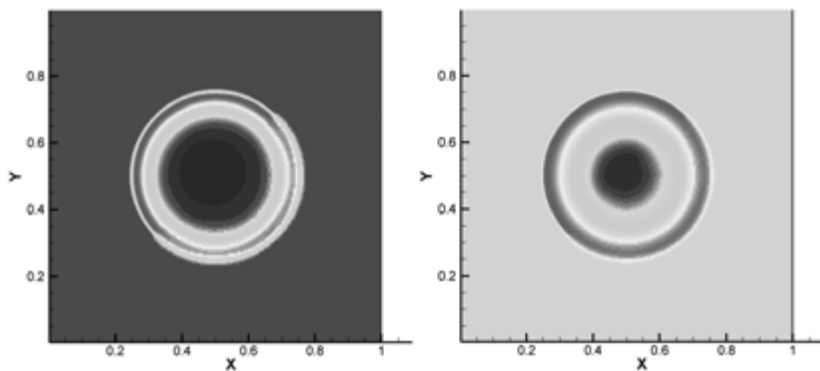


Рис. 12. Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках.

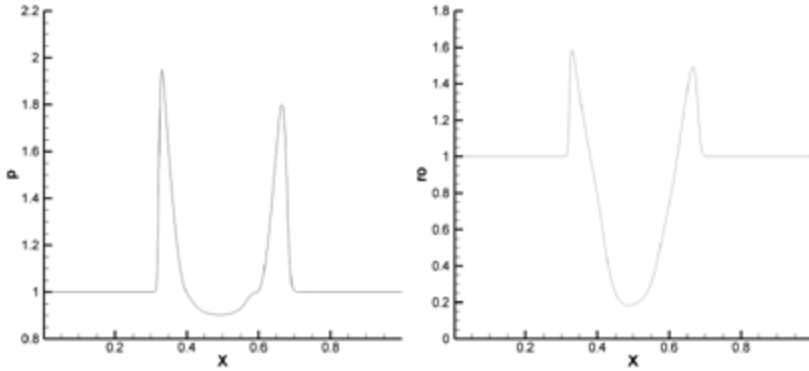


Рис. 13. Срезы давления (слева) и плотности (справа) уровней вдоль второй диагонали квадрата.

## 14. Задача Седова о сильном взрыве

Для тестирования различных численных методов часто используется задача о сильном точечном взрыве (задача Седова [38]). Ее постановка выглядит так: в центре бесконечной области, заполненной неподвижной средой плотности  $\rho_1$  с давлением  $p_1$  вкладывается энергия  $E_0$ .

Задача связана с распространением сильных ударных волн и имеет аналитическое решение. При сравнительно малой величине начального давления относительно плотности соотношения на ударной волне можно записать как:

$$\begin{cases} U_2 = \frac{2}{\gamma+1} c, \\ \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1, \\ p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 c^2 \end{cases}$$

Точное решение задачи для случая цилиндрической симметрии, моделируемого в данной работе, выражается в виде закона движения и формулы скорости ударной волны:

$$r_2(t) = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/4} \sqrt{t},$$

$$c(t) = \frac{1}{2r_2(t)} \sqrt{\frac{E}{\rho_1}},$$

где  $E_0 = \alpha E$ , а множитель  $\alpha$  можно получить из соотношения

$$r_2 = \left(\frac{\alpha E_0}{\rho_1}\right) \frac{1}{2+\nu} t^{\frac{2}{2+\nu}}.$$

Для оценки качества численного решения нас особенно интересует положение ударной волны и величина пика плотности на ней. Можно подобрать величину заряда и начальные условия так, чтобы аналитическое решение задачи через некоторый момент времени будет соответствовать целым значениям параметров. Например, при  $\rho_1 = 1$ , сравнительно малой числовой величине начального давления и вложенной энергии  $E_0 \approx 0,244816$  в момент времени  $t = 1$  ударная волна будет находиться на расстоянии  $r_2 = 1$  от эпицентра взрыва и величина плотности на ней будет близка к  $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ , т. е. для используемого в расчетах  $\gamma = 1,4$  имеем  $\rho = 6$ .

Для расчета задачи Седова ставится начально-краевая задача в квадратной области  $[-1, 2; 1, 2] \times [-1, 2; 1, 2]$ . Во всех ячейках устанавливается поле примитивных переменных  $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 10^{-6})$ , на границах – условие свободного протекания. Рассматривается базовая сетка размером  $200 \times 200$  ячеек. В круге радиуса 0,1 от начала координат устанавливается другое значение плотности, соответствующее суммарно вложенной энергии 0,244816, равномерно распределенной по данному кругу. Ячейка считается попавшей в круг, если ее центр попал внутрь. Рассматриваются 2 типа сеток: базовая и адаптивная (ее конфигурация изменяется по ходу расчета согласно полю индикаторов). Для расчетов на адаптивной сетке в области повышенной плотности ячейки предварительно измельчаются, подсчет индикаторов проводится по полю плотности.

## 15. Сравнение индикаторов гладкости сеточных решений

Сначала сравним два подхода к расчету на адаптивных сетках методом «укрупнения мелкой сетки». В данном разделе будем



говорить о критериях анализа сеточных решений на основе вейвлет-анализа. В первом случае значения с грубой сетки сносятся на соответствующие ячейки мелкой сетки (рис. 14), а во втором случае обеспечивается гладкий переход за счет использования обратного вейвлет преобразования (рис. 15). Как видно из рисунков, при сносе возникают дополнительные шумы и артефакты, что связано с возникновением особенностей на границах ячеек. Далее при использовании индикатора на основе В-вейвлетов будет использоваться только второй подход.

Уменьшить количество артефактов можно за счет подбора порога чувствительности (рис. 16, 17). Однако подобрать порог так, чтобы сетка адаптировалась только к фронту ударной волны, не удастся.

Сравним полученные результаты с результатами расчетов, в которых в качестве индикатора гладкости использовался детектор на основе вейвлетов Добеши. Формирование индикаторов при этом производится по данным заданным на грубой сетке, что соответствует подходу к адаптации, который мы обозначили «измельчение грубой сетки». Результаты расчетов с порогами чувствительности 0.001, 0.005 и 0.01 представлены на рис. 18, 19 и 20 соответственно. Число разбиваемых и неразбиваемых ячеек базовой сетки составляет (9544, 30456), (3292, 36708) и (3284, 36716) соответственно. Как видно, ширина локализации ударной волны практически не зависит от величины порога. Это объясняется тем, что детектор основан на локализации определенных структур: нулей и локальных максимумов модуля, больших порогов. Тем не менее, при малом значении порога возникают дополнительные «артефактные» области адаптации сетки (рис. 18).

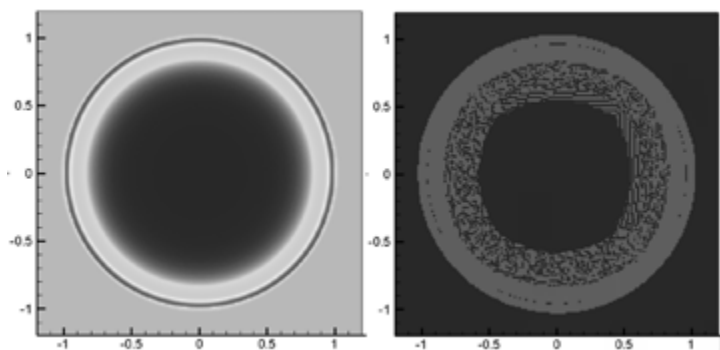


Рис. 14. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и сносе значений из ячейки грубой сетки на четыре ячейки мелкой сетки.

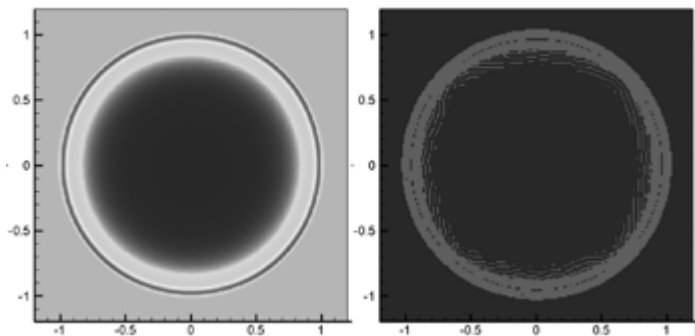


Рис. 15. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и гладком переносе значений из ячеек грубой сетки на ячейки мелкой сетки.

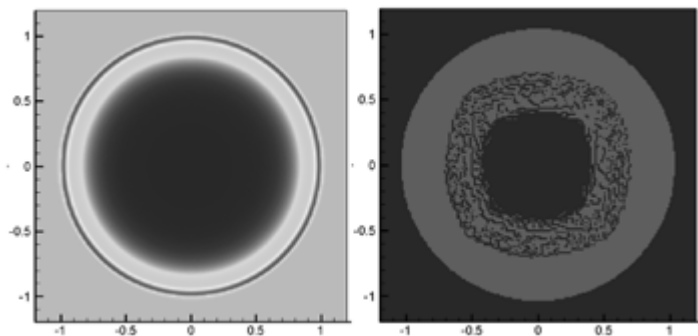


Рис. 16. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.001.

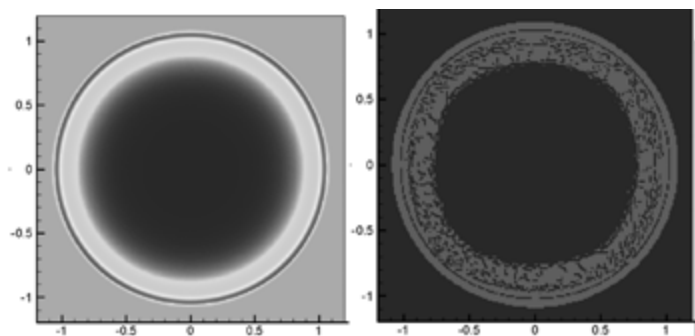


Рис. 17. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.01.

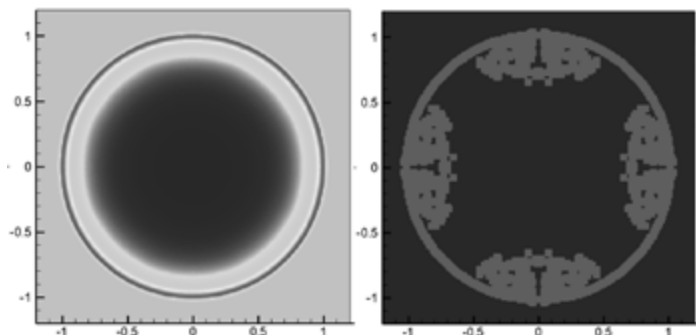


Рис. 18. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.001.

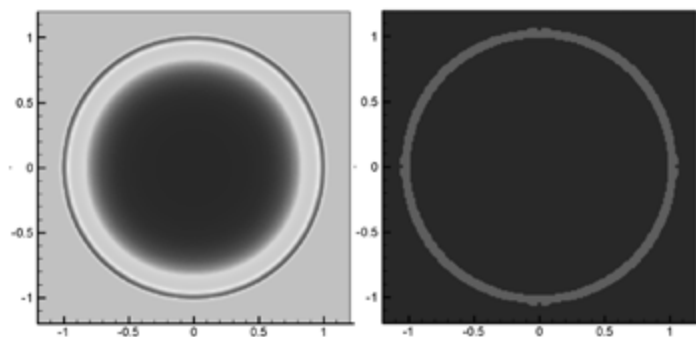


Рис. 19. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.005.

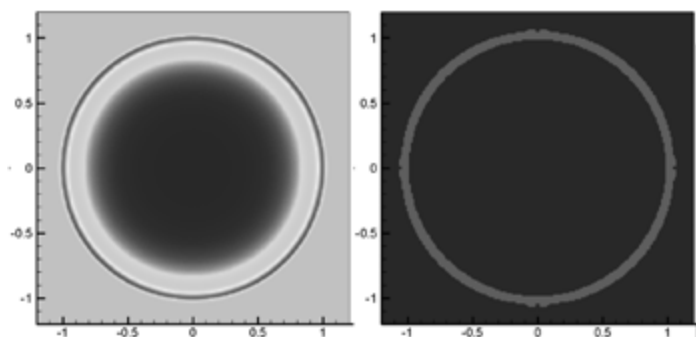


Рис. 20. Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.01.

Для исследуемой задачи индикатор на основе вейвлетов Добеши обеспечивает наилучшую адаптацию (в том смысле, что все особенности локализуются на минимальном количестве ячеек исходной сетки). Тем не менее, индикатор на основе В-вейвлетов также позволяет локализовать все особенности, хотя при этом выделяется и большое количество артефактов. Наличие артефактов на практике приводит к построению неоправданно мелкой сетки и замедлению счета.

В заключении продемонстрируем, что индикаторы гладкости являются лишь инструментом и отображают лишь текущее состояние расчета. Так при численном моделировании задачи Седова методом Годунова возникает эффект карбункула [39], который порождает особенности на осях  $x = 0$ ,  $y = 0$ . И хотя индикатор правильно локализует положение ударной волны и даже дополнительно измельчает сетку в окрестности карбункула, а это не помогает избавиться от алгоритмической особенности только за счет адаптации расчетной сетки.

## **16. Взаимодействие двух точечных взрывов**

Кроме того, был проведен расчет с несимметричной конфигурацией (взаимодействие точечных взрывов разной интенсивности). Расчеты проводились, как и для предыдущего раздела, на трех типах сетки – базовой, мелкой и адаптивной. Базовый размер сетки был равен  $500 \times 00$ . Полученные распределения плотностей и флагов адаптации по окончании расчета на сетке с динамической локальной адаптацией представлены аналогично рисункам на рис. 21. Адаптация проводилась по полю плотностей, представленному на изображении, порог обнуления вейвлет-коэффициентов полагали равным  $h / 4$ .

## **17. Бинарный критерий адаптации сеток на основе вейвлет-анализа**

При работе с многоуровневыми расчетными сетками возникает потребность в индикаторах, сигнализирующих о необходимости перестроения сетки. Используемые для данной задачи алгоритмы должны быть хорошо локализованы (на вход анализатора подаются только данные в самой исследуемой ячейке и нескольких ее соседях), что связано как с многоуровневостью,

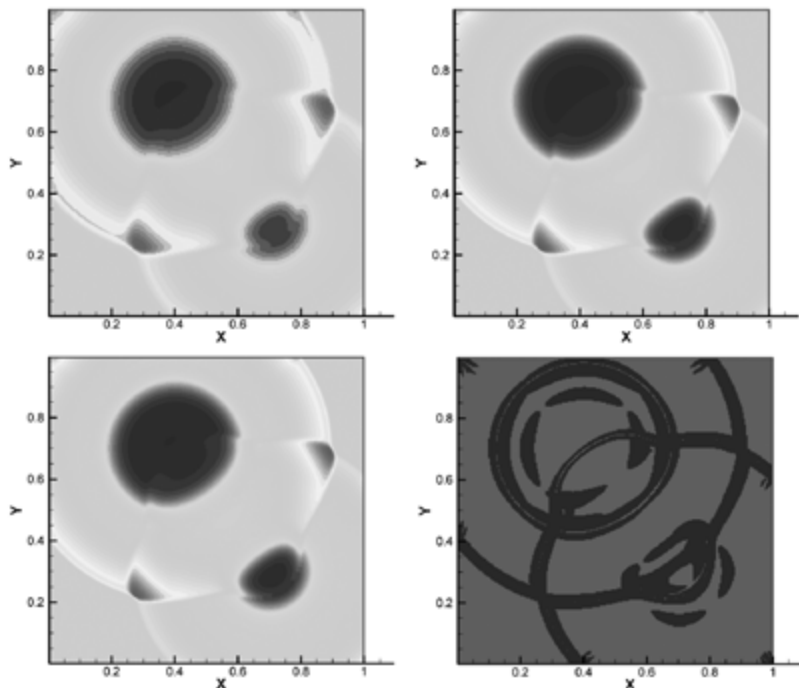


Рис. 21. Поля плотности на базовой (слева сверху), мелкой (справа сверху) и адаптивной (слева внизу) сетках, флаги адаптации (внизу справа) после расчета на динамически адаптивной сетке для задачи взаимодействия точечных взрывов.

так и с необходимостью параллелизации. В работе предлагаются два индикатора гладкости (на крестовом и квадратном шаблонах), основанных на использовании В-вейвлетов.

Параметрами при анализе являются величины  $(k, p)$ , где  $k$  – порядок В-сплайнов, которые используются в анализе, а  $p$  число нулевых моментов вейвлета.

Низкочастотный фильтр  $\{\beta_i\}$  задается обычным образом (см. напр. [36,37])

$$\beta_i = 2^{-k-1} \binom{k+1}{i}, \quad 0 \leq i \leq k+1.$$

Определим семейство В-сплайнов порядка  $k$ , заданных на множестве целых точек

$$B_j^k = B^k(j, j+1, \dots, j+k, j+k+1), \quad 0 \leq j < p,$$

и определим В-сплайн по полуцелым точкам:

$$\tilde{B}^k = B^k \left( \left( p + \left[ \frac{k}{2} \right] \right) / 2, \left( p + \left[ \frac{k}{2} \right] + 1 \right) / 2, \dots, \left( p + \left[ \frac{k}{2} \right] + k + 1 \right) / 2 \right).$$

Высокочастотный фильтр  $\{\alpha_i\}$ ,  $0 \leq i < p$  определяется из условия, что функция  $W^k = \tilde{B}^k - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j B_j^k$  имеет  $p$  нулевых моментов.

## 18. Квазиодномерный анализ

Квазиодномерный анализ на равномерном шаблоне был предложен в [42] (см. также [44]). В этом случае на вход анализатора подается дискретный набор данных  $\{a_{i,j} = f(x_i, y_j)\}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 2p + k - 1$ . При этом в исследуемой ячейке задано значение  $f(x_v, y_v)$  где индекс  $i = j = v := \left\lfloor \frac{2p + k}{2} \right\rfloor$ .

Этими данными могут быть, например, значения плотности или давления, заданные в центрах ячеек одного уровня. Кроме того задается порог чувствительности  $\theta > 0$ . Для получения массива ячеек одного уровня производится осреднение или снос значений функции  $f$  с ячеек других уровней. Анализируемая ячейка является центром креста. Крест передается в анализатор как два массива, соответствующие вертикальной  $\{a_{v,i}\}$  и горизонтальной  $\{a_{i,v}\}$  частям креста.

Далее вычисляется свертка с низкочастотным фильтром:

$$H_m = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j a_{v, 2m+j}, \quad 0 \leq m < p,$$

а затем определяется величина

$$r_{hor} = a_{v,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_j$$

аналогично вычисляется  $r_{ver}$ . Если  $(|r_{ver}| > \theta)$  или  $(|r_{hor}| > \theta)$ , то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

## 19. Анализ на квадратном шаблоне

На вход анализатора подаются данные, заданные в ячейках одного уровня и порог чувствительности  $\theta$ . Центром квадрата является анализируемая ячейка. Квадрат передается в анализатор в виде матрицы  $\{a_{i,j}\}$ ,  $0 \leq i < 2p + k$ ,  $0 \leq j < 2p + k$ . Размер этой матрицы определяется выбранным при построении фильтров порядком гладкости  $k$  и числом  $p$  нулевых моментов вейвлета. При этом исследуемой ячейке соответствует индекс  $(v, v)$ , где

$$v = \left\lfloor \frac{2p + k}{2} \right\rfloor.$$

Вычисляем свертку с низкочастотным фильтром:

$$H_{i,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j a_{i,2m+j}, \quad 0 \leq m < p, \quad 0 \leq i < 2p + k.$$

Затем находим:

$$r_{i,p} = a_{i,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_{i,j}.$$

Затем аналогичные вычисления производятся по столбцам:

$$r_{q,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j H_{2q+j,m}, \quad 0 \leq q < p, \quad 0 \leq m \leq p.$$

$$r_{p,p} = H_{v,p} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_{j,p}.$$

Если выполнено хотя бы одно из условий  $(|r_{p,p}| > \theta), (|r_{v,p}| > \theta), (|r_{p,v}| > \theta)$ , то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна, и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

## 20. Многоуровневая адаптация декартовых сеток

Анализатор рассматривается, как черный ящик, выдающий 1, если ячейку надо измельчить и 0, если не нужно. Для любой ячейки черный ящик работает для некоторого локального окна (креста с центром в ней из 5 ячеек одного уровня с исследуемой и сторонами вдоль осей или квадрата со стороной 5 ячеек и центром в заданной). Перед анализом данные сносятся на текущий уровень, и если элемент этого уровня является частью большей

ячейки, берется значение из нее, а если состоит из ячеек следующего, то проводим осреднение по четырем ячейкам. В данном случае применять консервативное осреднение и специфическую подсеточную реконструкцию нецелесообразно, так как для анализа решения высокая точность значений не нужна, поскольку в дальнейшем счете это проектирование не используется, и на результатах итогового расчета это проектирование не сказывается. При описании алгоритмов достаточно рассматривать процедуру определения значения критериев измельчения и огрубления сетки как «черный ящик» [41-44].

Алгоритм, формирующий конфигурацию сетки, адекватную соответствующую текущему сеточному полю некоторой физической величины основан на следующем порядке действий:

1. Сначала проводится процедура огрубления сетки: те ячейки, которые можно сделать более крупными, согласно вейвлетному анализатору объединяем в одну ячейку без нарушения имеющейся структуры дерева. В цикле на уровнях, начиная с первого (т.е. с предпоследнего перед нулевым, базовым), ищем виртуальные ячейки, которые могут быть огрублены (имеют четырех физических потомков) и удовлетворяют критерию огрубления (черный ящик для ячейки-родителя выдает ноль).

2. Следом осуществляется процедура измельчения сетки. Проходим по уровням с нулевого до предпоследнего, ищем на них физические ячейки, для которых выполняется критерий измельчения (черный ящик выдает единицу) и делим ее на 4 части.

3. Далее проводится процедура сглаживания сетки: удаляются все несоответствия введенному ограничению, что соседние ячейки должны отличаться не более, чем на один уровень. В цикле, на уровнях, начиная с предшествующего второму, ищем ячейки, у которых соседи крупнее, более чем в 2 раза и мельчим их до нужного уровня.

## **21. Расчеты с многоуровневой адаптацией. Задача Седова о сильном взрыве**

Результаты работы данного алгоритма продемонстрированы на примере расчета задачи Л.И. Седова [38] с 4-мя и 6-ю (рис. 22) уровнями адаптации в виде итогового поля плотности и конфигурации сетки, показанной величиной уровня. В таблице 3 представлена статистика, демонстрирующая эффективность использования адаптивных сеток. Задача Л.И. Седова описывает сильный точечный взрыв внутри сравнительно большой области. В центральной точке области вводится заряд. Можно подобрать



его энергию так, что ударная волна будет достигать радиуса 1 в момент времени 1. Данная задача имеет аналитическое решение: при сравнительно малой начальной плотности по области плотность среды на ударной волне будет стремиться к 6.

Табл. 3. Статистика по расчетам задачи Л.И. Седова на многоуровневой сетке с локальной адаптацией.

| Уровни        | 4              | 6               |
|---------------|----------------|-----------------|
| Базовая       | 50 x 50        | 50 x 50         |
| Подробная     | 800 x 800      | 3200 x 3200     |
| Итоговая      | 40552 (6,34 %) | 589708 (5,76 %) |
| Пик плотности | 4.316          | 5.287           |
| Время счета   | 72.9 с.        | 5270 с.         |

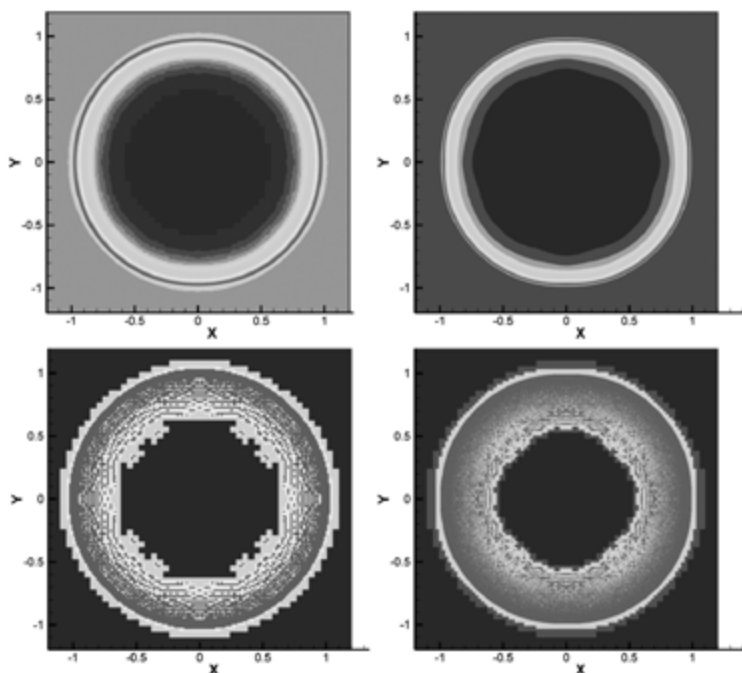


Рис. 22. Результаты расчетов задачи Л.И. Седова (верхний ряд, поля плотности) на многоуровневой адаптивной сетке и соответствующие им конфигурации расчетных сеток на конец расчета (от синего к красному показан уровень физической ячейки). Левый столбец – 4 уровня адаптации, правый – 6 уровней, базовая сетка 50x50.

С увеличением числа уровней адаптации значительно увеличивается точность расчетов (плотность на ударной волне приближается к величине полученной аналитически), уменьшается процент ячеек от максимально возможного при заданном числе уровней, что говорит о лучшей локализации особенностей решения. Все расчеты проводились с потоками вычисленными по В.В. Русанову во избежание проявления эффекта карбункула см. [39].

## 22. Газодинамические тесты Лиски-Вендрофа

Для демонстрации большего количества возможностей и особенностей представленного алгоритма, а также валидации программного кода были проведены расчеты газодинамических тестов Лиски-Вендрофа [40].

Схема всех тестов одинакова и предельно проста: рассматривается квадратная область  $[0; 1] \times [0; 1]$ , которая разбивается на 4 равных квадрата серединными перпендикулярами к сторонам. Образуются 4 подобласти, помечаемые индексами UL, UR, LL, LR по английским аббревиатурам для верхней левой, верхней правой, нижней левой и нижней правой частей соответственно. В каждой части устанавливаются свои значения начальных данных. Перебрав различные сочетания соотношений газодинамических компонент, в подобластях можно получить разнообразные конфигурации решений и численные эффекты, поэтому данные тесты активно используются при валидации и оценке качества двумерных вычислительных кодов.

Наиболее интересными с точки зрения конфигурации итогового решения и ввиду большого количества особенностей, которые сложно достигаются при численном моделировании, выглядят тесты №6 и №16. Их формулировка выглядит так:

*Тест № 6.*

Начальные условия для  $V = (p, \rho, U_x, U_y)$  по квадрантам такие:

$$V_{ul} = (1, 2, 0.75, 0.5), V_{ur} = (1, 1, 0.75, -0.5),$$

$$V_{ll} = (1, 1, -0.75, 0.5), V_{lr} = (1, 3, -0.75, 0.5).$$

Рассматривается решение на момент времени  $t = 0.3$ . Для данной задачи характерно образование вихрей вдоль центральных осей квадрата.

*Тест № 16.*

Аналогичные данные для этого теста таковы:

$$V_{ul} = (1, 1.0222, -0.6179, 0.1), V_{ur} = (0.4, 0.5313, 0.1, 0.1),$$

$$VII = (1, 0.8, 0.1, 0.1), VIr = (1, 1, 0.1, 0.8276), \\ t = 0.2.$$

Этот тест отличается особой зоной низкой плотности возле точки  $(0,5; 0,6)$ , которая получается ясно выраженной при расчете далеко не всеми газодинамическими кодами.

Моделирование данных тестов было проведено с использованием различного числа уровней адаптации по методам С.К. Годунова и В.В. Русанова. Увеличение числа уровней адаптации при использовании метода С.К. Годунова позволяет даже при первом порядке пространственной аппроксимации выявить эффекты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для теста № 6 (см. рис. 23) вдоль координатных осей и зону разрежения для теста №16 (см. рис. 24). Расчеты с применением русановских потоков даже при большом числе уровней адаптации (максимальный, представленный здесь равен 7) не показывают эти особенности.

Таблицы 4 и 5 демонстрируют показатели эффективности предложенного алгоритма. Для обоих тестов процент счетных ячеек уменьшается, а значит, повышается локализация наиболее интересных участков. При этом время увеличивается далеко не так сильно, как было бы при использовании равномерной сетки повышенного разрешения.

Табл. 4. Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа № 6 на многоуровневой сетке с локальной адаптацией.

| Число уровней адаптации | Время счета, с. | Число ячеек | Процент числа ячеек от максимально возможного |
|-------------------------|-----------------|-------------|---|
| 7 уровней               | 36783           | 1881120     | 18,4%   |
| 5 уровней               | 1140            | 157048      | 24,5%   |
| 3 уровня                | 25              | 13507       | 33,8%   |
| Русанов, 7 уровней      | 5491            | 1793462     | 17,5%   |

Табл. 5. Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа №16 на многоуровневой сетке с локальной адаптацией.

| Число уровней адаптации | Время счета, с. | Число ячеек | Процент числа ячеек от максимально возможного |
|-------------------------|-----------------|-------------|---|
| 6 уровней               | 1364            | 131355      | 5,1%  |
| 3 уровня                | 10              | 5011        | 12,5%   |

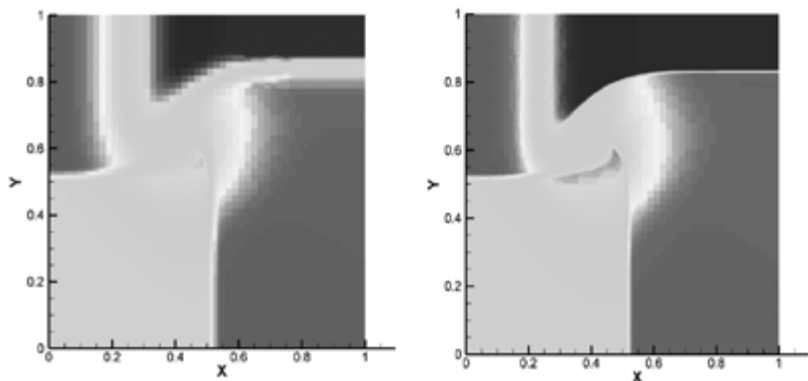


Рис. 23. Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа № 16 при использовании метода С.К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева) и 6 уровнями адаптации (справа) при базовой сетке 50x50 ячеек.

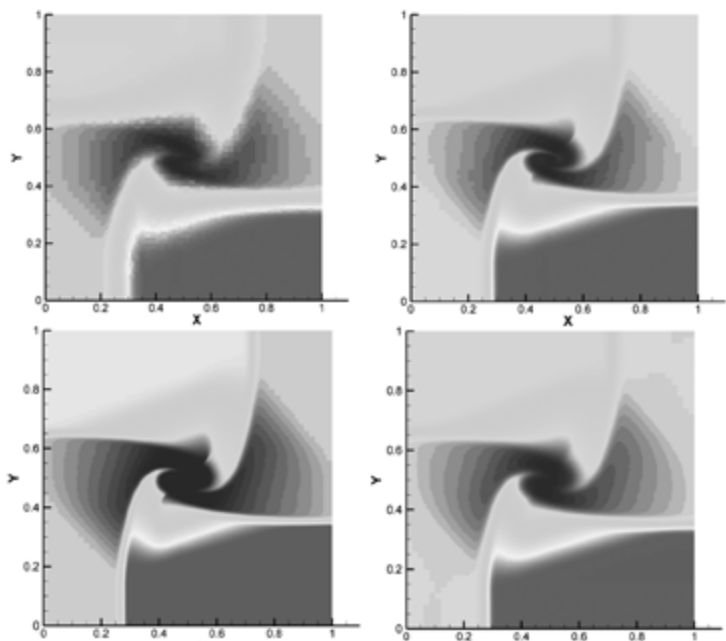


Рис. 24. Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа № 6 при использовании метода С.К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева сверху), 5 уровнями адаптации (справа сверху), 7 уровнями адаптации (слева внизу) и метода В.В. Русанова с 7 уровнями адаптации при базовой сетке 50x50 ячеек.

## 23. Внедрение метода свободной границы для ЛАД-сетки

Для интегрирования по времени уравнения (37) нужно использовать неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли  $\omega_f$ , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$q^{n+1} = q^* - \frac{\Delta t}{V\omega_f} F(q^{n+1}) \quad (47)$$

$$q^{n+1,s+1} = q^{n+1,s} - \left[ \frac{\Delta t}{V\omega_f} A(q^{n+1,s}) + I \right]^{-1} \left( q^* - q^{n+1,s} - \frac{\Delta t}{V\omega_f} F(q^{n+1,s}) \right) \quad (48)$$

Уравнение (47) мы решаем итеративно методом Ньютона (48) с первым приближением для  $q^{n+1,0} = q^*$ .

Применение метода LU-SGS для ЛАД-сеток нецелесообразно ввиду алгоритмической сложности построения соответствующих матриц или аналогичной схемы.

Данные вычисления проводятся только для пересекаемых ячеек на втором этапе метода разделения по физическим процессам. Сначала все ячейки расчетной области считаются сквозным обходом (внутренние ячейки для включений с неподвижной геометрией можно не рассчитывать вовсе), на втором этапе значения газодинамических компонент доитерировываются в пересекаемых ячейках по формуле (48) до сходимости (понижения невязки до машинного нуля). Скорость газа внутри тела устанавливается равной скорости его границы.

## 24. Алгоритм геометрической адаптации сетки

Под геометрической адаптацией понимаем адаптацию с анализатором, выдающим единицу для ячеек, имеющих ненулевое пересечение с внедренным в область геометрическим телом.

Пошагово алгоритм можно записать так:

Объект окружается кубом соответствующей размерности. Проводится цикл по всем элементам тела (отрезкам для 2D или треугольникам для 3D):

1) Проводим начальное разбиение куба (базовая сетка) и находим ячейки, имеющие ненулевое пересечение с заданным элементом геометрии.

2) Каждую из этих ячеек разбиваем на 4 (2D) или 8 (3D) частей и повторяем процедуру для ячеек-потомков.

3) Повторяем последний шаг до достижения нужной точности (заданное максимальное число уровней адаптации).

Для теста пересечения прямоугольной ячейки и отрезка замкнутой кривой, составляющей границу твердого тела, выполняется простая процедура: находятся все точки, являющиеся пересечениями прямых, содержащих одну из граней ячейки с прямой, содержащей исходный отрезок границы. Если данное пересечение непустое, проверяем точки на принадлежность ячейке и отрезку простым покоординатным сравнением. Если после проверки множество точек подобных пересечений оказывается непустым, удаляем из него повторяющиеся точки с учетом погрешности вычислений и получаем пару, образующую отрезок пересечения, являющийся частью исходного отрезка с вершинами на гранях ячейки. Отрезки контуров, параллельные осям сетки, обрабатываются отдельным тривиальным образом: их пересечение осуществляется только с гранями сетки, перпендикулярными им самим.

В трехмерном случае возможно огромное количество разнообразных конфигураций пересечения элемента сетки (осе-ориентированного параллелепипеда) с элементом геометрии (пространственным треугольником), однако можно добиться унификации поиска путем проведения аналогичной процедуры поиска пересечения: сначала стороны треугольника пересекаются с гранями ячейки простой проверкой координат, потом ребра параллелепипеда пересекаются с треугольником. Все точки пересечения объединяются в единое множество, удаляются дубликаты. Площадь искомого многогранника ищется как сумма площадей треугольников, его составляющих. Для получения правильной последовательности его вершин точки сортируются по величине скалярного произведения (угол между соседними должен быть максимальным).

Для каждой итоговой пересекаемой ячейки сохраняется жидкостная объемная доля и интегральная взвешенная площадью

нормаль. После нахождения пересекаемых ячеек вся расчетная область подразбивается на внутреннюю подобласть, внешнюю подобласть и множество пересекаемых ячеек, уже вычисленное алгоритмом. Для малых размеров базовой сетки эту процедуру можно проводить рекурсивно, что и было сделано для всех расчетов, представленных ниже. При увеличении числа ячеек сетки рекурсивную процедуру можно заменить срезами вдоль одной из осей или аналитической проверкой центра ячейки на нахождение внутри тела.

В каждой пересекаемой ячейке нижнего уровня проводятся операции, аналогичные представленным в разделе 2 данной главы: рассчитывается объемная доля, занимаемой жидкостью в пересекаемой ячейке,  $\omega_f$ , и вектор внешней нормали (направленной в сторону жидкости)  $\mathbf{n}_f$ ,  $|\mathbf{n}_f| = S_f$ , где  $S_f$  – длина отрезка, аппроксимирующего пересечения счетной ячейки с поверхностью  $\Gamma$ . Для сохранения общности изложения, сохраним «объемную» нотацию для описания параметров алгоритма.

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности  $\Gamma_j$ . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными площадям пересечения:  $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$ ,  $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$ , где  $C$  обозначает область ячейки сетки. В двумерном случае объемную долю  $\omega_f$  в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить точно. Прямая, определяемая данной нормалью и точкой  $\mathbf{X}_0$ , насчитываемой по итеративной формуле (31), пересекая прямоугольную ячейку, разбивает ее на 2 подобласти: либо одна из них является прямоугольным треугольником, либо обе являются трапециями. Во втором случае вычисляем просто площадь трапеции, содержащей опорную точку  $\mathbf{X}_0$ , делим ее на объем ячейки и получаем искомую объемную долю:

$$\omega_f = \frac{V_f}{V_{\text{cell}}} = \frac{(a+b)h}{2V_{\text{cell}}}, \quad (49)$$

где  $a$  и  $b$  – основания данной трапеции, отсекаемые отрезком аппроксимирующей прямой на гранях ячейки, а  $h$  – ее высота, являющаяся размером ячейки в перпендикулярном основаниям

направлении. В первом же случае в качестве  $V_f$  – объема жидкой части ячейки берется либо площадь треугольника, либо площадь всей ячейки без данного треугольника. Выбор альтернативы определяется принадлежностью точки  $\mathbf{X}_0$  данному треугольнику:

$$\omega_f = \frac{V_f}{V_{cell}} = \begin{cases} \frac{\mathbf{b}}{2V_{cell}}, x_{0 \in \Delta} \\ \frac{2V_{cell} - \mathbf{b}}{2V_{cell}}, x_{0 \notin \Delta} \end{cases} \quad (50)$$

После нахождения всех пересекаемых ячеек нужно разбить все ячейки расчетной сетки на 3 класса: внешние, пересекаемые и внутренние. Пересекаемые ячейки определяются непосредственно вышеописанной процедурой. Для присвоения ячейкам одной из двух оставшихся категорий будем пользоваться следующим алгоритмом:

- 1) Выбираем одну заведомо внешнюю ячейку, один из углов сетки, как правило, задан наперед, помечаем данную ячейку флагом.
- 2) Помечаем всех ее непересекаемых соседей аналогичным флагом.
- 3) Далее, повторяем процедуру для всех ячеек, помеченных этим флагом. Для этого в двойном цикле по направлениям обходим все ячейки, и если они помечены флагом, помечаем флагом их непересекаемых соседей.
- 4) Повторяем данные обходы сетки в двойном цикле с разных углов сетки в направлении к ее центру до тех пор, пока у каждой помеченной флагом ячейки все соседи будут либо помечены этим же флагом, либо являться пересекаемыми.

На выходе из алгоритма все помеченные флагом ячейки будут являться внешними ко всем контурам, представленным в постановке задачи. Ячейки же, не помеченные флагом и не являющиеся внешними, автоматом становятся внутренними.

Примеры работы алгоритма геометрической адаптации представлены на рисунках 25 и 26. На рис. 26 также представлена сегментация расчетной области.

При работе с подвижной геометрией координаты вершин тела пересчитываются согласно уравнениям его движения, а геометрическая адаптация проводится на каждом временном слое.



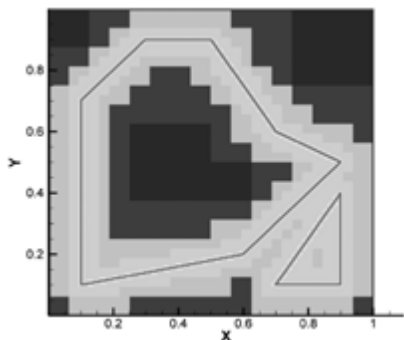


Рис. 25. Расчетная сетка (цветом от синего к красному показан уровень физической ячейки) после геометрической адаптации к двум многоугольникам вложенным в область. 8 уровней, базовая сетка 10х10.

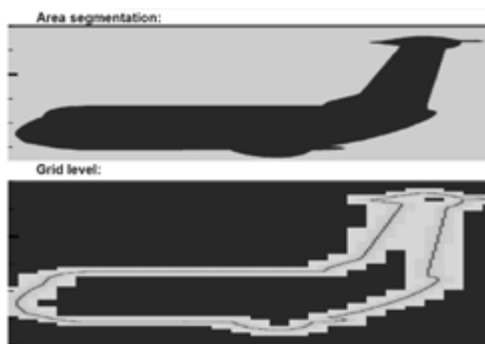


Рис. 26. Расчетная сетка (снизу, цветом от синего к красному показан уровень физической ячейки) и сегментация расчетной области (зеленый – внешние ячейки, синий – внутренние, красный – пересекаемые) после геометрической адаптации к контуру осевого разреза самолета Ту-134. 5 уровней, базовая сетка 70х70.

## 25. Стационарная геометрия. Обтекание неподвижного тела

Решалась задача обтекания клина с углом  $20^\circ$  при скорости набегающего потока  $M = 3$  с 5 и 8 уровнями сетки, и проводилось сравнение с аналитическим решением. Для представления клина использовался метод свободной границы. Базовая сетка имела 50х50 ячеек, таким образом, наименьшая ячейка в 5-уровневой сетке эквивалентна ячейке в сетке 800х800, а наименьшая ячейка в 8-уровневой сетке – ячейке в сетке 6400х6400. Адаптация производилась по плотности. При вейвлет анализе использовался крестовой шаблон. Результаты представлены на рис. 24 и 25.

Как и ожидалось, расчет на сетке с 8 уровнями ближе к аналитическому решению, чем расчет на 5 уровнях (рис. 27). Расчет на 5-уровневой сетке несколько размывает ударную волну (рис. 27 и 28). Как видно на рис. 28, адаптация происходит как к решению, так и к геометрии.

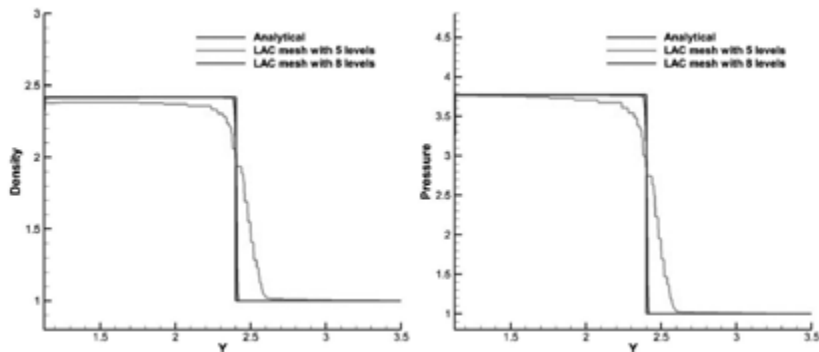


Рис. 27. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 (зеленая) и 8 (синяя) уровнями.

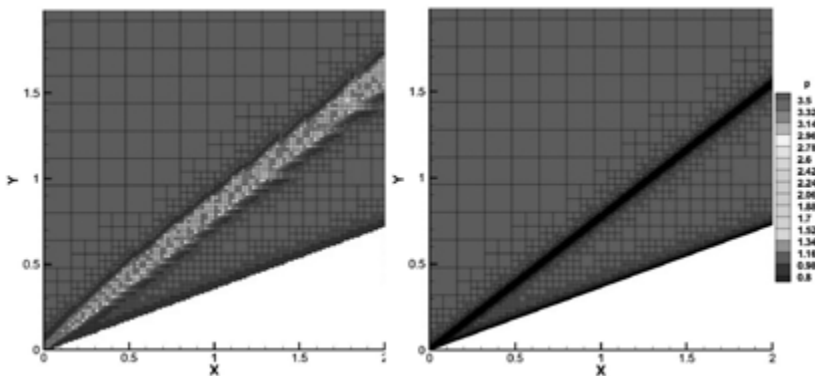


Рис. 28. Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями (слева) и 8 уровнями (справа).

Также проводились расчеты на сетке с 5 уровнями при различных порогах обнуления вейвлетных коэффициентов. Чем меньше порог, тем больше мелких ячеек, соответственно, тем точнее расчет, что и проиллюстрировано на рис. 29.

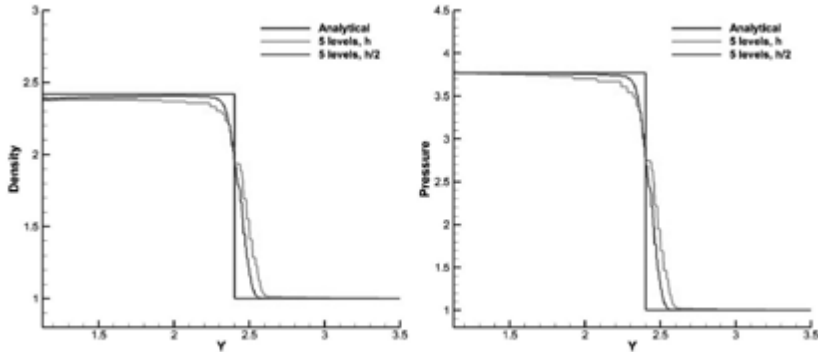


Рис. 29. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 уровнями с порогом, равным  $h$  (зеленая) и  $h/2$  (синяя).

## 26. Нестационарная геометрия. Обтекание движущегося тела

Были проведены расчеты обтекания клина, движущегося со скоростью  $0.1M$  навстречу набегающему потоку. Таким образом, стационарное решение для неподвижного клина при скорости набегающего потока  $M = 3.1$  и решение для движущегося клина со скоростью  $0.1M$  и набегающего потока  $M = 3.0$  в системе координат, связанной с клином, должны совпадать. На рис. 30 приведено сравнение численного решения для движущегося клина с соответствующим аналитическим решением стационарного случая, которое показывает хорошее совпадение результатов с учетом того, что расчет проводился по схеме первого порядка точности с диссипативным численным потоком по В.В. Русанову. Рис. 31 иллюстрирует динамику установления решения.

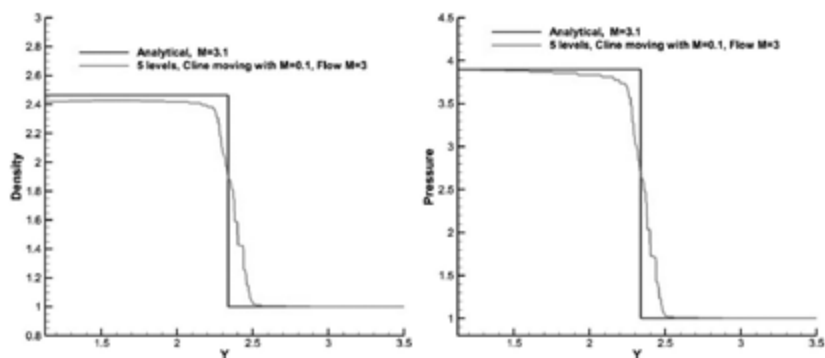


Рис. 30. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения с  $M = 3.1$  (красная линия) и расчета на сетке с 5 уровнями при скорости набегающего потока  $M = 3$  и скорости клина  $M = 0.1$  (зеленая).

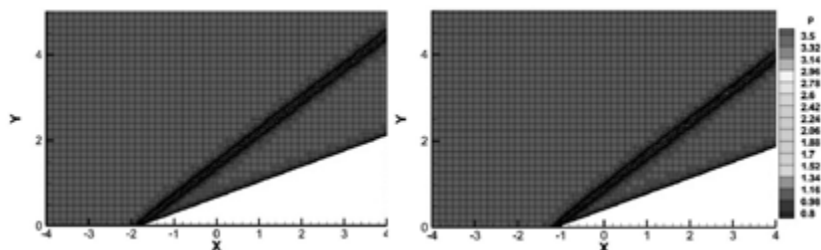


Рис. 31. Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями при движущемся клине с  $M = 0.1$  в различные моменты времени.

## Заключение

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00872.

## Список литературы

1. *Lin Fu, Zhenghong Gao, Kan Xu, Fang Xu.* A multi-block viscous flow solver based on GPU parallel methodology // *Computers & Fluids* 95 (2014) p. 19–39.
2. *A. Jameson, E. Turkel.* Implicit schemes and LU decomposition // *Math. of Comp.*, v.37, № 156 (1981), p. 385–397.
3. *W.K. Anderson, J.L. Thomas, B. Van Leer.* Comparison of finite volume flux vector splitting for the Euler equations // *AIAA J.*, 24:9 (1986), p. 1453–1460.
4. *B. Van Leer.* Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comp. Phys.*, 32 (1979), p. 101–136.
5. *J.E. Fromm.* A method for reducing dispersion in convective difference schemes // *J. Comp. Phys.*, 3 (1968), p. 176–187.
6. *С.К. Годунов, В.С. Рябенький.* Разностные схемы // – М.: Наука. 1977. 440 с.
7. *В.П. Колган.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ*, 3:6 (1972), с. 68–77.
8. *G.D. van Albada, B. van Leer, W. Roberts.* A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // *Astron. Astrophys.*, 108 (1982), p. 76–84.
9. *С.К. Годунов.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сборник*, 47:3 (1957), с. 271–306.
10. *С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов.* Численное решение многомерных задач газовой динамики // – М.: Наука. 1976. 400 с.
11. *E. Toro.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics // Springer. 2009. p. 719.
12. *В.В. Русанов.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *Докл. АН СССР*, 180:6 (1968), с. 1303–1305.
13. *I. Menshov, Y. Nakamura.* Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // *AIAA J.*, 42:3 (2004), p. 551–559.
14. *И.С. Меньшов, М.А. Корнев.* Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Матем. моделирование*, 26:5 (2014), с. 99–112.
15. *И.С. Меньшов, П.В. Павлухин.* Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 92, 24 с.
16. *O. Boiron, G. Chiavassa, R. Donat.* A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Computers & Fluids*, 38 (2009), p. 703–714.

17. Л.Д. Ландау, Е.М. Луфшиц. Гидродинамика. 3-е изд. – М.: Наука. 1986. 736 с.

18. I. Menshov, Y. Nakamura. An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada. 1995. p. 815–821.

19. П.В. Павлухин. Реализация параллельного метода LU-SGS для задач газовой динамики на кластерных системах с графическими ускорителями // Вестник ННГУ, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород. 2013. № 1, с. 213–218

20. A. Jameson, Airfoil admitting non-unique solutions to the Euler equations // AIAA Paper 91–1625 (1991)

21. M.M. Hafez and W.H. Guo. Nonuniqueness of transonic flows // Acta Mech. 138, 177184 (1999a)

22. A.G. Kuzmin. Instability and bifurcation of transonic flow over airfoils // AIAA Paper, 2004

23. K.R. Laflin, S.M. Klausmeyer, T. Zickuhr, et al. Data Summary from Second AIAA Computational Fluid Dynamics Drag Prediction Workshop // JOURNAL OF AIRCRAFT, 42:5 (2005), p. 1165–1178.

24. В.Е. Борисов, А.А. Давыдов, И.Ю. Кудряшов, А.Е. Луцкий, И.С. Меньшов. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // Матем. моделирование, 26:10 (2014), с. 64–78.

25. А.Е. Луцкий, А.В. Северин. Простейшая реализация метода пристеночных функций // Препринт ИПИМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 38, 22 с.

26. F. Bramkamp, Ph. Lamby, and S. Mueller. An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady and steady state flow computations. J. Comp. Phys., 197(2):460-490, 2004.

27. A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 48(12):1305–1342, 1995.

28. A. Harten. Multiresolution representation of data: A general framework. SIAM J. Numer. Anal., 33(3):1205–1256, 1996.

29. G. Zumbusch. Parallel multilevel methods. Adaptive mesh refinement and loadbalancing Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Wiesbaden, 2003.

30. S. Osher and R. Sanders. Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids. Math. Comp., 41:321-336, 1983

31. O.V. Vasilyev. Solving multi-dimensional evolution problems with localized structures using second generation wavelets. Int. J. Comp. Fluid Dyn. 17:151–168, 2003.

32. А.А. Сухинов. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – №. 1. – С. 86–98.

33. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1961. – Т. 1. – №. 2. – С. 267–279.
34. *Chi-Wang Shu*. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics. // High-order methods for computational physics, Springer, Heidelberg, 1999, p. 438–480
35. Тишкин В.Ф., Пескова Е.Е., Жалнин Р.В., Горюнов В.А. О построении WENO-схем для гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках. // Известия высших учебных заведений. Приволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – №. 1(29).
36. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин. Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях // Математическое Моделирование. – 2011. – № 1. – С. 41–50.
37. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин. Локализация особенностей газодинамических полей и адаптация расчетной сетки к положению разрывов Математическое моделирование, 2012, 24:12, 49–54
38. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Наука, – М. – 1977. – С. 243–274.
39. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the «carbuncle» phenomena // J. Comput. Phys. 2001. 166, N 2. 271–301.
40. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2003. – Т. 25. – №. 3. – С. 995–1017.
41. *A.L. Afendikov, Ya.V. Khankhasaeva, A.E. Lusky, I.S. Menshov, K.D. Merkulov.* «Computation and visualization of flows past bodies in mutual motion» // Scientific Visualization, 2016, T.8. № 4. С. 128–138. (URL: <http://sv-journal.org/2016-4/10.php?lang=ru>)
42. Афендииков А.Л., Давыдов А.А., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В., Ханхасаева Я.В. Адаптивные вейвлетные алгоритмы для решения задач гидро- и газовой динамики на декартовых сетках. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. – 232 с. ISBN 978-5-98354-030-9
43. Афендииков А.Л., Давыдов А.А., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В. Алгоритм многоуровневой адаптации сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики // Препринты ИПМ им.М.В. Келдыша, 2015, № 97, 22 с.
44. Афендииков А.Л., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В., Ханхасаева Я.В. Алгоритм динамической локальной адаптации сеток на основе вейвлет-анализа с использованием метода свободной границы // Препринты ИПМ им.М.В. Келдыша, 2015, № 94, 20 с.

Отделение математических наук

А.Л. Афендииков, И.С. Меньшов,  
К.Д. Меркулов, П.В. Павлухин

**Метод адаптивных декартовых сеток  
для решения задач газовой динамики**

Формат 60 x 84/16  
Гарнитура Таймс  
Усл. печ. л. 3,7. Усл. изд. л. 2,3  
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати  
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением  
президиума Российской академии наук  
от 24 октября 2017 г. №10106-765,  
распространяется бесплатно.